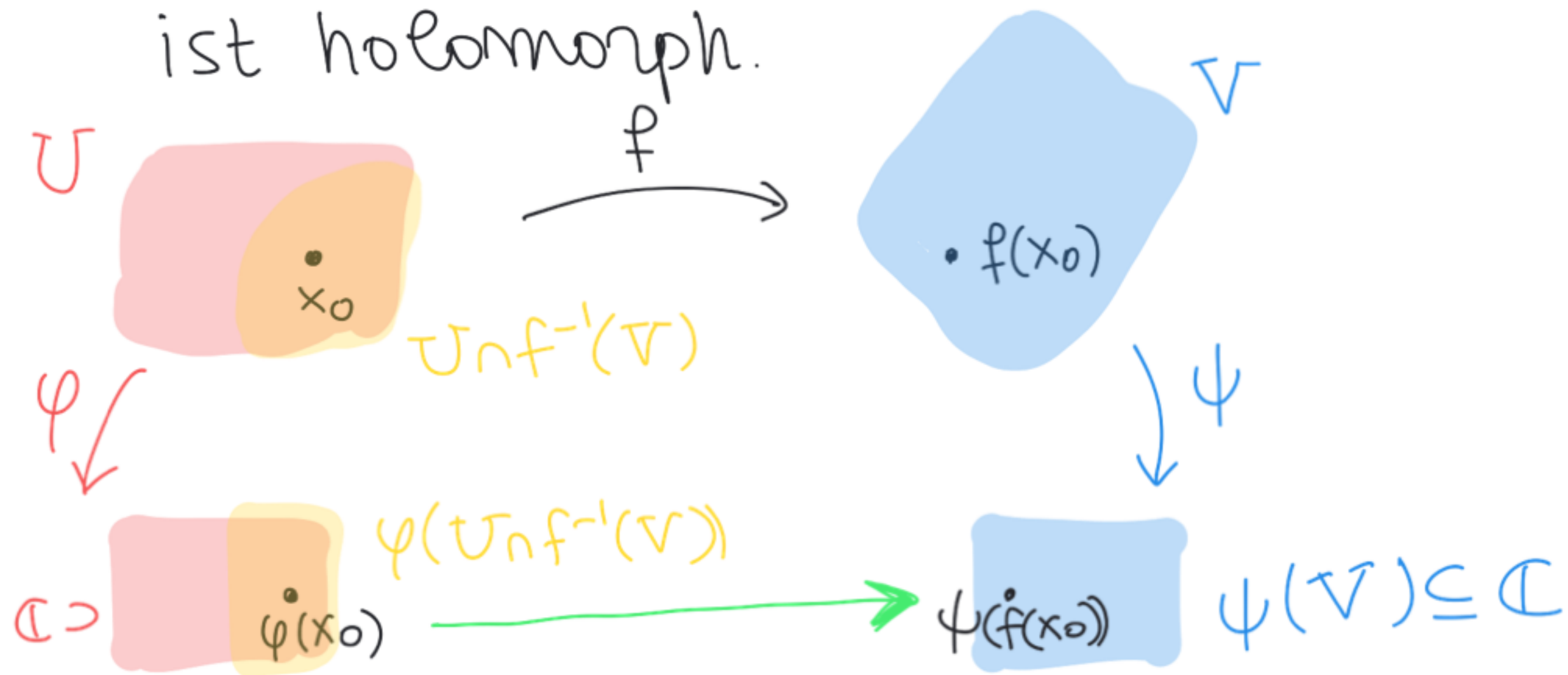


Def Seien $(X, [A]), (Y, [B])$ zwei Riemannsche Flächen.
 Sei $x_0 \in X$ ein Punkt. Eine ^{stetige} Abbildung $f: X \rightarrow Y$
 heißt **HOLOMORPH** in x_0 wenn
 $\exists (U, \varphi) \in A$ und $(V, \psi) \in B$ mit $x_0 \in U$, $f(x_0) \in V$
 und

$$\varphi(U \cap f^{-1}(V)) \xrightarrow{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}} \psi(V)$$
 ist holomorph.



Bem Seien $(X, [A]), (Y, [B])$ zwei Riemannsche Flächen
 Sei $x_0 \in X$. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine ^{stetige} Abbildung.

f ist holomorph in x_0
 d.h. $\exists (U, \varphi)$ Karte in A
 (V, ψ) Karte in B mit
 $x_0 \in U, f(x_0) \in V$ und

$$\varphi(U \cap f^{-1}(V)) \xrightarrow{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}} \psi(V)$$

holomorph

$$\begin{aligned} &\forall (U, \varphi) \text{ Karte auf } X \\ &\text{kompatibel mit } A, \\ &\Leftrightarrow \forall (V, \psi) \text{ Karte auf } Y \\ &\text{kompatibel mit } B, \\ &\text{dann: } x_0 \in U, f(x_0) \in V \Rightarrow \\ &\varphi(U \cap f^{-1}(V)) \xrightarrow{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}} \psi(V) \\ &\text{holomorph} \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) trivial
 $\Rightarrow$) composition of holomorphic functions are holomorphic.

Def Seien $(X, [A])$ und $(Y, [B])$ zwei Riemannsche Flächen. Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt **HOLOMORPH** (für die Riemannsche-Flächen-Strukturen $[A]$ und $[B]$), wenn für jedes $x_0 \in X$ f holomorph in x_0 ist.

Kurz gesagt: „Holomorph“ heißt „holomorph bezüglich Karten“.

Beispiel $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offene Teilmenge.

Wir benutzen die kanonische Riemannsche-Fläche-Struktur auf U , die durch die Karte (U, id_U) induziert wird.

Gleich für V .

$$\left\{ \begin{array}{l} U \rightarrow V \text{ holomorphe} \\ \text{im Sinne der Riemannschen} \\ \text{Flächen} \end{array} \right\} = \left\{ U \rightarrow V \text{ holomorph} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{im alten Sinne} \end{array} \right\}$$

Def Seien X und Y zwei Riemannsche Flächen.
Ein BIHOLOMORPHISMUS von X nach Y ist eine holomorphe Abbildung $f: X \rightarrow Y$, sodass f bijektiv ist und $f^{-1}: Y \rightarrow X$ holomorph ist.

Def Zwei Riemannsche Flächen heißen BIHOLOMORPH, wenn es einen Biholomorphismus zwischen ihnen gibt.

Beispiel (nach dem letzten Beispiel in 10.2)

Sei X die Riemannsche Fläche auf dem top. Raum $\mathbb{C}$, die durch die Karte $\text{id}_{\mathbb{C}}$ induziert wird. X ist die kanonische Riemannsche-Fläche-Struktur auf $\mathbb{C}$.

Sei Y die Riemannsche Fläche auf $\mathbb{C}$ mit Karte

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto -\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z.\end{aligned}$$

Sei Z die Riemannsche Fläche auf $\mathbb{C}$ mit Karte

$$\begin{aligned}\psi: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{z}{1+|z|}.\end{aligned}$$

$$X \neq Y, \quad X \neq Z, \quad Y \neq Z.$$

$$f: X \longrightarrow Y$$

$$z \mapsto -\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$$

ist holomorph:

f ist bijektiv

$$f^{-1}: Y \longrightarrow X$$

$$z \mapsto -\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} = X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \operatorname{id}_{\mathbb{C}} & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{C} & \xrightarrow[\operatorname{id}_{\mathbb{C}}]{\varphi \circ f \circ \operatorname{id}_{\mathbb{C}}^{-1}} & \mathbb{C} \\ & \text{holomorph} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} = Y & \xrightarrow{f^{-1}} & X = \mathbb{C} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \operatorname{id}_{\mathbb{C}} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow[\operatorname{id}_{\mathbb{C}}]{\operatorname{id}_{\mathbb{C}}} & \mathbb{C} \\ & \text{holomorph} & \end{array}$$

$\Rightarrow f^{-1}$ ist holomorph

$\Rightarrow f: X \longrightarrow Y$ ist ein Biholomorphismus.

Ich will zeigen, dass X und Z nicht biholomorph sind.
Per Widerspruch, sei $g: X \rightarrow Z$ ein Biholomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} = X & \xrightarrow{g} & Z = \mathbb{C} \\ \text{id}_{\mathbb{C}} \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathbb{C} & \xrightarrow[\text{holomorph}]{\psi \circ g \circ \text{id}_{\mathbb{C}}^{-1}} & B_1(0) \end{array}$$

$$g: X \rightarrow Z \text{ holomorph} \Rightarrow$$

$$\psi \circ g \circ \text{id}_{\mathbb{C}}^{-1}: \mathbb{C} \rightarrow B_1(0) \text{ holomorph.}$$

Liouville $\Rightarrow \psi \circ g \circ \text{id}_{\mathbb{C}}^{-1} = \psi \circ g$ ist
konstant $\Rightarrow g$ ist nicht bijektiv.

Man kann zeigen, dass Z biholomorph zu der
kanonischen Riemannsche-Fläche-Struktur
auf $B_1(0)$ ist.