

Hier betrachtet man die Geometrie von holomorphen Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen.

Es gibt viele Eigenschaften, die den Eigenschaften von holomorphen Abbildungen zwischen offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ ähneln.

Lemma 1 X top. Raum, $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ offen Überdeckung von X .
Sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann:

i) A ist offen in $X \iff \forall \lambda \in \Lambda \ A \cap U_\lambda$ ist offen in U_λ

ii) A ist abgeschlossen in $X \iff \forall \lambda \in \Lambda \ A \cap U_\lambda$ ist abgeschlossen in U_λ

Bws i) $\Rightarrow$) Teilraumtopologie auf U_λ .

$\Leftarrow$) $A \cap U_\lambda$ offen in U_λ , U_λ offen in $X \Rightarrow A \cap U_\lambda$ offen in X

$$A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \cap U_\lambda).$$

ii) Benutze i) mit $X \setminus A$. $\square$

Bem X, Y top. Räume, $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ offen überdeck. von X , $f: X \rightarrow Y$. Dann:
 f stetig $\iff \forall \lambda \in \Lambda, f|_{U_\lambda}: U_\lambda \rightarrow Y$ stetig.

Lemma 2 X, Y Riemannsche Flächen, $f: X \rightarrow Y$ holomorph.

Sei $y \in Y$ fest. $\Rightarrow$ Die Menge

$A_y = \{x \in X \mid \exists \text{ offene Umgebung } V \text{ von } x \text{ in } X \text{ mit } f(V) = \{y\}\}$

ist offen und abgeschlossen in X .

Idee: vergleiche $2 \Rightarrow 3$ im Satz „Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung“ in der Vorlesung 03.3.

BWS Sei (W, ψ) eine Karte von Y mit $y \in W$.

Sei $\mathcal{A} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ ein Atlas von X .

$\lambda \in \Lambda$ $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap f^{-1}(W) \cap A_y)$ offen und abgeschlossen

in $\varphi_\lambda(U_\lambda)$:

$$\begin{array}{ccc}
 U_\lambda \cap f^{-1}(W) & \xrightarrow{f} & W \\
 \varphi_\lambda \downarrow & & \downarrow \psi \\
 \varphi_\lambda(U_\lambda \cap f^{-1}(W)) & \xrightarrow{g} & \psi(W)
 \end{array}$$

$$A_y \subseteq f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(W)$$

$\uparrow$
 $y \in W$

$$\begin{aligned}
 \varphi_\lambda(U_\lambda \cap f^{-1}(W) \cap A_y) &= \{z \in \varphi_\lambda(U_\lambda \cap f^{-1}(W)) \mid \varphi_\lambda^{-1}(z) \in A_y\} = \\
 &= \{z \in \varphi_\lambda(U_\lambda \cap f^{-1}(W)) \mid \exists \text{ offene Umgebung } V' \text{ von } z \text{ in } \varphi_\lambda(U_\lambda \cap f^{-1}(W)) \} \\
 &\quad \text{mit } g(V') = \{\psi(y)\}
 \end{aligned}$$

ist offen und abgeschlossen in $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap f^{-1}(W))$.
 $\Rightarrow U_\lambda \cap f^{-1}(W) \cap A_y = U_\lambda \cap A_y$ offen und in U_λ abgeschl.

Lemma 1 $\Rightarrow A_y$ offen und abgeschl. in X . $\square$

Lemma 3 X, Y Riemannsche Flächen, $f: X \rightarrow Y$ holomorph.
Seien $x \in X$, $y \in Y$, und A_y definiert wie in Lemma 2.

Dann:

$x \in A_y \iff x \in f^{-1}(y)$ und x ist ein nicht isolierter
Punkt von $f^{-1}(y)$.
($f(x) = y$)

Satz X, Y Riemannsche Flächen, $f: X \rightarrow Y$ holomorph.
 X zusammenhängend. Dann die folgenden Aussagen sind äquivalent.

- 1) $\forall V \subseteq X$ offen, $f(V)$ ist offen in Y .
- 2) $f(X)$ ist offen in Y
- 3) f ist nicht konstant
- 4) $\forall y \in Y$, die in Lemma 2 definierte Menge A_y ist leer
- 5) $\forall y \in Y$, $f^{-1}(y)$ ist diskret
- 6) $\forall V \subseteq X$ offen, $f|_V$ ist nicht konstant

Beweis $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$: offensichtlich

$4 \Leftrightarrow 5$: Lemma 3

$3 \Rightarrow 4$: $\exists y \in Y$ s.d. $A_y \neq \emptyset$. X zus. $\xRightarrow{\text{Lemma 2}} A_y = X \Rightarrow \forall x \in X, f(x) = y$.

$4 \Rightarrow 6$: offensichtlich.

$6 \Rightarrow 1$: Gebietstreue $\square$

Satz X kompakte zusammenhängende Riemannsche Fläche.

$f: X \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktion

$\Rightarrow f$ ist konstant.

Beispiel Hausaufgabe 11.4: $S^2 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ kompakt, zusammenhängend

Beweis $|f|: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. X kompakt $\Rightarrow \exists x_0 \in X$ s.d.

$\forall x \in X \quad |f(x)| \leq |f(x_0)|.$

Sei (U, φ) eine Karte von X mit $x_0 \in U$. $z_0 = \varphi(x_0)$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \uparrow & & \\ U & & \end{array}$$

$$\varphi \downarrow$$

$$\varphi(U) \subseteq \mathbb{C}$$

$$g = f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{C} \text{ hol.}$$

$$\forall z \in \varphi(U) \quad |g(z)| \leq |g(z_0)|$$

$$B_\varepsilon(z_0) \subseteq \varphi(U) \quad \text{Maximumprinzip} \Rightarrow$$

$$g|_{B_\varepsilon(z_0)} \text{ konstant: } \forall z \in B_\varepsilon(z_0) \quad g(z) = g(z_0)$$

$$\forall x \in \varphi^{-1}(B_\varepsilon(z_0)) \quad f(x) = f(x_0) \xRightarrow[\text{Satz}]{\text{vorhiger}} f \text{ konstant. } \square$$

Satz X, Y zusammenhängende Riemannsche Flächen.
 $f: X \rightarrow Y$ holomorph, nicht konstant
 X kompakt $\Rightarrow f$ ist surjektiv, d.h. $f(X) = Y$
und Y ist kompakt

Bem T Hausdorffscher top. Raum
 $S \subseteq T$ kompakter Teilraum
 $\Rightarrow S$ ist abgeschlossen in T

Bws f nicht-konstant $\Rightarrow f(X)$ ist offen in Y .
 $f(X)$ kompakt, Y Hausdorffsch $\Rightarrow f(X)$ abgeschlossen in Y
 Y zusammenhängend $\Rightarrow f(X) = Y$. $\square$

Satz X, Y kompakte zusammenhängende Riemannsche Flächen.
 $f: X \rightarrow Y$ holomorph, nicht konstant
 $\Rightarrow \forall y \in Y \quad f^{-1}(y)$ ist endlich und nicht leer.

Bem $f^{-1}(y)$ diskret
 X kompakt + $f^{-1}(y)$ abgeschlossen in $X \Rightarrow f^{-1}(y)$ kompakt
Hausaufgabe 10.5x $\Rightarrow f^{-1}(y)$ endlich. $\square$

Beispiel $d \in \mathbb{Z}, d \geq 1$

$$f: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$z \in \mathbb{C} \longmapsto z^d$$

$$\infty \longmapsto \infty$$

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad |f^{-1}(z)| = d$$

$$f^{-1}(0) = \{0\}$$

$$f^{-1}(\infty) = \{\infty\}$$

$$f: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

$$[z_0:z_1] \longmapsto [z_0^d:z_1^d]$$

$U \subseteq \mathbb{C}$ offen

$$M(U) := \left\{ f: U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \right\} \left| \begin{array}{l} f^{-1}(\infty) \text{ abgeschlossen in } U \\ f^{-1}(\infty) \text{ diskret} \\ \forall z \in f^{-1}(\infty), f \text{ hat einen Pol in } z \\ f|_{U \setminus f^{-1}(\infty)} \text{ holomorph.} \end{array} \right.$$

$$M(U) = \left\{ f: U \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \right\} \left\{ \begin{array}{l} f \text{ holomorph} \\ f^{-1}(\infty) \text{ diskret} \end{array} \right\}$$

Def X Riemannsche Fläche

$$\mathcal{O}(X) := \{ f: X \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph} \}$$

$$\mathcal{M}(X) := \{ f: X \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \text{ holomorph} \mid f^{-1}(\infty) \text{ diskret} \}$$

$$\mathcal{O}(X) \hookrightarrow \mathcal{M}(X) \quad \text{Ringe}$$

Satz X zusammenhängende Riemannsche Fläche $\Rightarrow$

· $\mathcal{O}(X)$ Integritätsring

· $\mathcal{M}(X)$ Körper.