

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum der endlichen Dimension.

Man betrachte die folgende Relation auf $V \setminus \{0\}$:

$$v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ s.d. } v = \lambda w$$

$$\iff \text{Span}(v) = \text{Span}(w).$$

Das ist eine Äquivalenzrelation auf $V \setminus \{0\}$.

Def Der Quotientenraum $(V \setminus \{0\})/\sim$ heißt der PROJEKTIVE RAUM von V und wird mit $\mathbb{P}(V)$ notiert.

Def $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) := \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$ STANDARD n -DIMENSIONALER PROJEKTIVER RAUM.

Notation Wenn $v = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, dann
 $[v] = [x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$
homogeneous coordinates

Beispiel $\mathbb{P}^2(\mathbb{Q}) = \mathbb{P}(\mathbb{Q}^3)$
 $[1:0:0] = [(1,0,0)]$
 $[2:0:0] = [(2,0,0)]$
 $\Rightarrow [1:0:0] = [2:0:0]$
 $[\frac{1}{3}:1:-5] = [1:3:-15] = [2:6:-30] = [\frac{1}{15}:\frac{1}{5}:-1]$
 $[0:0:0]$ existiert nicht! $\mathbb{P}^2(\mathbb{Q}) = \frac{\mathbb{Q}^3 - \{0\}}{\sim}$

Beispiel (projektive Gerade) $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \frac{\mathbb{K}^2 \setminus \{0\}}{\sim}$

$$[x_0 : x_1]$$

$$x_0 \neq 0 \text{ oder } x_1 \neq 0$$

$$(x_0, x_1) \neq (0, 0)$$

$$[\lambda x_0 : \lambda x_1] = [x_0 : x_1] \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}^*$$

$$U_0 = \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \mid x_0 \neq 0\}$$

$$U_1 = \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \mid x_1 \neq 0\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = U_0 \cup U_1$$

$$U_0 \cap U_1 = \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \mid x_0 \neq 0 \text{ und } x_1 \neq 0\}$$

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \setminus U_0 = \{[0 : x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \mid x_1 \neq 0\} = \{[0 : 1]\}$$

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \setminus U_1 = \{[1 : 0]\}.$$

Was ist U_0 ?

$$\varphi_0: U_0 \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$[x_0: x_1] \mapsto \frac{x_1}{x_0}$$

$$\begin{aligned} [1:2] &\mapsto \frac{1}{2} \\ \parallel & \\ [3:6] &\mapsto \frac{3}{6} \end{aligned}$$

φ_0 ist wohldefiniert: der Quotient $\frac{x_1}{x_0}$ ist problemlos,
weil $x_0 \neq 0$, da $[x_0: x_1] \in U_0$.

$$\lambda \in \mathbb{K}^* \quad [\lambda x_0: \lambda x_1] \mapsto \frac{\lambda x_1}{\lambda x_0} = \frac{x_1}{x_0}$$

$$[x_0: x_1] \mapsto \frac{x_1}{x_0}$$

$\varphi_0: U_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ ist bijektiv: das Inverse ist

$$j_0: \mathbb{K} \longrightarrow U_0$$

$$z \mapsto [1: z]$$

$$\varphi_0 \circ j_0 = \text{id}_{\mathbb{K}} : (\varphi_0 \circ j_0)(z) = \varphi_0([1:z]) = \frac{z}{1} = z$$

$$j_0 \circ \varphi_0 = \text{id}_{U_0} : (j_0 \circ \varphi_0)([x_0:x_1]) = j_0\left(\frac{x_1}{x_0}\right) = [1:\frac{x_1}{x_0}] =$$

$$\stackrel{x_0 \neq 0}{=} [1 \cdot x_0 : \frac{x_1}{x_0} \cdot x_0] = [x_0:x_1].$$

$$\varphi_1: U_1 \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$[x_0:x_1] \mapsto \frac{x_0}{x_1}$$

$$j_1: \mathbb{K} \longrightarrow U_1$$

$$z \mapsto [z:1]$$

$$[1:0] \in U_0 \quad \varphi_0([1:0]) = 0 \in \mathbb{K}$$

$$[1:2] \in U_0 \cap U_1 \quad \varphi_0([1:2]) = 2 \quad \varphi_1([1:2]) = \frac{1}{2}$$

$$[0:1] \in U_1 \quad \varphi_1([0:1]) = 0 \in \mathbb{K}$$

$$K = \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}$$

$$P_n = [1: n]$$

$$n \geq 1 \text{ ganz.}$$

$$P_n = [\frac{1}{n} : 1]$$

$$P_n \in U_0 \cap U_1$$

$$\varphi_0(P_n) = n$$

$$\varphi_1(P_n) = \frac{1}{n}$$

$$[0:1] \notin U_0 \quad \varphi_0([0:1]) \text{ existiert nicht}$$

$$\varphi_1([0:1]) = 0$$

$$\frac{1}{0} = \infty$$

Not rigorous: $n \rightarrow +\infty$

$$\varphi_0(P_n) \rightarrow \infty$$

$$\varphi_1(P_n) \rightarrow 0$$

$$P_n \rightarrow [0:1]$$

$\mathbb{K}$ Körper. $A \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K}) = \{A \text{ } (n+1) \times (n+1) \text{ Matrix, } \det A \neq 0\}$.

$$[A]: \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$$

$$[x] \longmapsto [Ax]$$

ist wohldefiniert.

$$\begin{aligned} x &\in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \\ Ax &\in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Bem $A, B \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$.

$$[A] = [B]: \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*: B = \lambda A.$$

$$\underline{\text{Def}} \text{PGL}_{n+1}(\mathbb{K}) := \{[A]: \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid A \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})\}$$

Bem + Homomorphismus Satz $\Rightarrow$

$$\text{GL}_{n+1} / \{\lambda \cdot \text{Id}_{n+1} \mid \lambda \in \mathbb{K}^*\} \cong \text{PGL}_{n+1}(\mathbb{K}) \text{ Gruppe!}$$

Beispiel Was ist $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$$

$$f = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$$

$$[x_0 : x_1] \mapsto \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = [ax_0 + bx_1 : cx_0 + dx_1]$$

Was ist f in der Karte (U_0, φ_0) ?

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ U_0 & & U_0 \\ \varphi_0 \downarrow & & \downarrow \varphi_0 \\ \mathbb{K} & \dashrightarrow & \mathbb{K} \end{array}$$

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \setminus U_0 = \{[0:1]\}$$

$$\begin{aligned} z &\mapsto \varphi_0(f(\varphi_0^{-1}(z))) = \varphi_0(f([1:z])) = \\ &= \varphi_0([a+bz : c+dz]) \\ &= \frac{c+dz}{a+bz} \end{aligned}$$

$$f = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}: \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$$

$$[x_0: x_1] \longmapsto [ax_0 + bx_1: cx_0 + dx_1]$$

$$U_0 \ni [1: z] \longmapsto [a + bz: c + dz]$$

$$[0: 1] \longmapsto [b: d]$$

In der Karte (U_0, φ_0) wird f :

$$\mathbb{K} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\}$$

$$z \in \mathbb{K} \longmapsto \begin{cases} \frac{c + dz}{a + bz} & \text{wenn } a + bz \neq 0 \\ \infty & \text{wenn } a + bz = 0 \end{cases}$$

$$\infty \longmapsto \begin{cases} \frac{d}{b} & \text{wenn } b \neq 0 \\ \infty & \text{wenn } b = 0 \end{cases}$$

$$U_0 = \{ [x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \mid x_0 \neq 0 \}$$

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \setminus U_0 = \{ [0 : 1] \}$$

$$\begin{aligned} & \{ f \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K}) \mid f([0 : 1]) = [0 : 1] \} = \\ & = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K}) \mid \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \} \end{aligned}$$

$$= \{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K}) \}$$

$$= \{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K}) \} = \mathrm{Aff}(\mathbb{K})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} : \mathbb{K} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\}$$

$$z \mapsto c + dz$$

$$\infty \mapsto \infty$$

"offline transformation"

$\mathbb{K}$ Körper $\Rightarrow \{f \in \text{PGL}_2(\mathbb{K}) \mid f([0:1]) = [0:1]\} \cong \text{Aff}(\mathbb{K})$

$$\text{inv} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} : \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$$

$$[x_0 : x_1] \mapsto [x_1 : x_0]$$

in der Karte $\bar{U}_0$ wird inv

$$\text{inv} \in \text{PGL}_2(\mathbb{K})$$

$$\mathbb{K} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\}$$

$$z \in \mathbb{K} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{z} & \text{wenn } z \neq 0 \\ \infty & \text{wenn } z = 0 \end{cases}$$

$$\infty \mapsto 0$$

Satz Die Gruppe $\text{PGL}_2(\mathbb{K})$ ist durch $\text{Aff}(\mathbb{K})$ und inv erzeugt.

BWS Sei $f = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{PGL}_2(\mathbb{K})$.

$$f(z) = \frac{c + dz}{a + bz}$$

Wenn $b=0$, $f \in \text{Aff}(\mathbb{K})$.

Wenn $b \neq 0$. O.B.d.A. $b=1$.

$$g \in \text{Aff}(\mathbb{K}) \quad g: z \mapsto (c - ad)z + d.$$

$$t \in \text{Aff}(\mathbb{K}) \quad t: z \mapsto z + a$$

$$g \circ \text{inv} \circ t = f:$$

$$(g \circ \text{inv} \circ t)(z) = (g \circ \text{inv})(z + a) = g\left(\frac{1}{z+a}\right) = (c - ad)\left(\frac{1}{z+a}\right) + d$$

$$= \frac{c - ad + d(z+a)}{z+a} = \frac{c + dz}{z+a} \stackrel{b=1}{=} f(z)$$

□