

Zwanglos: eine topologische Mannigfaltigkeit (manifold) der Dimension n ist ein topologischer Raum, der dem $\mathbb{R}^n$ lokal ähnelt.

Eine Fläche ist eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension 2.

Eine **RIEMANN SURFACE** Fläche ist eine Fläche mit etwas anderem, um holomorphe Funktionen betrachten zu können.

⚠ Es gibt auch den Begriff der Riemannschen Mannigfaltigkeit, aber er ist völlig verschieden und wir werden ihn niemals erwägen.

Def Sei $n \geq 1$ eine ganze Zahl. Eine TOPOLOGISCHE MANNIGFALTIGKEIT DER DIMENSION n ist ein topologischer Raum X sodass:

- X ist Hausdorffsch
- $\forall x \in X, \exists U$ offene Umgebung von x in X s.d. U zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist.

Beispiel Jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n .

Beispiel $n \geq 1$ ganz $\Rightarrow$ die n -Sphäre

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

ist eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n .

Seien

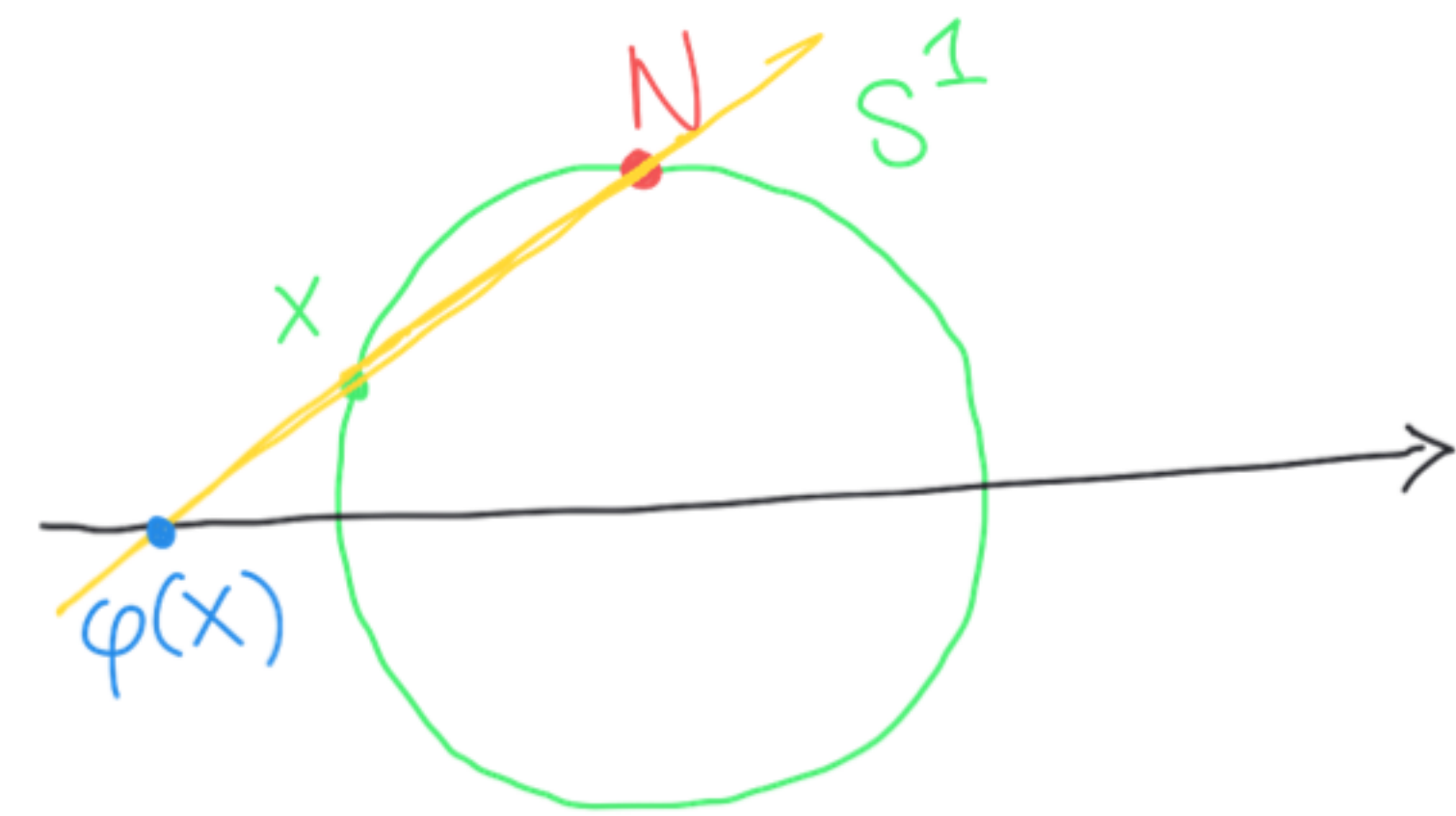
$$N = (0, \dots, 0, 1) \in S^n \quad \text{Nordpol}$$

$$S = (0, \dots, 0, -1) \in S^n \quad \text{Südpol}$$

Man zeigt, dass $S^n \setminus \{N\}$ und $S^n \setminus \{P\}$ zu $\mathbb{R}^n$ homöomorph sind.

$$S^n = (S^n \setminus \{N\}) \cup (S^n \setminus \{P\})$$

$S^n \setminus \{N\}$ und $\mathbb{R}^n$ sind homöomorph:



$$\varphi: S^n \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right)$$

$$\varphi^{-1}: \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n \setminus \{N\}$$

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto \left(\frac{2y_1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, 1 - \frac{2}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1} \right)$$

φ, φ^{-1} sind Biholomorphismen.

Satz $U \subseteq \mathbb{R}^r$ offen, $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m \subset^1$, $r \geq m$.

$$X = F^{-1}(0) = \{p \in U \mid F(p) = 0\}$$

$$\forall p \in X, \text{ rk } J_F(p) = m.$$

$\Rightarrow X$ ist eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $r-m$.

Bws $n = r-m$. $p^0 \in X$. Up to change the coordinates of $\mathbb{R}^r$ we can assume that:

$$p = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m$$

$$J_F(p^0) = \left[\begin{array}{c|c} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p^0) & \frac{\partial F_i}{\partial y_h}(p^0) \end{array} \right]_{\substack{1 \leq i, h \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$\text{mit } \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_h}(p^0) \right) \neq 0.$$

Satz der impliziten Funktion $\Rightarrow$ es gibt
A offene Umgebung von x^0 in $\mathbb{R}^n$
B " " " " y^0 in $\mathbb{R}^m$

sodass:

- $A \times B \subseteq U$
- $\forall x \in A, \exists! y \in B : F(x, y) = 0 \quad (x, y) \in X$
- $g: A \rightarrow B$
 $x \mapsto \text{das eindeutige } y \in B \text{ mit } F(x, y) = 0$ ist C^1 .

Man betrachte:

$$\pi: X \cap (A \times B) \rightarrow A$$
$$(x, y) \mapsto x$$

$$h: A \rightarrow X \cap (A \times B)$$
$$x \mapsto (x, g(x))$$

$$\pi \circ h = \text{id}_A$$

$$h \circ \pi = \text{id}_{X \cap (A \times B)}$$

$\Rightarrow X \cap (A \times B)$ ist homöomorph zu A.

Kor $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 .

$$X = f^{-1}(0)$$

$$\forall x \in X, \quad \nabla f(x) \neq 0$$

$\Rightarrow X$ ist eine top. Mann. der Dimension n .

Beispiel $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$

$$X = F^{-1}(0) = S^1$$

$$J_F(x, y) = (2x \ 2y)$$

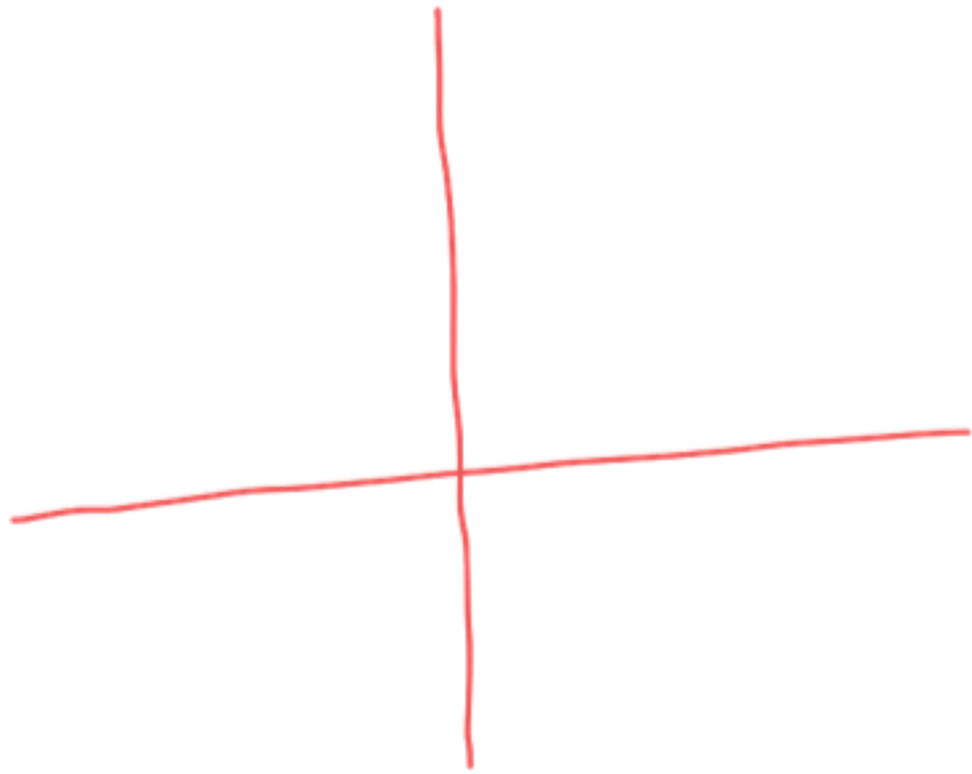
$$0 \notin S^1 \Rightarrow \forall (x, y) \in X, \operatorname{rk} J_F(x, y) = 1$$

$\Rightarrow S^1$ top. Mann.

Nicht-Beispiel

$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ ist keine topologische Mannigfaltigkeit.

Es gibt keine Umgebung von 0 in X , die zu einem offenen Intervall homöomorph ist.



Satz X top. Mannigfaltigkeit der Dimension n
 Y " " " " " " m
 $\Rightarrow X \times Y$ " " " " " " $n+m$

Beispiel $S^n \times S^m$ ist eine top. Mann. der Dimension $n+m$.
 Sind $S^n \times S^m$ und S^{n+m} homöomorph?

$S^1 \times S^1$
 Torus

