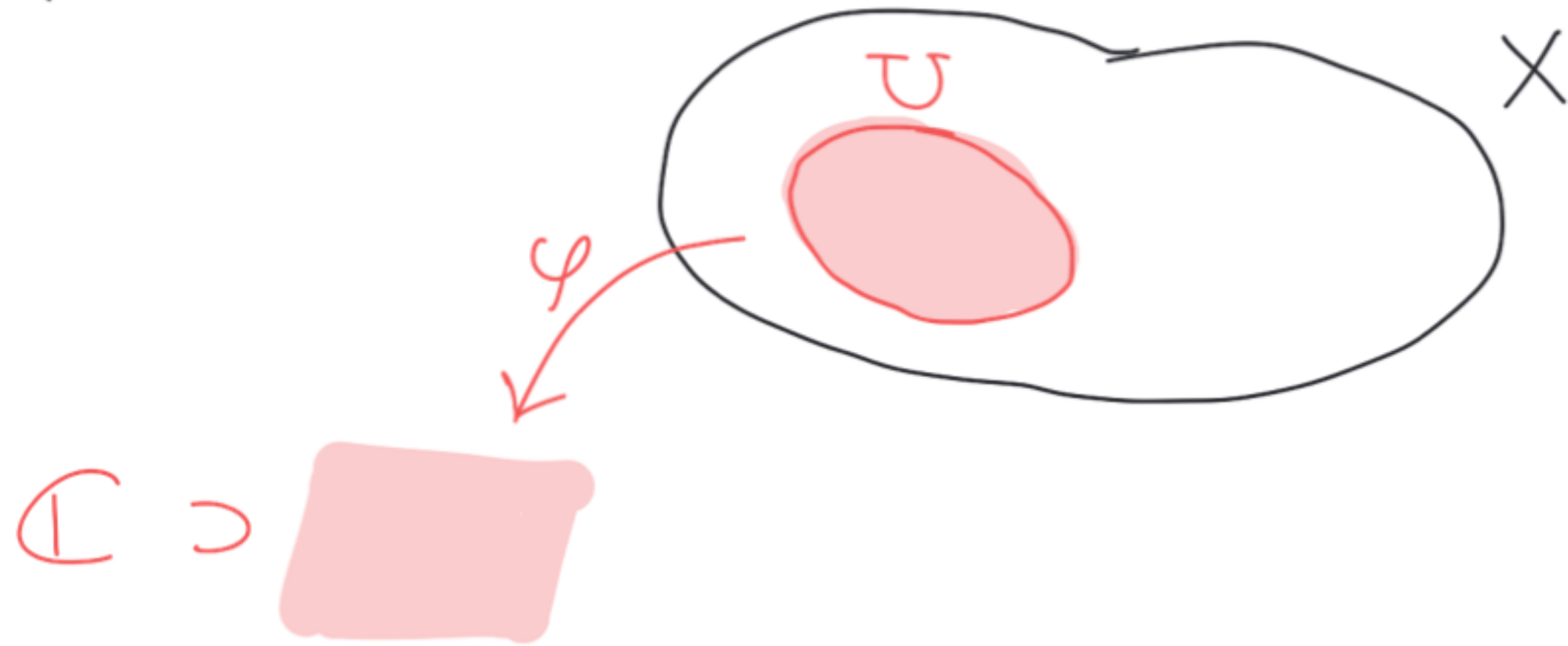


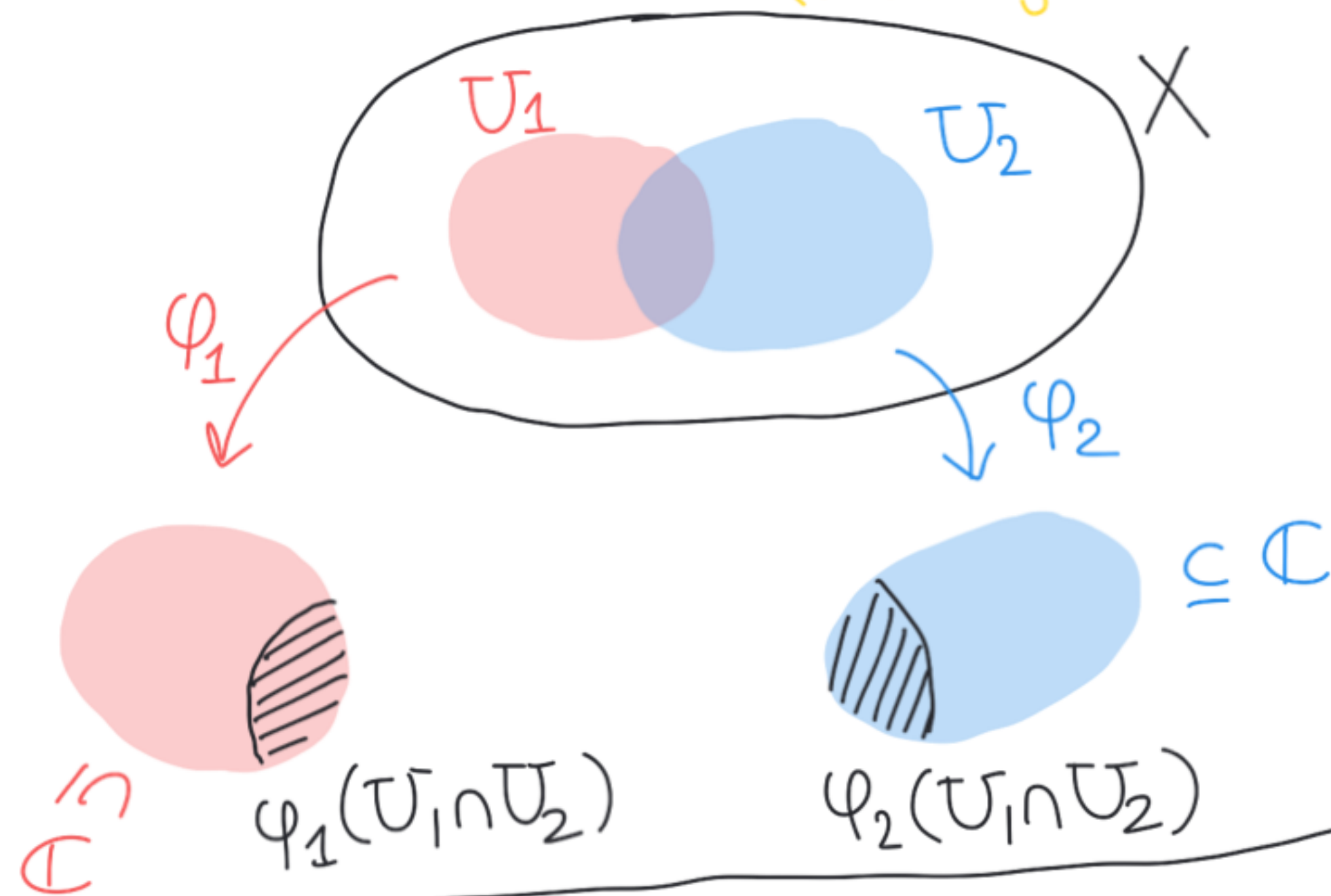
Def Sei X ein topologischer Raum. Eine KARTE auf X ist (U, φ) sodass:

- U ist eine offene Teilmenge von X
- $\varphi: U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig
- $\varphi(U)$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$
- $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ ist ein Homöomorphismus.



Def Sei X ein top. Raum. Zwei Karten (U_1, φ_1) und (U_2, φ_2) auf X heißen **KOMPATIBEL** wenn
(verträglich)

entweder $U_1 \cap U_2 = \emptyset$
oder $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$



und

$$\varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

Kartenwechsel $z \mapsto \varphi_2(\varphi_1^{-1}(z))$

ist ein Biholomorphismus
von offenen Teilmengen
von $\mathbb{C}$.

Def Sei X ein topologischer Raum.

Ein ATLAS auf X ist eine Menge $\mathcal{A}$ von Karten auf X sodass:

- je zwei Karten aus $\mathcal{A}$ sind kompatibel
- die Definitionsbereiche der Karten in $\mathcal{A}$ überdecken

X , d.h.
$$X = \bigcup_{(U, \varphi) \in \mathcal{A}} U$$

Beispiel $U \subseteq \mathbb{C}$ offene Teilmenge
 (U, id_U) ist eine Karte auf U
 $\{(U, \text{id}_U)\}$ ist eine Atlas auf U .

Bemerkung X Hausdorffsch top. Raum.
Wenn X einen Atlas hat, dann ist X eine topologische
Mannigfaltigkeit der Dimension 2.

Beispiel Jetzt konstruiert man einen Atlas auf der 2-Sphäre $S^2 = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + u^2 = 1\}$

$$N = (0, 0, 1)$$

$$S = (0, 0, -1)$$

$$\varphi: S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(x, y, u) \mapsto \frac{x + iy}{1 - u}$$

Homöomorphismus

$$\varphi^{-1}: \mathbb{C} \longrightarrow S^2 \setminus \{N\}$$

$$z \mapsto \left(\frac{2 \operatorname{Re} z}{|z|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im} z}{|z|^2 + 1}, 1 - \frac{2}{|z|^2 + 1} \right)$$

$$S \in S^2 \setminus \{N\}$$

$$\varphi(S) = \varphi(0, 0, -1) = \frac{0 + i \cdot 0}{1 - (-1)} = 0$$

$$\psi: S^2 \setminus \{S\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(x, y, u) \longmapsto \frac{x - iy}{1 + u}$$

Homöomorphismus

$$N \in S^2 \setminus \{S\} \quad \psi(N) = \psi(0, 0, 1) = 0$$

$(S^2 \setminus \{N\}, \varphi)$, $(S^2 \setminus \{S\}, \psi)$ sind Karten auf S^2 .

$$\varphi(S) = 0 \Rightarrow \varphi((S^2 \setminus \{N\}) \cap (S^2 \setminus \{S\})) = \varphi(S^2 \setminus \{N, S\}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\psi(N) = 0 \Rightarrow \psi((S^2 \setminus \{N\}) \cap (S^2 \setminus \{S\})) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\psi \circ \varphi^{-1} \big|_{\varphi((S^2 \setminus \{N\}) \cap (S^2 \setminus \{S\}))} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

ist holomorph?

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \psi(\varphi^{-1}(z)) &= \psi\left(\frac{2\operatorname{Re} z}{|z|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im} z}{|z|^2+1}, 1 - \frac{2}{|z|^2+1}\right) = \\ &= \frac{\frac{2\operatorname{Re} z}{|z|^2+1} - i \frac{2\operatorname{Im} z}{|z|^2+1}}{1+1 - \frac{2}{|z|^2+1}} = \frac{2\operatorname{Re} z - i \cdot 2\operatorname{Im} z}{2(|z|^2+1) - 2} = \frac{2\operatorname{Re} z - 2i\operatorname{Im} z}{2|z|^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\operatorname{Re} z - i\operatorname{Im} z}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = z^{-1} \quad \text{holomorph!}$$

$\{(S^2 \setminus \{N\}, \varphi), (S^2 \setminus \{S\}, \psi)\}$ ist ein Atlas
auf S^2 .

Def X top. Raum. Zwei Atlanten A und B auf X heißen ÄQUIVALENT (oder „im wesentlichen gleich“), wenn auch $A \cup B$ ein Atlas auf X ist.

Bem X top. Raum. A, B Atlanten auf X . Dann:

A und B sind äquivalent (d.h. $A \cup B$ ist ein Atlas)	$\iff$	jede Karte aus A ist kompatibel mit jeder Karte aus B
--	--------	--

Bem Das ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Atlanten auf X .

Def Eine RIEMANNSCHE FLÄCHE (Riemann surface) ist ein Paar $(X, [A])$ mit:

- X Hausdorffsch topologischer Raum
- $[A]$ ist eine Äquivalenzklasse von Atlanten auf X .

Riemannsche Flächen sind also topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension 2, auf denen ein Atlas als zusätzliche Struktur ausgezeichnet wurde, wobei zwei solche Atlanten genau dann dieselbe Struktur ergeben, wenn sie äquivalent sind.

Bem Auf ein und denselben topologischen topologischen 2-Mann. können viele voneinander nicht-äquivalente Atlanten und damit Strukturen als Riemannsche Fläche existieren.

Beispiel $U \subseteq \mathbb{C}$ offen

(U, id_U) Karte

$\{(U, \text{id}_U)\}$ Atlas

U ist natürlich eine Riemannsche Fläche:

$(U, [\{(U, \text{id}_U)\}])$

Beispiel $A = \{(S^2 \setminus \{N\}, \varphi), (S^2 \setminus \{S\}, \psi)\}$ Atlas auf S^2

Die Riemannsche Fläche $(S^2, [A])$ heißt die
RIEMANNSCHE ZAHLENKUGEL.

Beispiel Man betrachte den top. Raum $\mathbb{C}$.

$$\text{id}_{\mathbb{C}}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto -\text{Re}z + i \text{Im}z$$

$$\psi: \mathbb{C} \rightarrow B_1(0)$$

$$z \mapsto \frac{z}{1+|z|}$$

sind 3 Homöomorphismen.

$(\mathbb{C}, \text{id}_{\mathbb{C}})$, $(\mathbb{C}, \varphi)$, $(\mathbb{C}, \psi)$ sind 3 Karten auf $\mathbb{C}$.

Sie sind nicht paarweise kompatibel, weil die Kartenwechsel nicht holomorph sind.

$\{(\mathbb{C}, \text{id}_{\mathbb{C}})\}$, $\{(\mathbb{C}, \varphi)\}$, $\{(\mathbb{C}, \psi)\}$ sind 3 Atlanten auf $\mathbb{C}$, die paarweise nicht äquivalent sind. Sie induzieren 3 paarweise verschiedene Riemannsche-Fläche-Strukturen auf $\mathbb{C}$.