

Die Riemannsche Zahlenkugel ist die 2-dimensionale Sphäre S^2 mit der Riemannschen-Flächen-Struktur, die in der Vorlesung 10.2 beschrieben wurde:

$$S^2 = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + u^2 = 1\}$$

$$N = (0, 0, 1) \in S^2, \quad S = (0, 0, -1) \in S^2$$

$$\begin{aligned} \varphi: S^2 \setminus \{N\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y, u) &\longmapsto \frac{x+iy}{1-u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi: S^2 \setminus \{S\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y, u) &\longmapsto \frac{x-iy}{1+u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \setminus \{0\} &\xrightarrow{\psi \circ \varphi^{-1}} \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z &\longmapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ projektive Gerade

$$U_0 = \{ [z_0:z_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid z_0 \neq 0 \}$$

$$U_1 = \{ [z_0:z_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid z_1 \neq 0 \}$$

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus U_0 = \{ [0:1] \}$$

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus U_1 = \{ [1:0] \}$$

$$\begin{aligned} \varphi_0: U_0 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ [z_0:z_1] &\longmapsto \frac{z_1}{z_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_0^{-1}: \mathbb{C} &\longrightarrow U_0 \\ z &\longmapsto [1:z] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1: U_1 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ [z_0:z_1] &\longmapsto \frac{z_0}{z_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1^{-1}: \mathbb{C} &\longrightarrow U_1 \\ z &\longmapsto [z:1] \end{aligned}$$

$$\mathbb{C}^* \xrightarrow{\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}} \mathbb{C}^*$$

$$z \longmapsto \varphi_1(\varphi_0^{-1}(z)) = \varphi_1([1:z]) = \frac{1}{z}$$

Man identifiziert S^2 mit $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$:

$$S^2 \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

$$(x, y, u) \longmapsto [1-u : x+iy] = [x-iy : 1+u]$$

$\uparrow$ weil $(x+iy)(x-iy) = (1-u)(1+u)$
 $x^2 + y^2 + u^2 = 1$

$$N = (0, 0, 1) \longleftrightarrow [0 : 1]$$

$$S = (0, 0, -1) \longleftrightarrow [1 : 0]$$

$$S^2 \setminus \{N\} \longleftrightarrow \bar{U}_0$$

$$S^2 \setminus \{S\} \longleftrightarrow U_1$$

$$\left(\frac{2 \operatorname{Re}(\bar{z}_0 z_1)}{|z_0|^2 + |z_1|^2}, \frac{2 \operatorname{Im}(\bar{z}_0 z_1)}{|z_0|^2 + |z_1|^2}, \frac{|z_1|^2 - |z_0|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2} \right) \longleftrightarrow [z_0 : z_1]$$

Von jetzt ab:

$$S^2 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$[z_0:z_1] \mapsto \begin{cases} \frac{z_1}{z_0} & \text{wenn } z_0 \neq 0 \\ \infty & \text{wenn } z_0 = 0 \end{cases}$$

$$[1:z] \longleftarrow z \in \mathbb{C}$$

$$[0:1] \longleftarrow \infty$$

Def Eine GEBROCHEN LINEARE TRANSFORMATION oder MÖBIUSTRANSFORMATION ist eine Abbildung

$$[A]: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

$$[z_0:z_1] \longmapsto [az_0 + bz_1 : cz_0 + dz_1]$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$

$$ad - bc \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$$

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$z \in \mathbb{C} \longmapsto \begin{cases} \frac{c + dz}{a + bz} & \text{wenn } a + bz \neq 0 \\ \infty & \text{wenn } a + bz = 0 \end{cases}$$

$$\infty \longmapsto \begin{cases} \frac{d}{b} & \text{wenn } b \neq 0 \\ \infty & \text{wenn } b = 0 \end{cases}$$

Bem $\{\text{Möbiustransformationen}\} = \text{PGL}_2(\mathbb{C})$.

Satz Jede Möbiustransformation ist ein Biholomorphismus von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ nach $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

Bws Es genügt zu zeigen, dass jede Möbiustransformation holomorph ist.

$$f: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \quad f = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}: [z_0: z_1] \mapsto [az_0 + bz_1: cz_0 + dz_1]$$

$$\varphi_0(U_0 \cap f^{-1}(U_0)) \xrightarrow{\varphi_0 \circ f \circ \varphi_0^{-1}} \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \varphi_0(U_0 \cap f^{-1}(U_0)) &= \{z \in \mathbb{C} \mid f \circ \varphi_0^{-1}(z) \in U_0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid f \circ \varphi_0^{-1}(z) \neq [0:1]\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} \mid f([1:z]) \neq [0:1]\} = \{z \in \mathbb{C} \mid [a+bz: c+dz] \neq [0:1]\} = \{z \in \mathbb{C} \mid a+bz \neq 0\} \end{aligned}$$

Wenn $z \in \varphi_0(U_0 \cap f^{-1}(U_0))$:

$$\varphi_0 \circ \varphi_0^{-1}(z) = \varphi_0 \circ ([1:z]) = \varphi_0([a+bz:c+dz]) = \frac{c+dz}{a+bz} \text{ hol.}$$

• $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \xrightarrow{f} \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$
 $(U_0, \varphi_0) \quad (U_1, \varphi_1)$

$\varphi_0(U_0 \cap f^{-1}(U_1)) =$ offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.

$$\varphi_0(U_0 \cap f^{-1}(U_1)) \xrightarrow{\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}} \mathbb{C}$$

$$\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(z) = \varphi_1 \circ ([1:z]) = \varphi_1([a+bz:c+dz]) = \frac{a+bz}{c+dz}$$

- $\mathbb{P}'(\mathbb{C}) \xrightarrow{f} \mathbb{P}'(\mathbb{C})$

$$(U_1, \varphi_1)$$

$$(U_0, \varphi_0)$$

$$\varphi_1(U_1 \cap f^{-1}(U_0)) \xrightarrow{\varphi_0 \circ f \circ \varphi_1^{-1}} \mathbb{C}$$

$$\varphi_0 \circ f \circ \varphi_1^{-1}(z) = \varphi_0 \circ f([z:1]) = \varphi_0([az+b: cz+d]) = \frac{cz+d}{az+b}.$$

- (U_1, φ_1)

$$(U_1, \varphi_1)$$



Beispiele von Möbiustransformationen

- $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$z \longmapsto \lambda z$$

$$\infty \longmapsto \infty$$

- $\theta \in \mathbb{R}$ $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$z \longmapsto e^{i\theta} z$$

$$\infty \longmapsto \infty$$

Rotation

- $w \in \mathbb{C}$

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$z \longmapsto wz$$

$$\infty \longmapsto \infty$$

$$|w|e^{i\theta}$$

$$w \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix}$$

- $a \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \cup \{\infty\} &\longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ z &\longmapsto z + a \\ \infty &\longmapsto \infty \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

- $a, b \in \mathbb{C}$
 $a \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \cup \{\infty\} &\longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ z &\longmapsto az + b \\ \infty &\longmapsto \infty \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$\text{Aff}(\mathbb{C}) \leq \text{PGL}_2(\mathbb{C})$$

- $\text{inv}: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$z \in \mathbb{C}^* \longmapsto \frac{1}{z}$$

$$\infty \longmapsto 0$$

$$0 \longmapsto \infty$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{inv}: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \quad z \mapsto z^{-1}$$

$$\text{inv}(1) = 1$$

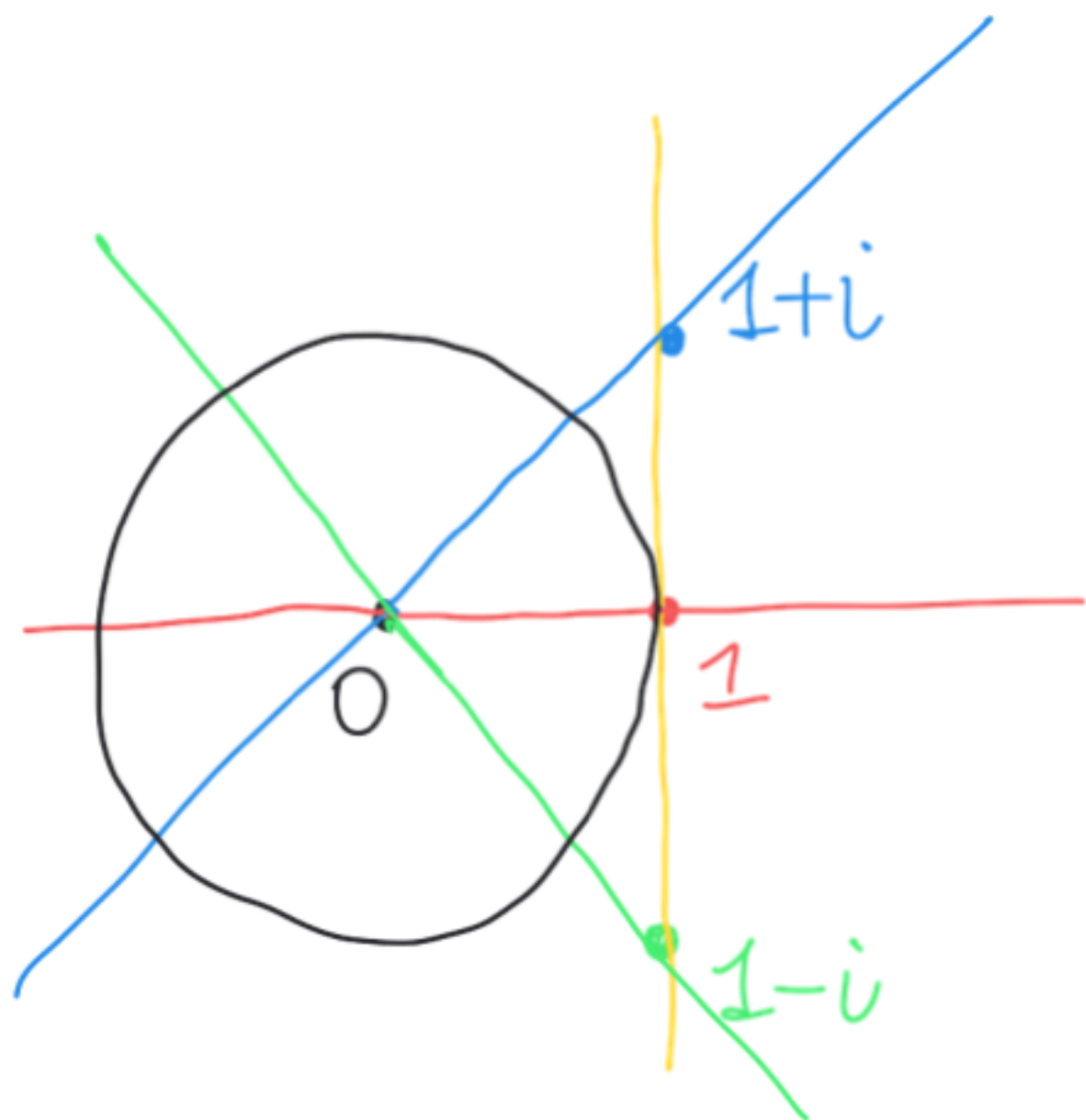
$$t \in \mathbb{R} \quad \text{inv}(1+ti) = \frac{1}{1+ti} = \frac{1-ti}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2}i$$

$$\text{inv}(1+i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

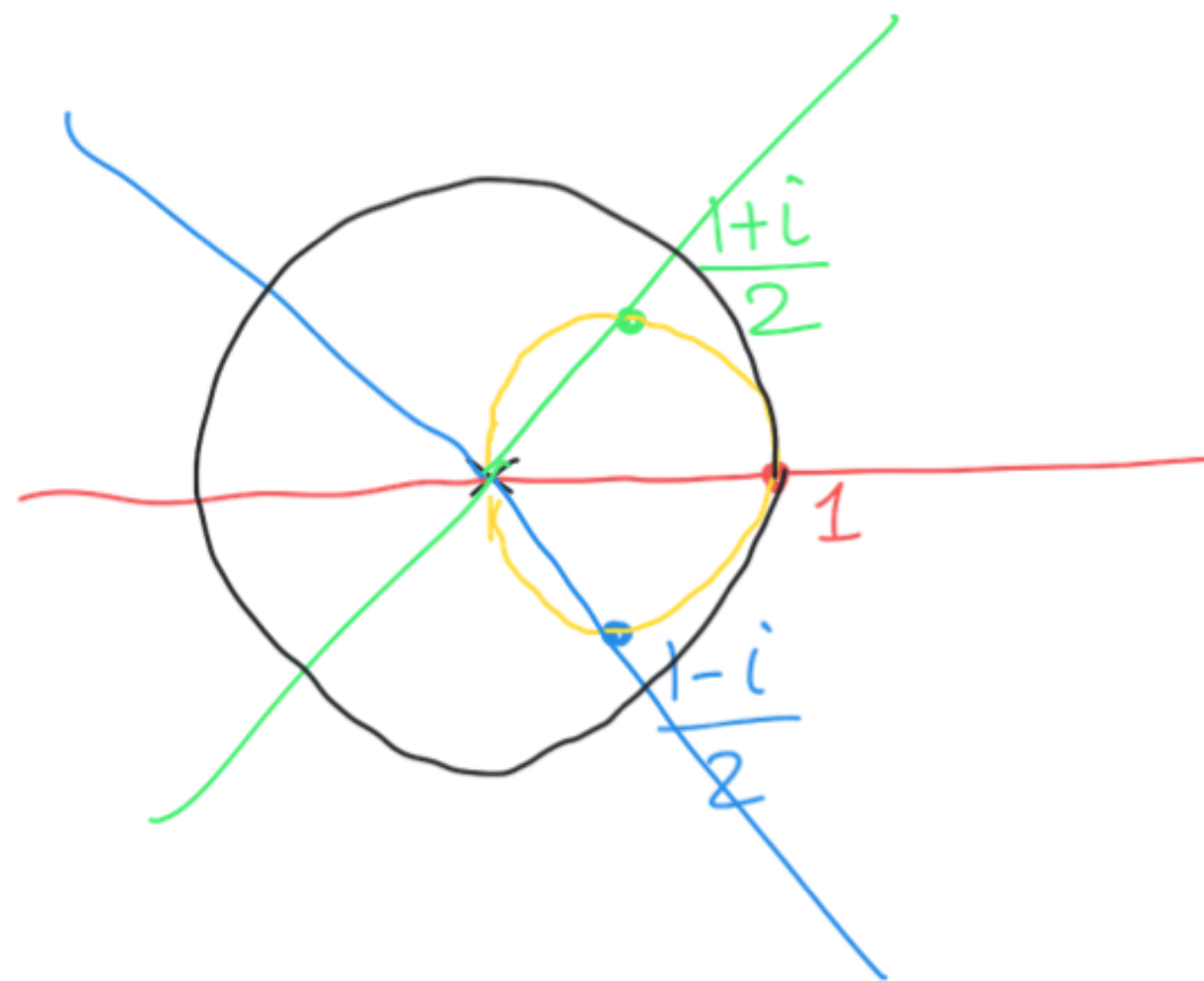
$$\text{inv}(1-i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$l = \{1+ti \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{inv}(l) = \left\{ \frac{1}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2}i \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x+iy \mid x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x^2+y^2-x=0 \right\}$$



inv
→



Def Eine MÖBIUSGERADE ist eine Teilmenge von $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ von der folgenden Art: entweder

- die Vereinigung von einer reellen Gerade und ∞ :

$$\{x+iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, ax+by+c=0\} \cup \{\infty\}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$

oder

- ein Kreis

$$\{x+iy \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x^2+y^2+ax+by+c=0\}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Satz $f: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ Möbiustransformation
 $L \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ Möbiusgerade
 $\Rightarrow f(L)$ ist eine Möbiusgerade.

Beispiel Hausaufgabe 11.5 iii

Beweis • Wenn $f \in \text{Aff}(\mathbb{C})$, dann gilt $f(\infty) = \infty$ und $f|_{\mathbb{C}}$ ist
eine Ähnlichkeit von $\mathbb{R}^2$ (erinnern Sie Hausaufgabe 1.4)

Deshalb $f(\text{reelle Gerade}) = \text{reelle Gerade}$

$f(\text{Kreis}) = \text{Kreis}$.

• Wenn $f = \text{inv}: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$z \in \mathbb{C}^* \mapsto z^{-1}$$

$$0 \mapsto \infty$$

$$\infty \mapsto 0$$

$$L = \{ x+iy \mid x, y \in \mathbb{R}, \quad A(x^2+y^2) + Bx + Cy = D \}$$

mit $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ und $(A, B, C, D) \neq (0, 0, 0, 0)$

Seien $u, v \in \mathbb{R}$ mit $\text{inv}(x+iy) = u+iv$. Dann $x = \frac{u}{u^2+v^2}$, $y = \frac{-v}{u^2+v^2}$

$$u+iv \in \text{inv}(L) \Leftrightarrow A \left(\left(\frac{u}{u^2+v^2} \right)^2 + \left(\frac{-v}{u^2+v^2} \right)^2 \right) + B \frac{u}{u^2+v^2} + C \frac{-v}{u^2+v^2} = D$$

$$\Leftrightarrow A + Bu - Cv = D(u^2+v^2)$$

$$\text{inv}(L) = \{ u+iv \mid D(u^2+v^2) - Bu + Cv - A = 0 \}$$

ist eine Möbiustrasse.

• $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ ist erzeugt von $\text{Aff}(\mathbb{C})$ und inv . $\square$