

1.2 $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0 \}$

28.04.2020

$\operatorname{Im}: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig
 $z \longmapsto \operatorname{Im} z$

$A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Urbild}}}{\operatorname{Im}^{-1}}([0, +\infty))$
 $\nwarrow$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow A$ ist abgeschlossen in $\mathbb{C}$

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^3 \geq |z|\} \quad 0 \in H$$

$$|\cdot|: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{stetig,} \\ z \mapsto |z|$$

$$\Rightarrow f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{stetig} \\ z \mapsto |z|^3 - |z|$$

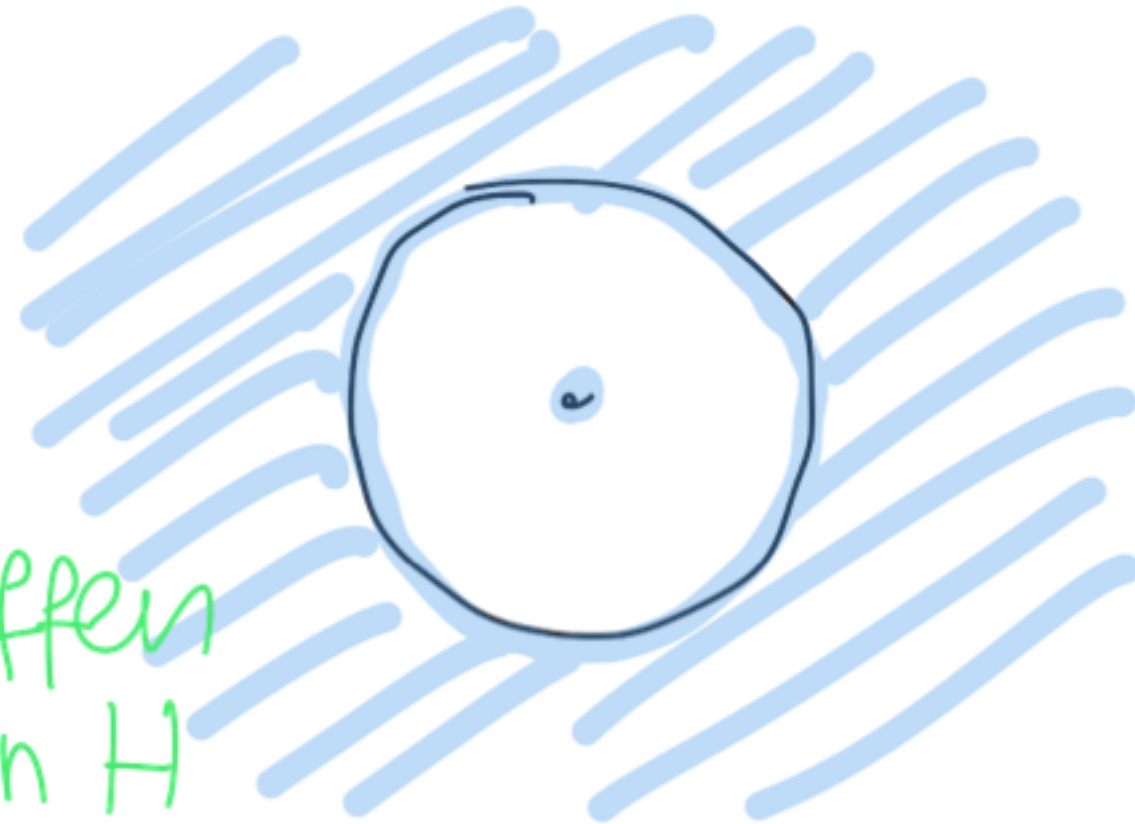
$$H = f^{-1}([0, +\infty)) \quad \text{abgeschlossen in } \mathbb{C}$$

H ist nicht zusammenhängend:

$$H = \left(H \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{1}{2}\} \right) \cup$$

$$\left(H \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \frac{1}{2}\} \right)$$

offen
in H



$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{1}{2}\}$ offen in $\mathbb{C}$

Teilraum-topologie auf $H \Rightarrow$

$H \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{1}{2}\}$ offen in H .

$$J = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \mid \left| \frac{1}{z+1} \right| < 1\}$$

$$\left| \frac{1}{z+1} \right| = \frac{1}{|z+1|} < 1 \iff \frac{1 - |z+1|}{|z+1|} < 0 \iff$$

$$\iff 1 - |z+1| < 0 \iff |z+1| > 1$$

$$\iff |z - (-1)| > 1$$

$\underbrace{\quad}_{\text{Distance (Metrik) zwischen } z \text{ \& } -1}$



$$f: \mathbb{C} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{stetig}$$

$$z \longmapsto \frac{1}{|z+1|}$$

$$J = f^{-1}((-\infty, 1)).$$

V $\mathbb{R}$ -Vektorraum

$b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ symmetric, definite > 0 , bilinear form
(scalar product)

$\forall v \in V \quad \|v\| = \sqrt{b(v, v)}$ Betrag (norm)

$\forall v_1, v_2 \in V \quad |b(v_1, v_2)| \leq \|v_1\| \|v_2\|$ (Cauchy-Schwarz)

$\forall v_1, v_2 \in V \setminus \{0\} \quad \frac{b(v_1, v_2)}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} \in [-1, 1]$

$\Rightarrow \exists! \theta \in [0, \pi] : \cos \theta = \frac{b(v_1, v_2)}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}$ NON ORIENTED ANGLE

Es gibt genau ein
There is exactly one

θ is called the ANGLE between v_1 & v_2 .

V $\mathbb{R}$ -Vektorraum, $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ Skalarprodukt

$$GL(V) = \{ f: V \rightarrow V \text{ linear, bijektiv} \}$$

$$\begin{aligned} O_b(V) &= \{ f \in GL(V) \mid \forall v_1, v_2 \in V, b(f(v_1), f(v_2)) = b(v_1, v_2) \} \\ &= \{ f \in GL(V) \mid \forall v \in V, \|f(v)\| = \|v\| \} \end{aligned}$$

$$\text{Conf}_b(V) = \{ f \in GL(V) \mid \forall v_1, v_2 \in V, \frac{b(f(v_1), f(v_2))}{\|f(v_1)\| \|f(v_2)\|} = \frac{b(v_1, v_2)}{\|v_1\| \|v_2\|} \}$$

$$O_b(V) \subseteq \text{Conf}_b(V) \subseteq GL(V)$$

$V = \mathbb{R}^n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ standard scalar product

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0 \}$$

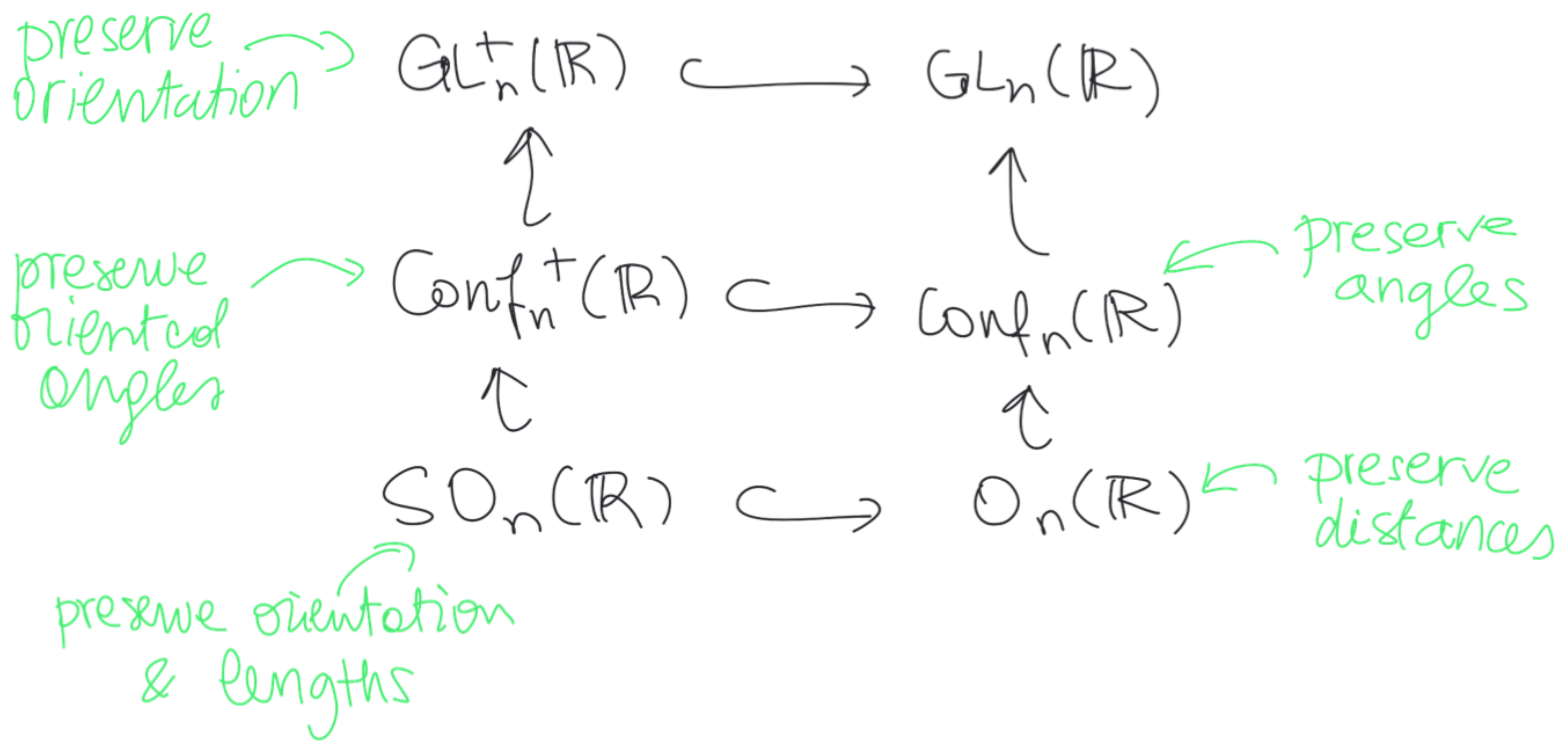
$$O_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^t A \cdot A = \underbrace{I_n}_{\text{Einheitsmatrix}} \}$$

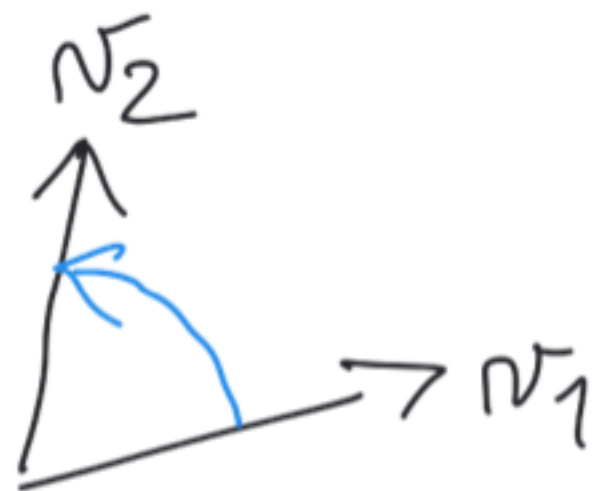
$$Conf_n(\mathbb{R}) = \left\{ A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \forall x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right. \\ \left. \frac{{}^t(Ax) \cdot Ay}{\|Ax\| \|Ay\|} = \frac{{}^t x \cdot y}{\|x\| \|y\|} \right\}$$

$$GL_n^+(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A > 0 \}$$

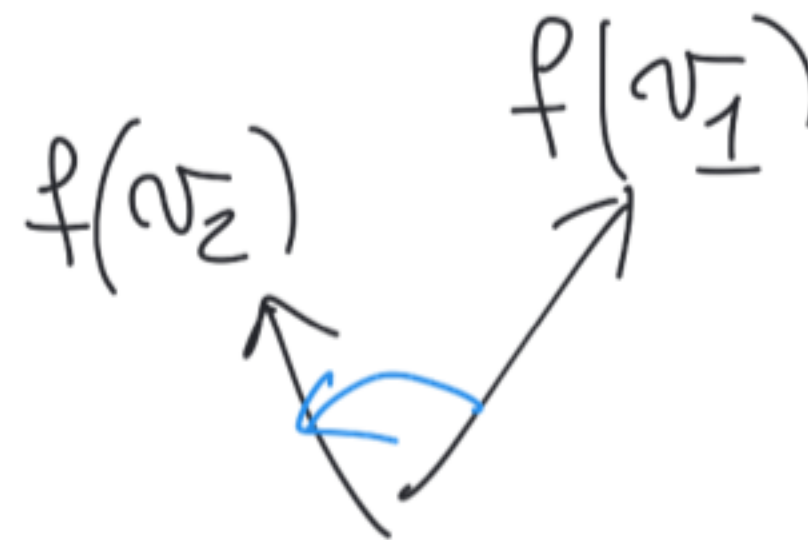
$$SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap GL_n^+(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^t A \cdot A = I_n, \det A = 1 \}$$

$$Conf_n^+(\mathbb{R}) = Conf_n(\mathbb{R}) \cap GL_n^+(\mathbb{R})$$

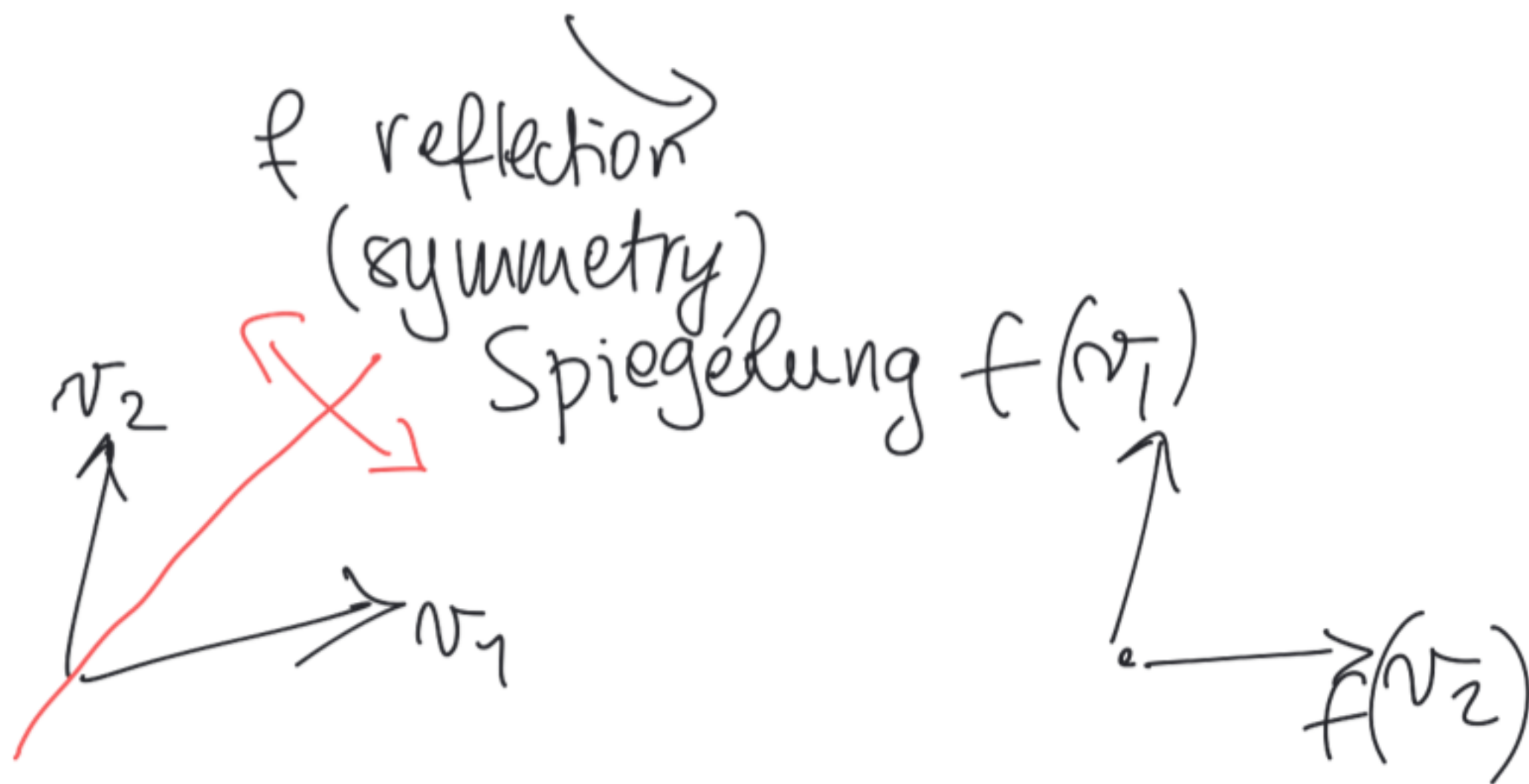




f rotation

anticlockwise



1.4.b) $A \in GL_2(\mathbb{R})$

(i) L_A preserves non-oriented angles

(ii) L_A " " perpendicularity

(iii) $Ae_1 \perp Ae_2$, $A(e_1 - e_2) \perp A(e_1 + e_2)$

(iv) $\exists a, b \in \mathbb{R} : a^2 + b^2 \neq 0$ $\&$

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

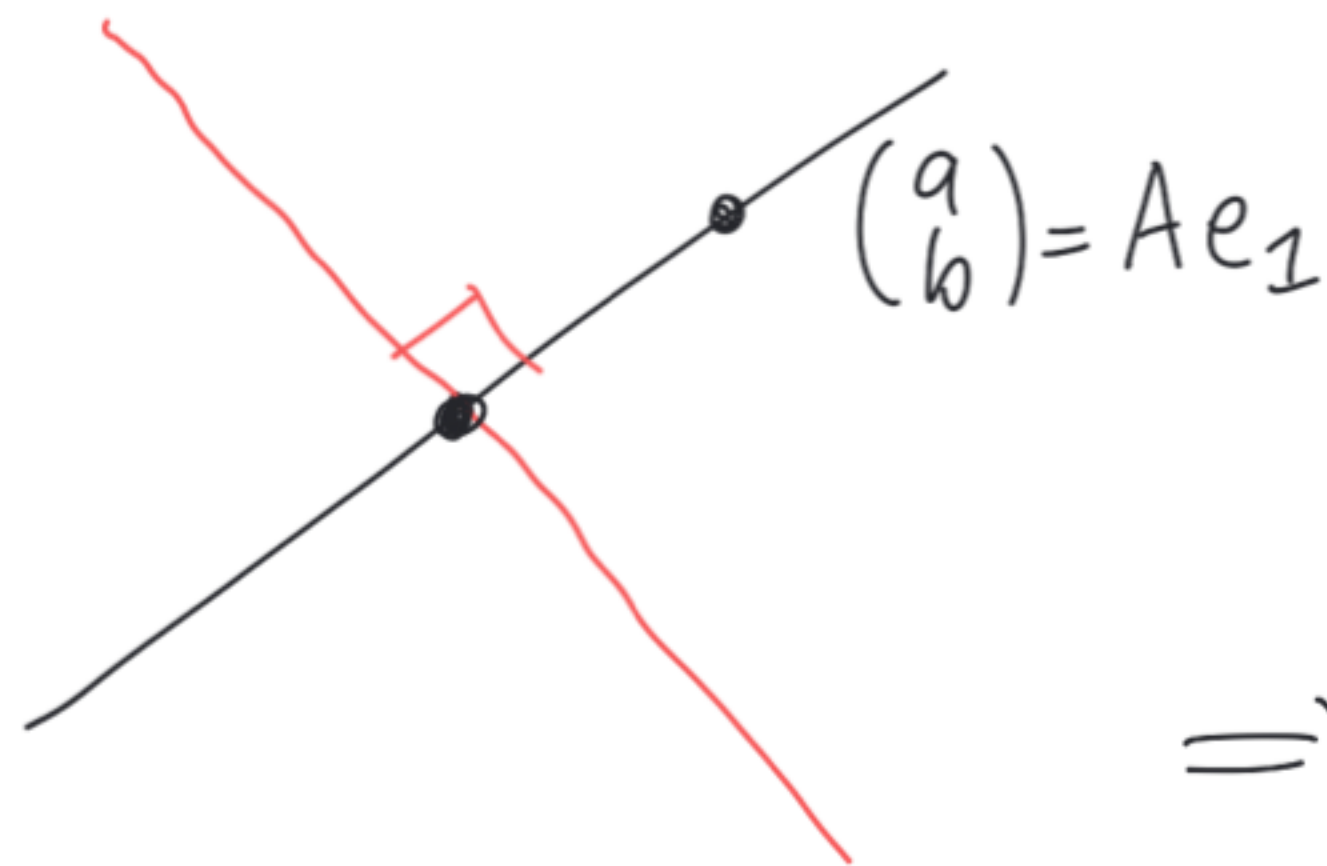
(i) $\Rightarrow$ (ii): perpendicularity is $90^\circ = \frac{\pi}{2}$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $e_1 \perp e_2$, $(e_1 - e_2) \perp (e_1 + e_2)$

(iii) $\Rightarrow$ (iv): $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad Ae_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$Ae_1 \perp Ae_2 \Rightarrow Ae_2 \in \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^\perp = \text{Span}_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ s.t.}$$

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = Ae_2 = \lambda \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & -\lambda b \\ b & \lambda a \end{pmatrix} \quad a, b, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$A(e_1 - e_2) \perp A(e_1 + e_2): \quad \begin{aligned} 0 &= (a + \lambda b)(a - \lambda b) + (b - \lambda a)(b + \lambda a) \\ &= a^2 - \lambda^2 b^2 + b^2 - \lambda^2 a^2 \\ &= (1 - \lambda^2)(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

$$a^2 + b^2 \neq 0 \quad (\text{otherwise } A = 0)$$

$$\Rightarrow 1 - \lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 \quad \text{or} \quad \lambda = -1$$

$$\Downarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

$$\dots \quad A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad Ae_1 \perp Ae_2 \Rightarrow ac + bd = 0$$

$$A(e_1 - e_2) \perp A(e_1 + e_2) \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

$$\rightarrow \text{If } a \neq 0 : c = -\frac{bd}{a} \dots$$

$$\rightarrow \text{If } b \neq 0 : d = -\frac{ac}{b} \dots$$

$$\text{inv} \Rightarrow i : A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

$${}^t A \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = (a^2 + b^2) I_2 \quad \text{or} \quad {}^t A \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = (a^2 + b^2) I_2$$

$$\Rightarrow {}^t A \cdot A = (a^2 + b^2) I_2$$

$$\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2, \langle Av_1, Av_2 \rangle = {}^t(Av_1) Av_2 = {}^t v_1 {}^t A A v_2 = \lambda \langle v_1, v_2 \rangle$$

$\lambda = a^2 + b^2$

$$\cos \text{angle}(Av_1, Av_2) = \frac{\langle Av_1, Av_2 \rangle}{\|Av_1\| \|Av_2\|} = \frac{\lambda \langle v_1, v_2 \rangle}{\sqrt{\lambda} \|v_1\| \sqrt{\lambda} \|v_2\|} =$$

$$= \cos \text{angle}(v_1, v_2). \quad \square$$

$$n=2 \quad GL_2^+(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ab - cd > 0 \right\} \leq GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ab - cd \neq 0 \right\}$$

orientation V/ V/

$$Conf_2^+(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a^2 + b^2 \neq 0 \right\} \leq Conf_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a^2 + b^2 \neq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \mid a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$

angles & orientation V/ angles V/

$$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \right\} \leq O_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \right\}$$

lengths & orientation ↑ rotations lengths & angles ↑ reflections

1.4a $\alpha = a + bi$ $\alpha \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{R}$

$$m_\alpha : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \alpha z$$

$\{1, i\}$ $\mathbb{R}$ -basis of $\mathbb{C}$

$$m_\alpha(1) = \alpha = a + bi = a \cdot 1 + b \cdot i$$

$$m_\alpha(i) = \alpha i = (a + bi)i = ai - b$$
$$= -b \cdot 1 + a \cdot i$$

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = A$$

If $\alpha = 0 \implies A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

If $\alpha \neq 0 \implies A \in \text{Conf}_2^+(\mathbb{R})$

1.5. $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 1 \right\}$

a) A nicht abgeschlossen in $[0, 1]$:

$\frac{1}{n} \rightarrow 0$ in $\mathbb{R} \Rightarrow A$ ist nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$

$[0, 1]$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

Wäre A abgeschlossen in $[0, 1]$, wäre A abgeschl. auch in $\mathbb{R}$. $\Downarrow$

$A \subseteq B \subseteq C$, A abgeschl. in B , B abgeschl. in $C \Rightarrow A$ abgeschl. in C
offen offen offen

b) A abgeschlossen in $(0,1]$:

$(0,1] \setminus A =$ union of open intervals

$\Rightarrow (0,1] \setminus A \stackrel{=}{=} \text{ist offen in } \mathbb{R}$
 $\Rightarrow (0,1] \setminus A \text{ ist offen in } (0,1].$

$$(0,1] \setminus A = (0,1] \cap \underbrace{((0,1] \setminus A)}_{\text{offen in } \mathbb{R}}$$

c) A offen in $A \cup \{0\}$:

$$A = (A \cup \{0\}) \cap \underbrace{(0, +\infty)}_{\text{offen in } \mathbb{R}}$$

Subspace topology on $A \cup \{0\}$ inherited from $\mathbb{R}$

X top. Raum.

X ist
diskret

$\Leftrightarrow$ jede Teilmenge von
 X ist offen in X

$\Leftrightarrow$

$\forall x \in X,$
 $\{x\}$ ist offen in X

i) $B = f(A \cup \{0\})$ sorry!

j) $h: A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, denn A ist diskret.

Bem X, Y top. Räume, $f: X \rightarrow Y$.

X diskret $\Rightarrow f$ ist stetig

BWS $A \subseteq Y$ offen $\Rightarrow f^{-1}(A)$ ist offen in X . $\square$

$$h) \quad f: A \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$a \in A$, ist isoliert in $A \cup \{0\}$: $\{a\}$ ist offen in $A \cup \{0\}$
So $\{a\}$ ist eine Umgebung von a in A .

$\forall U$ Umgebung von $f(a)$ in $\mathbb{R}$, $\{a\}$ ist eine Umg.
von a in A , sodass $f(\{a\}) = \{f(a)\} \subseteq U$.
 $\Rightarrow f$ ist stetig in a .

Wir müssen beweisen, dass f stetig in 0 ist.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0, \quad f(0) = 0$$