FUNKTIONENTHEORIE

Freie Universität Berlin, Institut für Mathematik
Sommersemester 2020

Andrea Petracci
andrea.petracci [at] fu-berlin [dot] de
`https://userpage.fu-berlin.de/petracci/2020Complex`

Aktualisiert am 14. Juli 2020

Dieses Dokument enthält die Zusammenfassung der Vorlesungen und die Aufgabenblätter für den Kurs "Funktionentheorie", der von Andrea Petracci im Sommersemester 2020 an der Freien Universität Berlin gehalten wird.

Einleitender Lehrplan

Die Voraussetzungen sind Linear Algebra I+II und Analysis I+II. Die Studenten müssen den Begriff von Gruppe und von Topologischem Raum kennen. Die folgenden Themata werden angegangen werden.

(1) Komplexe Zahlen, Exponentialfunktion, Komplexer Logarithmus. Holomorphe oder komplex differenziarbare Funktionen (in einer Variablen), Cauchy–Riemannsche partielle Differentialgleichungen. Formale Potenzreihen, konvergente Potenzreihen, analytische Funktionen einer Variablen. [Car95, I], [Lan93, I,II], [FB06, I]
(2) Einführung in die Homotopietheorie: homotope Abbildungen, Homotopieäquivalenz, Deformationsretrakte, Homotopie von Wegen, Fundamentalgruppe. [Man15, §10-12], [Hat02, §1], [Jä05, §5, 9.5]
(3) 1-Formen auf offenen Teilmengen vom $\mathbb{R}^n$: Integration, geschlossene und exakte Formen, eine elementare Formulierung des Satzes von de Rham. [for]
(4) 1-Formen auf offenen Teilmengen vom $\mathbb{C}$, Lemma von Goursat, Cauchyscher Integralsatz. Jede holomorphe Funktion ist analytisch. Cauchysche Ungleichungen. Satz von Liouville. Laurentzerlegung und Singularitäten analytischer Funktionen. Residuensatz, Satz von Rouché und Berechnung von Integralen mit Hilfe des Residuensatzes. [Car95, II,III], [Lan93, III,VI], [FB06, II-III]

Die Grundlagen von Topologie können in [Jä05, §1] oder in [Man15, §1-4, 6] gefunden werden. Für (1) und (4) werde ich vorwiegend den Büchern [Car95, Lan93, FB06] folgen, aber diese Themata können in jedem Buch über Funktionentheorie (z.B. [RKG13, BN10, FL80, FB09, Pri03, Nee97, Nee01, Weg12, Jä77]) gefunden werden; es gibt eine ältere Version von [Car95] auf Französisch: [Car61]. Das wunderbare Buch [Hat02] kann von `https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html` frei heruntergeladen werden. Das Thema (3) ist irgendwie zwischen Analysis und Differentialgeometrie; leider kenne ich keine sorgfältige Referenz, weil alle Bücher von Differentialgeometrie zu schwierig sind; aber ich habe das Skript [for] geschrieben, das von `https://userpage.fu-berlin.de/petracci/2019Complex/Forms.pdf` heruntergeladen werden kann.

Vorlesungen

(1) **20. April 2020.** Einführung in den Kurs. Komplexe Zahlen, Exponentialfunktion, Polardarstellung, complexer Logarithmus, Wurzeln einer komplexen Zahl, Wurzeln der identischen Abbildung [FB06, I.1] [Lan93, II.1-4]. Topologische Räume, metrische Räume, normierte Räume, Hausdorffräume, Zusammenhang, offene Überdeckungen, Kompaktheit, Folgen in metrischen Räumen, Funktionenfolgen und Funktionenreihen. [Jä05, §1, §2.1-4] [Man15, §3, 4.1-4, 6.2-4] [FB06, I.2-3].

(2) **27. April 2020.** Holomorphe Funktionen, Cauchy–Riemannsche Differentialgleichungen, biholomorphie Abbildungen [FB06, I.4-5] [Car95, II.2.1-2] [Lan93, I, §5-6]. Formale Potenzreihen [Car95, I.1.1-3,5-6] [Lan93, II, §1]. Konvergente Potenzreihen [Car95, I.2.1-3] [FB06, III.2] [Lan93, II.2].

(3) **4. Mai 2020.** Konvergente Potenzreihen, Analytische Funktionen und Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung [Car95, I.2.4,7,8, I.4.1-4] [FB06, III.2-3] [Lan93, II.3-5]. Wegen in topologischen Räumen [Man15, 4.1] [Hat02, p.25–26]. Homotope Abbildungen und homotopieäquivalenzen [Hat02, p.1–4] [Man15, 10.2-3] [Jä05, 5.1-3].

(4) **11. Mai 2020.** Fundamentalgruppe [Man15, 11.1-3] [Hat02, p.21-28]. Umlaufzahl. 1-Formen auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ [for].

(5) **18. Mai 2020.** 1-Formen auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$: zweiter Teil [for]. 1-Formen auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{C}$ [Car95, II.1, II.2.1-3] [FB06, II.1-2]. Lemma von Goursat [Car95, II.2.4] [FB06, II.2.5].

(6) **25. Mai 2020.** Cauchyische Integralformel, Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen, Satz von Morera, Cauchyische Abschätzung für die Taylorkoeffizienten, Satz von Liouville, Mittelwerteigenschaft, Maximumprinzip [Car95, II.2.5-7, III.1-2] [FB06, II].

(7) **8. Juni 2020.** Laurententwicklung holomorpher Funktionen auf Kreisringen; Isolierte Singularitäten: hebbar, Pol, wesentlich; Meromorphe funktionen [Car95, III.4] [FB06, III.4-5].

(8) **15. Juni 2020.** Residuensatz; berechnung von Integral mit Hilfe des Residuensatzes; Satz von Rouché [Car95, 5.2-4, 6] [FB06, III.6-7].

(9) **22. Juni 2020.** Satz von der Umkehrabbildung für holomorphe Funktionen, lokale Biholomorphismen, lokales Verhalten der nicht konstanten holomorphen Funktionen, Gebietstreue (Satz von der offenen Abbildung) [Car95, VI.1.1-4] [FB06, III.3]. Wann ist eine holomorphe Funktion die Ableitung einer holomorphen Funktion? Wann hat eine holomorphe Funktion einen Logarithmus? Wann hat eine holomorphe Funktion eine Wurzel?

(10) **29. Juni 2020.** Topologische Mannigfaltigkeiten [Man15, 7.4]. Riemannsche Flächen, Riemannsche Zahlenkugel, holomorphe Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen [Car95, III.5.1, VI.4.1-3] [Fre11, I.1]. Projektive Räume, die Karte auf der projektiven Geraden, Projektivitäten [FFP16, 1.2].

(11) **6. Juli 2020.** Möbiustransformationen [Lan93, VII.5]. Eigenschaften holomorpher Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen [Fre11, I.1] [Car95, VI.4.4-5]. Geschlecht einer kompakten zusammenhängenden Riemannschen Fläche.

Literatur

[BN10] Joseph Bak and Donald J. Newman. *Complex analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, third edition, 2010.

[Car61] Henri Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Avec le concours de Reiji Takahashi. Enseignement des Sciences. Hermann, Paris, 1961.

[Car95] Henri Cartan. *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables*. Dover Publications, Inc., New York, 1995. Translated from the French, Reprint of the 1973 edition.

[FB06] Eberhard Freitag and Rolf Busam. *Funktionentheorie 1*. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Vierte, korrigierte und erweiterte Auflage.

[FB09] Eberhard Freitag and Rolf Busam. *Complex analysis*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2009.

[FFP16] Elisabetta Fortuna, Roberto Frigerio, and Rita Pardini. *Projective geometry*, volume 104 of *Unitext*. Springer, [Cham], italian edition, 2016. Solved problems and theory review, La Matematica per il 3+2.

[FL80] Wolfgang Fischer and Ingo Lieb. *Funktionentheorie*, volume 47 of *Vieweg Studium: Aufbaukurs Mathematik*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1980. Aufbaukurs Mathematik.

[for] 1-forms on open subsets of $\mathbb{R}^n$. `https://userpage.fu-berlin.de/petracci/2019Complex/Forms.pdf`.

[Fre11] Eberhard Freitag. *Complex analysis. 2*. Universitext. Springer, Heidelberg, 2011. Riemann surfaces, several complex variables, abelian functions, higher modular functions.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Jä77] Klaus Jänich. *Einführung in die Funktionentheorie*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. Hochschultext.

[Jä05] Klaus Jänich. *Topologie*. Springer-Verlag, Berlin, achte Auflage edition, 2005.

[Lan93] Serge Lang. *Complex analysis*, volume 103 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 1993.

[Man15] Marco Manetti. *Topology*, volume 91 of *Unitext*. Springer, Cham, 2015. Translated from the 2014 Italian edition by Simon G. Chiossi, La Matematica per il 3+2.

[Nee97] Tristan Needham. *Visual complex analysis*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1997.

[Nee01] Tristan Needham. *Anschauliche Funktionentheorie*. R. Oldenbourg Verlag, Munich, 2001. Translated from the 1997 English edition by Norbert Herrmann and Ina Paschen.

[Pri03] H. A. Priestley. *Introduction to complex analysis*. Oxford University Press, Oxford, second edition, 2003.

[RKG13] Rubí E. Rodríguez, Irwin Kra, and Jane P. Gilman. *Complex analysis*, volume 245 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013. In the spirit of Lipman Bers.

[Weg12] Elias Wegert. *Visual complex functions*. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2012. An introduction with phase portraits.

Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sommersemester 2020

Andrea Petracci
andrea.petracci [at] fu-berlin [dot] de
`https://userpage.fu-berlin.de/petracci/2020Complex`

Funktionentheorie — 1. Aufgabenblatt
abzugeben am 27. April 2020 um 10 Uhr

Aufgabe 1.1. a) Man stelle die komplexen Zahlen $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $1+i$, $\sqrt{3}+i$ in der Polarkoordinatendarstellung dar.

b) Man stelle die komplexen Zahlen $(1+i)/(1-i)$, $(1+i)^{100}$ in der Form $x+iy$ mit $x,y\in\mathbb{R}$ dar.

c) Seien $\zeta = e^{2\pi i/5}$ und $\alpha = \zeta+\bar{\zeta}$. Man zeige die Gleichungen $\alpha = (\sqrt{5}-1)/2$ und $\cos(2\pi/5) = (\sqrt{5}-1)/4$.

Aufgabe 1.2. Man zeichne die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ und sage, ob sie offen, abgeschlossen, beschränkt, zusammenhängend, kompakt sind.

- $A = \{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$
- $B = \{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$
- $C = \{z\in\mathbb{C} \mid 0<|z|<1\}$
- $D = \{z\in\mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| < 1\}$
- $E = \{z\in\mathbb{C} \mid |z-i|<1\}$
- $F = \{z\in\mathbb{C} \mid |z-1| = |z+1|\}$
- $G = \{z\in\mathbb{C} \mid |z-i| \geq |z-1|\}$
- $H = \{z\in\mathbb{C} \mid |z|^3 \geq |z|\}$
- $I = \{z\in\mathbb{C} \mid e^z = i\}$
- $J = \left\{z\in\mathbb{C}\smallsetminus\{-1\} \;\middle|\; \left|\frac{1}{z+1}\right| < 1\right\}$

Aufgabe 1.3. a) Sei (X,d) ein metrische Raum. Man zeige, dass für jedes $x_0\in X$ und $r>0$ die Kugel $B_r(x_0)$ eine offene Teilmenge von X ist.

b) Seien (X,d_X) und (Y,d_Y) zwei metrische Räume und sei $f\colon X\to Y$ eine Abbildung. Sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von positiven reellen Zahlen mit $\inf_n r_n = 0$. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist stetig,
(ii) $\forall x_0\in X, \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 : \forall x\in B_\delta(x_0), f(x)\in B_\varepsilon(f(x_0))$,
(iii) $\forall x_0\in X, \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 : B_\delta(x_0)\subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$,
(iv) $\forall x_0\in X, \forall n\in\mathbb{N}, \exists\delta>0 : B_\delta(x_0)\subseteq f^{-1}(B_{r_n}(f(x_0)))$,
(v) $\forall x_0\in X, \forall\varepsilon>0$, ist die Menge $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$ offen in X,
(vi) $\forall U\subseteq Y$ offen, ist $f^{-1}(U)$ offen in X,
(vii) $\forall C\subseteq Y$ abgeschlossen, ist $f^{-1}(C)$ abgeschlossen in X.

Aufgabe 1.4. (a) Der complexe Körper $\mathbb{C}$ ist ein zweidimensionaler reeller Vektorraum mit Basis $\{1,i\}$. Sei $\alpha = a+ib\in\mathbb{C}$ mit $a,b\in\mathbb{R}$. Die Multiplikationsabbildung $m_\alpha\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto\alpha\cdot z$ ist ein $\mathbb{R}$-linearer Endomorphismus von $\mathbb{C}$. Man bestimme die zu m_α und zu der Basis $\{1,i\}$ gehörige Abbildungsmatrix (Darstellungsmatrix). Was ist ihre Determinante; lässt sich diese direkt durch α ausdrücken? Und ihre Spur?

(b) Sei $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt ausgestattet. Sei $A\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ (d.h. A ist eine reelle 2×2-Matrix mit $\det A\neq 0$) und sei $L_A\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ die zu A gehörige Linearabbildung: $\forall v\in\mathbb{R}^2,\ L_A(v) = Av$. Man zeige, dass die folgenden Sätze äquivalent sind.

(i) L_A erhält die Winkel, d.h. für alle $v_1,v_2\in\mathbb{R}^2\smallsetminus\{0\}$ ist der nicht-orientierte Winkel zwischen Av_1 und Av_2 gleich zum nicht-orientierten Winkel zwischen v_1 und v_2.
(ii) L_A erhält die Senkrechtigkeit (Orthogonlität), d.h., jedes Mal wenn $v_1\in\mathbb{R}^2$ orthogonal zu $v_2\in\mathbb{R}^2$ ist, dann ist Av_1 orthogonal zu Av_2.
(iii) Ae_1 ist orthogonal zu Ae_2 und $A(e_1-e_2)$ ist orthogonal zu $A(e_1+e_2)$, wobei $\{e_1,e_2\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ ist.
(iv) Es gibt $a,b\in\mathbb{R}$ mit $a^2+b^2\neq 0$, für die

$$\text{entweder}\qquad A = \begin{pmatrix} a & -b\\ b & a\end{pmatrix}\qquad\text{oder}\qquad A = \begin{pmatrix} a & b\\ b & -a\end{pmatrix}\qquad\text{gilt.}$$

(c) Indem man $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ mit der Basis $\{1,i\}$ gleichsetzt, zeige man, dass für jede $\alpha\in\mathbb{C}\smallsetminus\{0\}$ die Multiplikationsabbildung m_α die Winkel erhält.

Aufgabe 1.5. Sei $A := \left\{\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{Z}, n\geq 1\right\}\subseteq\mathbb{R}$. Man entscheide, ob jeder von den folgenden Sätze richtig oder falsch ist, und gebe eine knappe Erklärung.

a) A ist abgeschlossen in $[0,1]$.
b) A ist abgeschlossen in $(0,1]$.
c) A ist offen in $A \cup \{0\}$.
d) A ist abgeschlossen in $A \cup \{0\}$.
e) $A \cup \{0\}$ ist kompakt.
f) A ist diskret.
g) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ ist kompakt.
h) Die Abbildung $f \colon A \cup \{0\} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{wenn } x = \frac{1}{n} \text{ mit } n \in \mathbb{Z},\ n \geq 1,\ n \text{ gerade,} \\ \sin x & \text{wenn } x = \frac{1}{n} \text{ mit } n \in \mathbb{Z},\ n \geq 1,\ n \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{wenn } x = 0. \end{cases}$$

definiert ist, ist stetig.
i) Sei $B = f(A) \subseteq \mathbb{R}$, wobei f die oben erwähnte Abbildung ist. Die Abbildung $g \colon A \cup \{0\} \to B$, für die $\forall x \in A \cup \{0\},\ g(x) = f(x)$ gilt, ist stetig. [Hier hätte B durch $B = f(A \cup \{0\})$ definiert werden können.]
j) Die Abbildung $h \colon A \to \mathbb{R}$, die durch

$$h(x) = \begin{cases} n^8 & \text{wenn } x = \frac{1}{n} \text{ mit } n \in \mathbb{Z},\ n \geq 1,\ n \text{ gerade,} \\ -x^7 & \text{wenn } x = \frac{1}{n} \text{ mit } n \in \mathbb{Z},\ n \geq 1,\ n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

definiert ist, ist stetig.

Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sommersemester 2020

Andrea Petracci
andrea.petracci [at] fu-berlin [dot] de
`https://userpage.fu-berlin.de/petracci/2020Complex`

Funktionentheorie — 2. Aufgabenblatt
abzugeben am 4. Mai 2020 um 10 Uhr

Aufgabe 2.1. Für jede von den folgenden Abbilundungen $f\colon \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ bestimme man die größte Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}$, sodass f in jedem Punkt von A holomorph ist, und man bestimme die Ableitung von f in jedem Punkt von A.

a) e^z b) $x^2y + ixy^2$ c) $x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i$

d) $3\bar{z}$ e) $|z|^2 - z$

Aufgabe 2.2. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung.

a) Sei $V \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Wenn $f(U) \subseteq V$ gilt und $g\colon V \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung ist, zeige man, dass die Komposition $g \circ f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph ist, und man bestimme ihre Ableitung.

b) Wenn $g\colon U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine holomorphe Abbildung ist, zeige man, dass die Abbildung $\frac{f}{g}\colon U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{f(z)}{g(z)}$ holomorph ist und dass ihre Ableitung $\frac{f'g - fg'}{g^2}$ ist.

Aufgabe 2.3. Man betrachte die folgenden offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$:

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\} \quad \text{und} \quad V = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}.$$

a) Man konstruiere ausdrücklich eine holomorphe Abbildung $f\colon U \to \mathbb{C}$, für die $\forall z \in U,\ e^{f(z)} = z$ gilt.
b) Man konstruiere ausdrücklich eine holomorphe Abbildung $f\colon V \to \mathbb{C}$, für die $\forall z \in V,\ e^{f(z)} = z$ gilt.
c) Sei $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq 2$. Man konstruiere ausdrücklich eine holomorphe Abbildung $g\colon V \to \mathbb{C}$, für die $\forall z \in V,\ g(z)^n = z$ gilt.
d) Man zeige, dass es unendlich viele Abbildungen gibt, die b) erfüllen.

Aufgabe 2.4. a) Sei (F_n) die Fibonacci-Folge, d.h. die durch

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

definierte Folge natürlicher Zahlen. Man betrachte die Potenzreihe $g = \sum_{n\geq 0} F_{n+1} T^n \in \mathbb{C}[\![T]\!]$. Man berechne das multiplikative Inverse von g in $\mathbb{C}[\![T]\!]$.

b) Man zeige die Leibnizregel: für alle Potenzreihen $f, g \in \mathbb{C}[\![T]\!]$ gilt die Gleichung $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ in $\mathbb{C}[\![T]\!]$.

c) Man betrachte die folgenden Potenzreihen in $\mathbb{C}[\![T]\!]$:

$$\cos T := \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} T^{2n} \qquad \text{und} \qquad \sin T := \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} T^{2n+1}.$$

Man zeige, dass die Gleichung $(\cos T)^2 + (\sin T)^2 = 1$ in $\mathbb{C}[\![T]\!]$ gilt.

d) Seien $f, g, h \in \mathbb{C}[\![T]\!]$ drei Potenzreihen mit $gh = 1$. Man zeige die Gleichung $(fh)' = (f'g - fg')h^2$ in $\mathbb{C}[\![T]\!]$.

Aufgabe 2.5. Man berechne den Konvergenzradius jeder von den folgenden Potenzreihen.

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-i)^n}{n!} T^n$ b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (n^3 + 2^n) T^n$

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{n^n} T^n$ d) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^m c_n T^n$ für jedes $m \in \mathbb{N}$, in Bezug auf den Konvergenzradius R von $\displaystyle\sum_{n\geq 0} c_n T^n$

e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^{\log n} T^n$

Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sommersemester 2020

Andrea Petracci
andrea.petracci [at] fu-berlin [dot] de
`https://userpage.fu-berlin.de/petracci/2020Complex`

Funktionentheorie — 3. Aufgabenblatt
abzugeben am 11. Mai 2020 um 10 Uhr

Aufgabe 3.1.

a) Sei $a \in \mathbb{C}$ fest. Man betrachte die Abbildung $f \colon \mathbb{C} \smallsetminus \{a\} \to \mathbb{C}$, die durch $f(z) = \frac{1}{z-a}$ definiert ist. Für jedes $z_0 \in \mathbb{C} \smallsetminus \{a\}$ bestimme man ausdrücklich die Potenzreihenentwicklung von f in z_0 und man bestimme ihren Konvergenzradius. Man zeige, dass f analytisch ist.

b) Man betrachte die reelle Zahl $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ und die Abbildung $h \colon B_{1/\varphi}(0) \to \mathbb{C}$, die durch

$$\forall z \in B_{1/\varphi}(0), \qquad h(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$$

definiert ist. Man zeige, dass h analytisch ist, und man bestimme die Potenzreihenentwicklung von h in 0. [Hinweis: Betrachten Sie die Fibonacci-Folge (F_n), d.h. die durch

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

definierte Folge natürlicher Zahlen. Sie können annehmen, dass die Gleichung $\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$ gilt, d.h. Sie müssen diese nicht beweisen.]

c) Sei $\mathbb{N}^+ = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 1\} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Gibt es eine analytische Abbildung $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sodass $f(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$ und für jedes $n \in \mathbb{N}^+$ die Gleichung $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}$ gilt? Wenn ja, konstruieren Sie diese explizit. Wenn nein, beweisen Sie, dass diese nicht existieren kann.

Definition. Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge. Eine Abbildung $\varphi \colon A \to \mathbb{R}$ heißt *reell analytisch*, wenn es für jeden Punkt $x_0 \in A$ eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ und eine formale Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n T^n \in \mathbb{R}[\![T]\!]$ mit reellen Koeffizienten gibt, sodass:

- der Konvergenzradius von $\sum_{n\geq 0} a_n T^n$ ist $\geq \varepsilon$,
- $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A$,
- $\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \ \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Aufgabe 3.2.

a) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und sei $f \colon U \to \mathbb{C}$ eine analytische Abbildung mit $f(U \cap \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Man zeige, dass die Potenzreihenentwicklung von f in jedem Punkt $x_0 \in U \cap \mathbb{R}$ reelle Koeffizienten hat und dass die Abbildung $f|_{U\cap\mathbb{R}} \colon U \cap \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ reell analytisch ist.

b) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge und sei $\varphi \colon A \to \mathbb{R}$ eine reell analytische Abbildung. Man zeige, dass es eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ und eine analytische Abbildung $f \colon U \to \mathbb{C}$ gibt, sodass $U \cap \mathbb{R} = A$ und $f|_A = \varphi$ gelten.

Aufgabe 3.3.

a) Sei X ein topologischer Raum. Betrachten Sie die folgenden Aussagen:
   (i) X ist zusammenziehbar;
   (ii) die identische Abbildung $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung $X \to X$;
   (iii) es gibt einen Punkt $x_0 \in X$, sodass die Menge $\{x_0\}$ ein Deformationsretrakt von X ist.

   Man zeige die folgenden Implikationen: (i)$\Leftrightarrow$(ii) und (i)$\Leftarrow$(iii). (Leider gibt es seltsame topologische Räume, die zusammenziehbar sind und in denen es keinen Punkt gibt, der ein Deformationsretrakt ist [Hat02, Chapter 0, Exercises 6 and 7].)

b) Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ versehen mit der Teilraumtopologie. Betrachten Sie die folgenden Aussagen:
   (iv) X ist *sternförmig*, d.h. es gibt einen Punkt $x_0 \in X$, sodass für jedes $x \in X$ die Strecke zwischen x_0 und x eine Teilmenge von X ist;
   (v) X ist *konvex*, d.h. für je zwei Punkte $x, y \in X$ ist die Strecke zwischen x und y eine Teilmenge von X.

   Man zeige die folgenden Implikationen: (iii)$\Leftarrow$(iv)$\Leftarrow$(v). Durch zwei Gegenbeispiele im $\mathbb{R}^2$ zeige man, dass diese zwei Implikationen keine Äquivalenzen sind; skizzerien Sie Ihre Gegenbeispiele.

Aufgabe 3.4. Man betrachte das „Sans Serif“ großgeschriebene Alphabet.

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Jeder Buchstabe ist ein kompakter zusammenhängender Teilraum vom $\mathbb{R}^2$, der eine endliche Vereinigung von C^∞ Kurven ist.

a) Welche Buchstaben sind homöomorph? Man zeige die Partition des Alphabetes in Homöomorphismusklassen.
b) Welche Buchstaben sind homotopieäquivalent? Man zeige die Partition des Alphabetes in Homotopieäquivalenzklassen.

In dieser Aufgabe werden keine Beweise verlangt. Es genügt, das Ergebnis anzugeben.

Aufgabe 3.5.

a) Man konstruiere explizit einen Homöomorphismus zwischen $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ und $\mathbb{R} \times S^1$.
b) Seien $0 \leq k < n$ ganzen Zahlen und sei A ein k-dimensionaler affiner Teilraum vom $\mathbb{R}^n$. Man zeige, dass $\mathbb{R}^n \smallsetminus A$ homotopieäquivalent zu der Sphäre S^{n-k-1} ist.
c) Machen Sie eine Zeichnung, um mich und Sie selbst zu überzeugen, dass $\{z \in \mathbb{C} \mid (|z-1|-1)(|z+1|-1) = 0\}$ ein Deformationsretrakt von $\mathbb{C} \smallsetminus \{1, -1\}$ ist.
d) Seien X, Y, Z drei topologische Räume und sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Man betrachten vier stetige Abbildungen $f_0 \colon X \to Y$, $f_1 \colon X \to Y$, $g_0 \colon Y \to Z$ und $g_1 \colon Y \to Z$. Wenn f_0, f_1 homotop relativ zu A sind und g_0, g_1 homotop relativ zu $f_0(A)$ sind, dann zeige man, dass $g_0 \circ f_0$ und $g_1 \circ f_1$ homotop relativ zu A sind.

Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sommersemester 2020

Andrea Petracci
andrea.petracci [at] fu-berlin [dot] de
https://userpage.fu-berlin.de/petracci/2020Complex

Funktionentheorie — 4. Aufgabenblatt
abzugeben am 18. Mai 2020 um 10 Uhr

Aufgabe 4.1. Zeigen Sie, dass es keine stetige Abbildung $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ gibt, sodass für jedes $z \in \mathbb{C}^*$ die Gleichung $e^{f(z)} = z$ gilt. [Ratschlag: benutzen Sie die Funktorialität der Fundamentalgruppe.]

Aufgabe 4.2. Sei $n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{-1, 0, 1\}$ fest. Zeigen Sie, dass es keine stetige Abbildung $g\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ gibt, sodass für jedes $z \in \mathbb{C}^*$ die Gleichung $g(z)^n = z$ gilt.

Aufgabe 4.3. Betrachten Sie die Zeichnung am Ende der Vorlesung 04.4. In dieser werden fünf Punkte $z_1, \dots, z_5 \in \mathbb{C}$ und eine Schleife γ in $\mathbb{C} \smallsetminus \{z_1, \dots, z_5\}$ dargestellt. Bestimmen Sie die Umlaufzahl $W(\gamma, z_j)$ für jedes $j = 1, \dots, 5$.

Aufgabe 4.4. Sei $\varphi\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Sei $U = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$. Betrachten Sie die folgenden 1-Formen auf U:

$$\eta = \varphi(x^2 + y^2) \cdot (x \, \mathrm{d}x + y \, \mathrm{d}y) \qquad \text{und} \qquad \omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} \mathrm{d}x + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathrm{d}y.$$

a) Zeigen Sie, dass η exakt ist.
b) Zeigen Sie, dass ω geschlossen ist.
c) Zeigen Sie explizit, dass ω lokal exakt ist. Genauer, finden Sie eine offene Überdeckung $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ von U und für jedes $\lambda \in \Lambda$ eine Stammfunktion $F_\lambda\colon U_\lambda \to \mathbb{R}$ von $\omega|_{U_\lambda}$.
d) Finden Sie eine Stammfunktion von ω entlang des Weges $\alpha\colon [0, 4\pi] \to U$, $t \mapsto (\mathrm{e}^t \cos t, \mathrm{e}^t \sin t)$.
e) Finden Sie eine Stammfunktion von ω entlang des Weges $\beta\colon [0, 3] \to U$, $t \mapsto \big(\cos(t^2), \sin(t^2)\big)$.

Aufgabe 4.5. Für jedes $\alpha \in \mathbb{C}^*$ und für jedes $\beta \in \mathbb{C}$ sei $g_{\alpha,\beta}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Abbildung, die durch $\forall z \in \mathbb{C},\ g_{\alpha,\beta}(z) = \alpha z + \beta$ definiert ist. Man betrachte die Menge $G = \{g_{\alpha,\beta} \mid \alpha \in \mathbb{C}^*,\ \beta \in \mathbb{C}\}$. Man betrachte die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$: $A = \{t + s\mathrm{i} \mid t, s \in [0,1]\}$ und $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| \leq 1\}$.

a) Man zeige, dass G bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe ist.
b) Man bestimme alle $g \in G$, für die $g(B) = B$ gilt.
c) Man bestimme alle $g \in G$, für die $g(B_1(1)) = B_1(1)$ gilt.
d) Man bestimme ein $g \in G$, für die $g(A) = B$ gilt.
e) Man bestimme alle $g \in G$, für die $g(A) = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}\, z| \leq 2,\ |\mathrm{Im}\, z| \leq 4\}$ gilt.

Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sommersemester 2020

Andrea Petracci
andrea.petracci [at] fu-berlin [dot] de
`https://userpage.fu-berlin.de/petracci/2020Complex`

Funktionentheorie — 5. Aufgabenblatt
abzugeben am 25. Mai 2020 um 10 Uhr

Aufgabe 5.1. a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $g\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung. Man definiert

$$\int_a^b g(t)\mathrm{d}t := \int_a^b u(t)\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b v(t)\mathrm{d}t,$$

wobei $u\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ und $v\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $g = u + \mathrm{i}v$. Beweisen Sie die folgende Ungleichung:

$$\left|\int_a^b g(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |g(t)|\mathrm{d}t.$$

b) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und sei $f: U \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie die Gleichung

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$$

unter der Annahme, dass $\gamma\colon [a, b] \to U$ ein stückweise C^1-Weg in U ist.

c) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und sei $f: U \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung. Wenn $\gamma\colon [a, b] \to U$ ein stückweise C^1-Weg in U ist, zeigen Sie die Ungleichung

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \leq L(\gamma) \cdot \max_{\gamma([a,b])} |f|,$$

wobei $L(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\mathrm{d}t$ die Länge von γ ist.

Aufgabe 5.2. a) Seien $m \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ fest. Betrachten Sie die Schleife $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^*$, die für jedes $t \in [0, 2\pi]$ durch $\gamma(t) = r e^{\mathrm{i}t}$ definiert ist. Bestimmen Sie das Integral $\int_\gamma z^m \mathrm{d}z$.

b) Seien ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und eine Schleife γ in $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ fest. Sei $W(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$ die Umlaufzahl von γ in Bezug auf z_0. Beweisen Sie, dass die folgende Gleichung gilt:

$$W(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}.$$

Aufgabe 5.3. Betrachten Sie die folgenden offenen Teilmengen vom $\mathbb{C}$:

$$U = \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\},$$
$$V = \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}y \mid y \in \mathbb{R},\ -1 \leq y \leq 1\},$$
$$A = \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}y \mid y \in \mathbb{R},\ y \leq 1\}.$$

Für alle $a, b \in \mathbb{C}$ betrachten Sie die 1-Form $\omega = \frac{az+b}{z^2+1}\mathrm{d}z$ auf U.

i) Für welche $a, b \in \mathbb{C}$ ist die Form $\omega|_A$ exakt auf A?
ii) Für welche $a, b \in \mathbb{C}$ ist die Form $\omega|_U$ exakt auf U?
iii) Für welche $a, b \in \mathbb{C}$ ist die Form $\omega|_V$ exakt auf V?

[Hinweis: finden Sie $c, d \in \mathbb{C}$, sodass $\frac{az+b}{z^2+1} = \frac{c}{z+\mathrm{i}} + \frac{d}{z-\mathrm{i}}$ und benutzen Sie Aufgabe 5.2b.]

Aufgabe 5.4. In dieser Aufgabe sollen Sie so tun, als ob Sie keinen Wert jeder Stammfunktion der reellen Funktion $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ kennen würden. Mit anderen Worten dürfen Sie die Werte der Funktion arctan und die Gleichung $\lim_{x\to\pm\infty} \arctan(x) = \pm\frac{\pi}{2}$ nicht benutzen.

Für jede reelle Zahl $r > 0$ betrachten Sie die folgenden zwei Wegen in $\mathbb{C}$:

$$\alpha_r\colon [-r, r] \to \mathbb{R} \qquad t \mapsto t,$$
$$\beta_r\colon [0, \pi] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto r e^{\mathrm{i}t}.$$

Betrachten Sie die 1-Form

$$\omega = \frac{\mathrm{d}z}{z^2 + 1}$$

auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm\mathrm{i}\}$.

a) Für jedes $r \in (0,1) \cup (1,+\infty)$, bestimmen Sie das Integral

$$\int_{\alpha_r * \beta_r} \omega.$$

[Hinweis: finden Sie $a, b \in \mathbb{C}$, sodass $\omega = \frac{a}{z-\mathrm{i}}\mathrm{d}z + \frac{b}{z+\mathrm{i}}\mathrm{d}z$ und benutzen Sie Aufgabe 5.2b.]

b) Zeigen Sie, dass für jedes $r > 1$

$$\left| \int_{\beta_r} \omega \right| \leq \frac{\pi r}{r^2 - 1}$$

gilt.

c) Bestimmen Sie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \lim_{r \to +\infty} \int_{\alpha_r} \omega.$$

Aufgabe 5.5. Sei $U \subseteq \mathbb{C}^*$ eine zusammenhängende offene Teilmenge. Betrachten Sie die Inklusionsabbildung $i\colon U \hookrightarrow \mathbb{C}^*$. Seien $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ und $z_0 \in U$ fest. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Es gibt eine holomorphe Abbildung $f\colon U \to \mathbb{C}$, sodass $\forall z \in U \quad e^{f(z)} = z$ gilt.
(2) Es gibt eine stetige Abbildung $f\colon U \to \mathbb{C}$, sodass $\forall z \in U \; e^{f(z)} = z$ gilt.
(3) $\pi_1(i, z_0)\colon \pi_1(U, z_0) \to \pi_1(\mathbb{C}^*, z_0)$ ist der Nullhomomorphismus.
(4) Die 1-Form $\frac{\mathrm{d}z}{z}$ ist exakt auf U.
(5) Es gibt eine holomorphe Abbildung $g\colon U \to \mathbb{C}^*$, sodass $\forall z \in U \; g(z)^n = z$ gilt.
(6) Es gibt eine stetige Abbildung $g\colon U \to \mathbb{C}^*$, sodass $\forall z \in U \; g(z)^n = z$ gilt.
(7) Die Bildmenge des Homomorphismus $\pi_1(i, z_0)\colon \pi_1(U, z_0) \to \pi_1(\mathbb{C}^*, z_0)$ ist in der Untergruppe $\{[\gamma]^n \mid [\gamma] \in \pi_1(\mathbb{C}^*, z_0)\}$ von $\pi_1(\mathbb{C}^*, z_0)$ enthalten.

[Der Beweis der Implikation (7)⇒(3) wird nicht verlangt und Sie können sie für wahr halten. Ich empfehle Ihnen, unter den vielen möglichen Implikationen die Implikationen (3)⇒(4) und (4)⇒(1) zu zeigen.]

Schizzieren Sie eine offene zusammenhängende Teilmenge U von $\mathbb{C}^*$, sodass es einen stetigen Logarithmus auf U gibt und U nicht einfach zusammenhängend ist.

Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sommersemester 2020

Andrea Petracci
andrea.petracci [at] fu-berlin [dot] de
`https://userpage.fu-berlin.de/petracci/2020Complex`

Funktionentheorie — 6. Aufgabenblatt
abzugeben am 2. Juni 2019 um 10 Uhr

Aufgabe 6.1. Betrachten Sie die 1-Form

$$\omega = \frac{\mathrm{e}^{-z}}{(z+2)^3}\mathrm{d}z$$

auf $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$. Für jedes $r > 0$ betrachten Sie das Rechteck $R_r = \{x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \mid |x| \le r,\ |y| \le 1\}$ und die Schleife $\gamma_r \colon [0,2] \to \mathbb{C}$, die für jedes $t \in [0,2]$ durch $\gamma_r(t) = r(\cos(2\pi t^2) + \mathrm{i}\sin(2\pi t^2))$ definiert ist. Bestimmen Sie die Integrale

$$\int_{\partial B_r(0)} \omega, \qquad \int_{\partial R_r} \omega, \qquad \text{und} \qquad \int_{\gamma_r} \omega$$

für jedes $r \in (0,2) \cup (2,+\infty)$. [Hinweis: betrachten Sie die Potenzreihenentwicklung von e^{-z} in -2.]

Aufgabe 6.2. Sei $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Sei $p \ge 0$ eine ganze Zahl. Wenn es reelle Zahlen $C, R > 0$ gibt mit $\forall z \in \mathbb{C} \setminus B_R(0)$ $|f(z)| \le C|z|^p$, dann ist f ein Polynom mit Grad $\le p$.
b) Wenn es $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\forall z \in \mathbb{C}$ $\operatorname{Re} f(z) \ge C$, dann ist f konstant.
c) Wenn es $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\forall z \in \mathbb{C}$ $\operatorname{Im} f(z) \le C$, dann ist f konstant.
d) Wenn es $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\forall z \in \mathbb{C}$ $\operatorname{Im} f(z) \ge C$, dann ist f konstant.
e) Wenn $\sup_{z \in \mathbb{C}} \left| f(z)^3 + 5\mathrm{i} f(z) - 2 \right| < +\infty$ gilt, dann ist f konstant.

Definition. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge. Eine Abbildung $u \colon U \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch*, wenn sie C^2 ist und $\Delta u = 0$ auf U gilt, wobei $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ der Laplace-Operator ist.

Aufgabe 6.3. Sei U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Wenn $f \colon U \to \mathbb{C}$ holomorph ist, dann sind $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ harmonisch.
b) Wenn $u \colon U \to \mathbb{R}$ harmonisch ist, dann ist die 1-Form $-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$ auf U geschlossen.
c) Wenn $u \colon U \to \mathbb{R}$ harmonisch ist und U einfach zusammenhängend ist, dann gibt es eine harmonische Abbildung $v \colon U \to \mathbb{R}$, sodass die Abbildung $u + \mathrm{i}v \colon U \to \mathbb{C}$ holomorph ist.

Geben Sie explizit eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine harmonische Abbildung $u \colon U \to \mathbb{R}$ an, sodass es keine holomorphe Abbildung $f \colon U \to \mathbb{C}$ mit $u = \operatorname{Re} f$ gibt.

Aufgabe 6.4. Sei U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

d) Jede harmonische Abbildung $u \colon U \to \mathbb{R}$ ist C^∞.
e) Wenn $u \colon U \to \mathbb{R}$ harmonisch ist, dann sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ harmonisch auf U.
f) Wenn $u \colon U \to \mathbb{R}$ harmonisch ist, dann ist die Abbildung $\frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} \colon U \to \mathbb{C}$ holomorph.
g) Wenn $u \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonisch und nicht konstant ist, dann gilt $u(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$.

Aufgabe 6.5. Sei U eine offene zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{C}$ und sei $f \colon U \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung. Seien $z_0 \in U$ und $r > 0$ mit $B_r(z_0) \subseteq U$. Wenn für jedes $z \in B_r(z_0)$ die Ungleichung $|f(z)| \ge |f(z_0)|$ gilt, dann zeige man, dass $f(z_0) = 0$ gilt.

Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sommersemester 2020

Andrea Petracci
andrea.petracci [at] fu-berlin [dot] de
`https://userpage.fu-berlin.de/petracci/2020Complex`

Funktionentheorie — 7. Aufgabenblatt
abzugeben am 8. Juni 2019 um 10 Uhr

Aufgabe 7.1. Für jedes $r > 0$ betrachte man das Rechteck $R_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}\, z| \leq r,\ |\mathrm{Im}\, z| \leq 1\}$. Für jedes $r \in (0,1) \cup (1,2) \cup (2,+\infty)$ bestimme man die Integrale

$$I_1(r) = \int_{\partial R_r} \frac{\mathrm{d}z}{(z+1)(z-2)} \qquad \text{und} \qquad I_2(r) = \int_{\partial R_r} \frac{\mathrm{d}z}{(z+1)(z-2)^2}.$$

Definition. Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt *dicht* in X, wenn die abgeschlossene Hülle von Y in X sich mit X deckt.

Aufgabe 7.2. a) Wenn $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein nicht konstantes Polynom ist, dann zeige man, dass $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ gilt.

b) Man gebe eine nicht konstante Funktion $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit $f(\mathbb{C}) \subsetneqq \mathbb{C}$ an.

c) Man zeige, dass das Bild einer nicht konstanten ganzen Funktion dicht in $\mathbb{C}$ ist.

d) Seien $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zwei nicht konstante holomorphe Abbildungen. Man zeige, dass $g \circ f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nicht beschränkt ist.

e) Geben Sie explizit eine nicht beschränkte offene zusammenhängende Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ und eine beschränkte nicht konstante holomorphe Abbildung $f\colon U \to \mathbb{C}$ an.

Aufgabe 7.3. Verwenden Sie die Definition harmonischer Funktionen von einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ nach $\mathbb{R}$ aus dem Aufgabenblatt 6.

a) Zeigen Sie, dass jede harmonische Abbildung die Mittelwerteigenschaft erfüllt. [Benutzen Sie nur Sätze oder Aufgaben, die Sie in diesem Kurs gesehen haben.]

b) Sei $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, sei $\overline{B} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ die abgeschlossene Hülle von B in $\mathbb{C}$, sei $C(\overline{B}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum von allen stetigen Abbildungen von $\overline{B}$ nach $\mathbb{R}$. Sei $g\colon \overline{B} \smallsetminus B = S^1 \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Betrachten Sie die Menge

$$X := \left\{ u \in C(\overline{B}, \mathbb{R}) \;\middle|\; u|_B \text{ ist harmonisch und } u|_{\overline{B} \smallsetminus B} = g \right\}.$$

Zeigen Sie, dass die Menge X höchstens ein Element hat.

c) Sei $U = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$, sei $\overline{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$ die abgeschlossene Hülle von U in $\mathbb{C}$, sei $C(\overline{U}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum von allen stetigen Abbildungen von $\overline{U}$ nach $\mathbb{R}$. Sei $g\colon \overline{U} \smallsetminus U = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Betrachten Sie die Menge

$$X := \left\{ u \in C(\overline{U}, \mathbb{R}) \;\middle|\; u|_U \text{ ist harmonisch und } u|_{\mathbb{R}} = g \right\}.$$

Wenn X nicht leer ist, dann zeigen Sie, dass X unendlich viele Elemente hat.

Aufgabe 7.4.

a) Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, sei $h\colon U \to \mathbb{C}^*$ eine holomorphe Abbildung und sei γ eine stückweise C^1 Schleife in U. Man zeige, dass

$$W(h \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)} \mathrm{d}z$$

gilt.

b) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene zusammenhängende Teilmenge, sei $z_0 \in U$ ein Punkt und sei $h\colon U \to \mathbb{C}^*$ eine holomorphe Abbildung. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Es gibt eine holomorphe Abbildung $f\colon U \to \mathbb{C}$, sodass $\forall z \in U\ e^{f(z)} = h(z)$ gilt.
(2) Es gibt eine stetige Abbildung $f\colon U \to \mathbb{C}$, sodass $\forall z \in U\ e^{f(z)} = h(z)$ gilt.
(3) Der Gruppenhomomorphismus $\pi_1(h, z_0)\colon \pi_1(U, z_0) \to \pi_1(\mathbb{C}^*, z_0)$ ist null.
(4) Für jede Schleife γ in U gilt $W(h \circ \gamma, 0) = 0$.
(5) Die 1-Form $\frac{h'(z)}{h(z)} \mathrm{d}z$ ist exakt auf U.

Aufgabe 7.5. Man entscheide, ob jeder von den folgenden Sätze wahr oder falsch ist. Wenn er wahr ist, gebe man einen Beweis an. Wenn er falsch ist, gebe man ein Gegenbeispiel an.

a) Wenn zwei formale Potenzreihen $f \in \mathbb{C}[\![T]\!]$ unf $g \in \mathbb{C}[\![T]\!]$ den gleichen Konvergenzradius R haben, dann ist der Konvergenzradius der Summe $f + g$ gleich R.

b) Wenn $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit

$$\int_{\partial B_2(0)} \frac{f(\zeta)}{\left(\zeta - n^{-2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}\right)^2}\mathrm{d}\zeta = 0$$

für jede ganze Zahl $n \geq 1$, dann ist f konstant.

c) $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}^*$ sind biholomorph.

d) $\mathbb{C}$ und $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ sind homöomorph.

e) $\mathbb{C}$ und $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ sind biholomorph.

f) Für jede $r, r' \in (0, +\infty)$ und für jede $a, b \in \mathbb{C}$ sind $B_r(a)$ und $B_{r'}(b)$ biholomorph.

g) Die 1-Form $\frac{\mathrm{d}z}{z+1}$ ist exakt auf $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$.

h) Die 1-Form $\frac{\mathrm{d}z}{z+1}$ ist exakt auf $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

i) Die 1-Form $\frac{\mathrm{d}z}{(z+1)^3}$ ist exakt auf $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

j) Für jedes $\varepsilon \in (0, +\infty)$ gilt $\left\{\exp\left(z^{-1}\right) \;\middle|\; 0 < |z| < \varepsilon\right\} = \mathbb{C}^*$. [Schreiben Sie $w = |w|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ und $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$; wann gilt $w = \exp\left(z^{-1}\right)$?]

Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sommersemester 2020

Andrea Petracci
andrea.petracci [at] fu-berlin [dot] de
`https://userpage.fu-berlin.de/petracci/2020Complex`

Funktionentheorie — 8. Aufgabenblatt
abzugeben am 15. Juni 2020 um 10 Uhr

Aufgabe 8.1. Man betrachte die holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \smallsetminus \{-1,3\} \to \mathbb{C}$, die für jedes $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{-1,3\}$ durch

$$f(z) = \frac{-4}{(z+1)(z-3)}$$

definiert ist. Man bestimme explizit die Laurentreihenentwicklungen von f in den folgenden Kreisringen:

$$\begin{aligned} A_{0,1}(0) &= \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}, \\ A_{1,3}(0) &= \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3\}, \\ A_{3,+\infty}(0) &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 3\}. \end{aligned}$$

Für jedes $r \in \mathbb{R}_{>0} \smallsetminus \{1,3\}$, bestimme man das Integral

$$\int_{\partial B_r(0)} f(z)\mathrm{d}z.$$

Aufgabe 8.2. Es gibt eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$, sodass die folgenden Funktionen auf dem Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \varepsilon\}$ holomorph sind:

a) $\dfrac{1}{1-z^2}$

b) $\mathrm{e}^{1/z}$

c) $\dfrac{\mathrm{e}^{-z}}{z(z+1)}$

d) $\dfrac{\sin z}{z}$

e) $\dfrac{z}{\sin z}$

f) $z \sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$

wobei $\sin z := \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z})$. Für jede dieser Funktionen bestimme man die Koeffizienten a_n mit $|n| \leq 2$ von ihre Laurententwicklung auf dem Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \varepsilon\}$ und entscheide man, ob 0 eine hebbare Singularität, ein Pol oder eine wesentliche Singularität ist.

Aufgabe 8.3. Sei $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung, sodass für jedes $z \in \mathbb{C}^*$

$$|f(z)| \leq 2|z|^{\frac{1}{2}} + 3|z|^{-\frac{1}{3}}$$

gilt. Man zeige, dass f konstant ist.

Aufgabe 8.4. a) Man betrachte die holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, z \mapsto z^{-1}$. Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von f in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

b) Man betrachte die holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{\sin z}{z}$. Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von f in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

c) Man betrachte die holomorphe Funktion $f\colon B_1(1) \to \mathbb{C}$, die für jedes $z \in B_1(1)$ durch $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ gegeben ist. Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von f in 1.

d) Man betrachte die holomorphe Funktion $f\colon B_{\frac{1}{2}}(\mathrm{i}) \to \mathbb{C}$, die für jedes $z \in B_{\frac{1}{2}}(\mathrm{i})$ durch

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{2z} + \mathrm{e}^{-2z} - 2}{z^2(z^2 - 3z + 2)}$$

definiert ist. Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von f in i.

Aufgabe 8.5. Sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl und sei

$$\zeta := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2n}}.$$

Sei $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$. Für alle $\varepsilon \in (0,1)$, $r \in (1,+\infty)$ und $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ betrachte man die folgenden Wege in U:

$$\begin{aligned}
\alpha_{\varepsilon,r,\phi} &\colon [\varepsilon, r] \to U & t &\mapsto t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}, \\
\beta_{\varepsilon,r,\phi} &\colon [\phi, 2\pi - \phi] \to U & t &\mapsto r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \\
\gamma_{\varepsilon,r,\phi} &\colon [\varepsilon, r] \to U & t &\mapsto t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}, \\
\delta_{\varepsilon,r,\phi} &\colon [\phi, 2\pi - \phi] \to U & t &\mapsto \varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}.
\end{aligned}$$

Sei $\iota(\gamma_{\varepsilon,r,\phi})$ der inverse Weg von $\gamma_{\varepsilon,r,\phi}$. Sei $\iota(\delta_{\varepsilon,r,\phi})$ der inverse Weg von $\delta_{\varepsilon,r,\phi}$.

Sei $g\colon U \to \mathbb{C}$ die Abbildung, die für jedes $r \in (0,+\infty)$ und $\theta \in (0, 2\pi)$ durch $g(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}$ definiert ist. Man betrachte die folgende 1-Form auf U:

$$\omega = \frac{g(z)}{z^2+1}\mathrm{d}z.$$

Man betrachte die reelle positive Zahl

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[n]{x}}{x^2+1}\mathrm{d}x.$$

i) Skizzieren Sie die Wege $\alpha_{\varepsilon,r,\phi}$, $\beta_{\varepsilon,r,\phi}$, $\gamma_{\varepsilon,r,\phi}$ und $\delta_{\varepsilon,r,\phi}$ in U, für ε klein, r groß und ϕ klein.

ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung $g\colon U \to \mathbb{C}$ wohldefiniert und holomorph ist. [Der Gebrauch der Cauchy–Riemannschen partiellen Differentialgleichungen in Polarkoordinaten ist verboten.]

iii) Für alle $\varepsilon \in (0,1)$, $r \in (1,+\infty)$ und $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ zeigen Sie die Gleichung

$$\int_{\alpha_{\varepsilon,r,\phi} * \beta_{\varepsilon,r,\phi} * \iota(\gamma_{\varepsilon,r,\phi}) * \iota(\delta_{\varepsilon,r,\phi})} \omega = \pi(\zeta - \zeta^3).$$

[Hinweis: schreiben Sie

$$\omega = a\frac{g(z)}{z+\mathrm{i}}\mathrm{d}z + b\frac{g(z)}{z-\mathrm{i}}\mathrm{d}z$$

mit $a, b \in \mathbb{C}$.]

iv) Seien $0 < \varepsilon < 1 < r$ fest. Für jedes $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ betrachten Sie die stetige Abbildung

$$f_\phi\colon [\varepsilon, r] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto \frac{\sqrt[n]{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi}{n}}}{t^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\phi}+1}$$

und die stetige Abbildung

$$f\colon [\varepsilon, r] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto \frac{\sqrt[n]{t}}{t^2+1}.$$

Zeigen Sie

$$\lim_{\phi \to 0^+} \sup_{[\varepsilon,r]} |f_\phi - f| = 0.$$

Leiten Sie

$$\lim_{\phi \to 0^+} \int_\varepsilon^r f_\phi(t)\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^r f(t)\mathrm{d}t$$

her.

v) Für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ und $r \in (1,+\infty)$ zeigen Sie

$$\lim_{\phi \to 0^+} \int_{\alpha_{\varepsilon,r,\phi}} \omega = \int_\varepsilon^r \frac{\sqrt[n]{t}}{t^2+1}\mathrm{d}t.$$

vi) Für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ und $r \in (1,+\infty)$ zeigen Sie

$$\lim_{\phi \to 0^+} \int_{\gamma_{\varepsilon,r,\phi}} \omega = \zeta^4 \int_\varepsilon^r \frac{\sqrt[n]{t}}{t^2+1}\mathrm{d}t.$$

vii) Für jedes $\varepsilon \in (0,1)$, $r \in (1,+\infty)$ und $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ zeigen Sie

$$\left|\int_{\beta_{\varepsilon,r,\phi}} \omega\right| \leq 2(\pi - \phi)\frac{r\sqrt[n]{r}}{r^2-1} \qquad \text{und} \qquad \left|\int_{\delta_{\varepsilon,r,\phi}} \omega\right| \leq 2(\pi - \phi)\frac{\varepsilon\sqrt[n]{\varepsilon}}{1-\varepsilon^2}.$$

viii) Für jedes $\varepsilon \in (0,1)$ und $r \in (1,+\infty)$ zeigen Sie, dass die Grenzwerte

$$\lim_{\phi \to 0^+} \int_{\beta_{\varepsilon,r,\phi}} \omega \qquad \text{und} \qquad \lim_{\phi \to 0^+} \int_{\delta_{\varepsilon,r,\phi}} \omega$$

existieren.

ix) Für jedes $\varphi \in \mathbb{R} \setminus (1 + 2\mathbb{Z})\frac{\pi}{2}$ betrachten Sie die komplexe Zahl $w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ und zeigen Sie die folgenden Gleichungen:

$$\frac{1}{1+w^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\mathrm{i}\right) \qquad \text{und} \qquad \frac{w}{1+w^2} = \frac{1}{2\cos\varphi}.$$

x) Nehmen Sie den Grenzwert der Gleichung in iii) mit $\phi \to 0^+$ und dann mit $\varepsilon \to 0^+$, $r \to +\infty$. Leiten Sie die Gleichung

$$I = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi}{2n}}$$

her.

Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sommersemester 2020

Andrea Petracci
andrea.petracci [at] fu-berlin [dot] de
`https://userpage.fu-berlin.de/petracci/2020Complex`

Funktionentheorie — 9. Aufgabenblatt
abzugeben am 22. Juni 2020 um 10 Uhr

Aufgabe 9.1. Man betrachte die folgenden Funktionen und man bestimme die Residuen in jedem Punkt von $\mathbb{C}$:

a) $$\frac{1}{(z^2+1)(z-i)^3},$$

b) $$\frac{1}{\exp(z)+1},$$

c) $$\exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$

Aufgabe 9.2. Man berechne die folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

i)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)(x^2-2x+2)} \mathrm{d}x,$$

ii)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+2x+2} \mathrm{d}x,$$

iii)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+2x+2} \mathrm{d}x,$$

iv)
$$\int_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{5-4\sin t}.$$

Aufgabe 9.3. a) Man betrachte den Rand der kompakten Menge $K_r = \{\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mid 0 \leq \rho \leq r,\ 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n}\}$ für $r > 0$. Mit Hilfe des Residuensatzes zeige man die Gleichung
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n+1} = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$
für jede ganze Zahl $n \geq 2$.

b) Mit Hilfe des Residuensatzes berechne man das Integral
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2+2x+4} \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 9.4. Man betrachte das Polynom $f(z) = z^7 - 12\mathrm{i}z^5 + 15z^4 + \mathrm{i}$. Man bestimme die Anzahl von Nullstellen von f, die in jeder der folgenden Mengen enthalten sind: $B_2(0)$, $B_1(0)$ und $B_2(0) \smallsetminus B_1(0)$.

Aufgabe 9.5. Man betrachte die meromorphe Funktion $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$:
$$f(z) = z(z^3-4) + e^{z/2} + \frac{1}{4z-6}.$$
Man bestimme die Anzahl von Nullstellen von f, die in jeder der folgenden Mengen enthalten sind: $B_2(0)$, $B_1(0)$ und $B_2(0) \smallsetminus B_1(0)$.

Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sommersemester 2020

Andrea Petracci
andrea.petracci [at] fu-berlin [dot] de
`https://userpage.fu-berlin.de/petracci/2020Complex`

Funktionentheorie — 10. Aufgabenblatt
abzugeben am 29. Juni 2020 um 10 Uhr

Aufgabe 10.1. Für jede ganze Zahl $n \geq 2$ berechne man das folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[n]{x}}{(x^2+1)^2} \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 10.2. Man betrachte die folgende meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$:

$$f(z) = \mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z} + \frac{2}{z-3}.$$

Man bestimme die Gesamtzahl der Nullstellen von f in $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\, z| < \frac{\pi}{2}\}$.

Aufgabe 10.3. Man betrachte die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$:

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\},$$
$$V = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < 3\}.$$

i) Sei $z_0 \in U$ fest. Wenn $f\colon U \to V$ eine holomorphe Abbildung ist, dann zeigen Sie, dass der Gruppenhomomorphismus

$$\pi_1(f, z_0)\colon \pi_1(U, z_0) \longrightarrow \pi_1(V, f(z_0))$$

null ist.
ii) Zeigen Sie, dass U und V nicht biholomorph sind.
iii) Zeigen Sie, dass U und V homöomorph sind.

Aufgabe 10.4. i) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene zusammenhängende Teilmenge, sei $z_0 \in U$ ein Punkt und sei $h\colon U \to \mathbb{C}^*$ eine holomorphe Abbildung. Sei $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Es gibt eine holomorphe Abbildung $g\colon U \to \mathbb{C}$, sodass $\forall z \in U\ g(z)^n = h(z)$ gilt.
(2) Es gibt eine stetige Abbildung $g\colon U \to \mathbb{C}$, sodass $\forall z \in U\ g(z)^n = h(z)$ gilt.
(3) Die Bildmenge des Homomorphismus $\pi_1(h, z_0)\colon \pi_1(U, z_0) \to \pi_1(\mathbb{C}^*, z_0)$ ist in der Untergruppe

$$\{[\gamma]^n \mid [\gamma] \in \pi_1(\mathbb{C}^*, z_0)\}$$

von $\pi_1(\mathbb{C}^*, z_0)$ enthalten.
(4) Für jede Schleife γ in U gilt $W(h \circ \gamma, 0) \in n\mathbb{Z}$.
(5) Für jede stückweise C^1-Schleife γ in U gilt

$$\frac{1}{n} \int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)} \mathrm{d}z \in 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}.$$

[Hinweis zu (5) $\Rightarrow$ (1): Nehmen Sie $a \in \mathbb{C}$ mit $a^n = h(z_0)$. Betrachten Sie die Funktion $g\colon U \to \mathbb{C}^*$

$$z \mapsto a \cdot \exp\left(\frac{1}{n} \int_{\alpha_z} \frac{h'(z)}{h(z)} \mathrm{d}z\right),$$

wobei α_z ein beliebiger Weg in U von z_0 nach z ist. Zeigen Sie, dass g wohldefiniert und holomorph ist. Zeigen Sie, dass die Funktion $r\colon U \to \mathbb{C}^*\ z \mapsto \frac{g(z)^n}{h(z)}$ konstant gleich 1 ist.]

ii) Man betrachte die folgenden offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$:

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\},$$
$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 0\} \setminus \{1\},$$
$$C = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\},$$
$$D = \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}.$$

a) Gibt es eine holomorphe Abbildung $g\colon A \to \mathbb{C}$, sodass für jedes $z \in A$ $g(z)^2 = z^2 - 1$ gilt?
b) Gibt es eine holomorphe Abbildung $g\colon B \to \mathbb{C}$, sodass für jedes $z \in B$ $g(z)^2 = z^2 - 1$ gilt?
c) Gibt es eine holomorphe Abbildung $g\colon C \to \mathbb{C}$, sodass für jedes $z \in C$ $g(z)^2 = z^2 - 1$ gilt?
d) Gibt es eine holomorphe Abbildung $g\colon D \to \mathbb{C}$, sodass für jedes $z \in D$ $g(z)^2 = z^2 - 1$ gilt?

Aufgabe 10.5. Man entscheide, ob jeder von den folgenden Sätze wahr oder falsch ist. Wenn er wahr ist, gebe man einen Beweis an. Wenn er falsch ist, gebe man ein Gegenbeispiel an.

i) Es gibt eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\forall z \in S^1, f(z) = 2\bar{z}$.

ii) Sei $\mathbb{N}^+ := \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 1\}$. Es gibt eine offene Teilmenge U von $\mathbb{C}$ und eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$, sodass $U \supseteq \{100\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$, $f(100) = 1$ und $\forall n \in \mathbb{N}^+, f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}$.

iii) Wenn U eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist und $f \in \mathcal{O}(U)$ mit $f' = 0$, dann ist f konstant.

iv) Wenn U eine offene zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist und $f \in \mathcal{O}(U)$ eine beschränkte holomorphe Funktion auf U ist, dann ist f konstant.

v) Sei U eine offene zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$ und sei $f \in \mathcal{O}(U)$ eine holomorphe Funktion auf U. Wenn $\operatorname{Re} f$ konstant ist, dann ist f konstant.

vi) Sei U eine offene zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$ und sei $f \in \mathcal{O}(U)$ eine holomorphe Funktion auf U. Wenn für jedes $z \in U$ $(\operatorname{Re} f(z)) \cdot (\operatorname{Im} f(z)) = 0$ gilt, dann ist f konstant.

vii) Wenn $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ eine ganze Funktion mit $f \circ f = f$ ist, dann ist f entweder konstant oder die identische Abbildung auf $\mathbb{C}$.

viii) Sei X ein topologischer Raum und sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge versehen mit der Teilraumtopologie. Wenn X diskret ist, dann ist Y diskret.

ix) Wenn X ein diskreter zusammenhängender topologischer Raum ist, dann hat X genau einen Punkt.

x) Wenn X ein diskreter kompakter topologischer Raum ist, dann hat X endlich viele Punkte.

Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sommersemester 2020

Andrea Petracci
andrea.petracci [at] fu-berlin [dot] de
`https://userpage.fu-berlin.de/petracci/2020Complex`

Funktionentheorie — 11. Aufgabenblatt
abzugeben am 6. Juli 2020 um 10 Uhr

Aufgabe 11.1. Man berechne das folgende Integral mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 11.2. Man betrachte die folgenden offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
A &= \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 \neq 1\}, \\
B &= \mathbb{C} \smallsetminus (\{\pm 1\} \cup \{\mathrm{i}y \mid y \in \mathbb{R},\ |y| \leq 1\}), \\
C &= \mathbb{C} \smallsetminus \left(\left\{ \sqrt{3}\mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mid -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{4\pi}{3} \right\} \cup \{\mathrm{i}y \mid y \in \mathbb{R},\ |y| \leq 1\} \right), \\
D &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}.
\end{aligned}$$

Für jedes $p, q, r, s \in \mathbb{C}$ betrachte man die Abbildung $f_{p,q,r,s} \colon A \to \mathbb{C}$:

$$f_{p,q,r,s}(z) = \frac{pz^3 + qz^2 + rz + s}{z^4 - 1} \qquad \text{für jedes } z \in A.$$

Für jedes $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$ betrachte man die Abbildung $h_{k,l,m,n} \colon A \to \mathbb{C}$:

$$h_{k,l,m,n}(z) = (z-1)^k (z-\mathrm{i})^l (z+1)^m (z+\mathrm{i})^n \qquad \text{für jedes } z \in A.$$

a) Für welche $p, q, r, s \in \mathbb{C}$ gibt es eine holomorphe Funktion $g \in \mathcal{O}(A)$, sodass $g' = f_{p,q,r,s}$ gilt?
b) Für welche $p, q, r, s \in \mathbb{C}$ gibt es eine holomorphe Funktion $g \in \mathcal{O}(B)$, sodass $g' = f_{p,q,r,s}|_B$ gilt?
c) Für welche $p, q, r, s \in \mathbb{C}$ gibt es eine holomorphe Funktion $g \in \mathcal{O}(C)$, sodass $g' = f_{p,q,r,s}|_C$ gilt?
d) Für welche $p, q, r, s \in \mathbb{C}$ gibt es eine holomorphe Funktion $g \in \mathcal{O}(D)$, sodass $g' = f_{p,q,r,s}|_D$ gilt?
e) Für welche $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$ gibt es eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(B)$ mit $\exp \circ f = h_{k,l,m,n}|_B$?
f) Für welche $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$ gibt es eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(C)$ mit $\exp \circ f = h_{k,l,m,n}|_C$?
g) Für welche $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$ gibt es eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(D)$ mit $\exp \circ f = h_{k,l,m,n}|_D$?
h) Für welche $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$ gibt es eine holomorphe Funktion $g \in \mathcal{O}(B)$ mit $\forall z \in B, g(z)^2 = h_{k,l,m,n}(z)$?
i) Für welche $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$ gibt es eine holomorphe Funktion $g \in \mathcal{O}(C)$ mit $\forall z \in C, g(z)^2 = h_{k,l,m,n}(z)$?
j) Für welche $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$ gibt es eine holomorphe Funktion $g \in \mathcal{O}(D)$ mit $\forall z \in D, g(z)^2 = h_{k,l,m,n}(z)$?

Aufgabe 11.3. Man betrachte den Homöomorphismus $\psi \colon \mathbb{C} \to B_1(0)$, $z \mapsto \frac{z}{|z|+1}$. Sei Z die Riemannsche Fläche mit topologischem Raum $\mathbb{C}$, die durch die Karte $(\mathbb{C}, \psi)$ induziert ist. Man zeige, dass Z biholomorph zu $B_1(0)$ ist. [Hinweis: $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ist mit der kanonischen Riemannschen-Flächen-Struktur versehen. Man vergleiche das Ende der Vorlesung 10.3.]

Aufgabe 11.4. Man betrachte die Riemannsche Zahlenkugel, d.h. die 2-dimensionale Sphäre S^2 mit der Riemannschen-Flächen-Struktur, die in der Vorlesung 10.2 beschrieben wurde. Man zeige, dass jede holomorphe Abbildung $f \colon S^2 \to \mathbb{C}$ konstant ist.

Aufgabe 11.5. Man identifiziere immer $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ mit $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ durch die Karte (U_0, φ_0), d.h. man betrachte immer die Bijektion $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, die für jedes $[z_0 : z_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ durch

$$[z_0 : z_1] \mapsto \begin{cases} \frac{z_1}{z_0} & \text{wenn } z_0 \neq 0, \\ \infty & \text{wenn } z_0 = 0, \end{cases}$$

definiert ist. Man betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

und die induzierte Abbildung $f = [A] \colon \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, d.h.

$$f(z) = \frac{z-1}{\mathrm{i}z + \mathrm{i}}.$$

i) Was ist die Umkehrabbildung von f?
ii) Was sind die Bilder der Punkte $0, 1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ via f?

iii) Was sind die Bilder der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ via f?

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0\} \\ \mathrm{i}\mathbb{R} &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = 0\} \\ S^1 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \\ B_1(0) &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \\ U &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\} \\ V &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\} \end{aligned}$$

[Hier werden keine rigorosen Beweise verlangt. Es genügt, die Ergebnisse anzugeben.]

Klausur 14.07.2020

Aufgabe 0.1. Betrachten Sie die formale Potenzreihe $f = \sum_{n\geq 0}(2^{n+1}-1)T^n \in \mathbb{C}[\![T]\!]$.

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius R von f.
b) Berechnen Sie das multiplikative Inverse von f im Ring $\mathbb{C}[\![T]\!]$.
c) Finden Sie eine meromorphe Funktion g auf $\mathbb{C}$, sodass für jedes $z \in B_R(0)$ $g(z) = f(z)$ gilt.

Aufgabe 0.2. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und sei $C \geq 0$ eine reelle Zahl mit

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)|^2 \leq C|z|.$$

Zeigen Sie, dass f die Nullfunktion ist.

Aufgabe 0.3. Mit Hilfe des Residuensatzes berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+9)}.$$

Aufgabe 0.4. Betrachten Sie die folgenden offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$:

$$A = \mathbb{C} \setminus \{0,1\},$$
$$B = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\},$$
$$C = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

Für alle $p, q \in \mathbb{C}$ betrachten Sie die 1-Form

$$\omega = \frac{pz+q}{z(z-1)}\mathrm{d}z$$

auf A.

a) Für welche $p, q \in \mathbb{C}$ ist die Form ω exakt auf A?
b) Für welche $p, q \in \mathbb{C}$ ist die Form $\omega|_B$ exakt auf B?
c) Für welche $p, q \in \mathbb{C}$ ist die Form $\omega|_C$ exakt auf C?

Aufgabe 0.5. Betrachten Sie das Polynom $f(z) = z^5 - 9\mathrm{i}z + 3 + 4\mathrm{i} \in \mathbb{C}[z]$. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von f im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$.

Aufgabe 0.6. Betrachten Sie die folgenden offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$:

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| < 1\} \qquad \text{und} \qquad V = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}\, z| < 1,\ |\mathrm{Im}\, z| < 1\}.$$

a) Sind U und V biholomorph? Wenn ja, geben Sie einen expliziten Biholomorphismus an.
b) Sind U und $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ biholomorph? Wenn ja, geben Sie einen expliziten Biholomorphismus an.

Aufgabe 0.7. Sei $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit

$$\forall z \in U, \quad \mathrm{Re}\, f(z) \leq \mathrm{Re}\, f(0).$$

Zeigen Sie, dass f konstant ist.