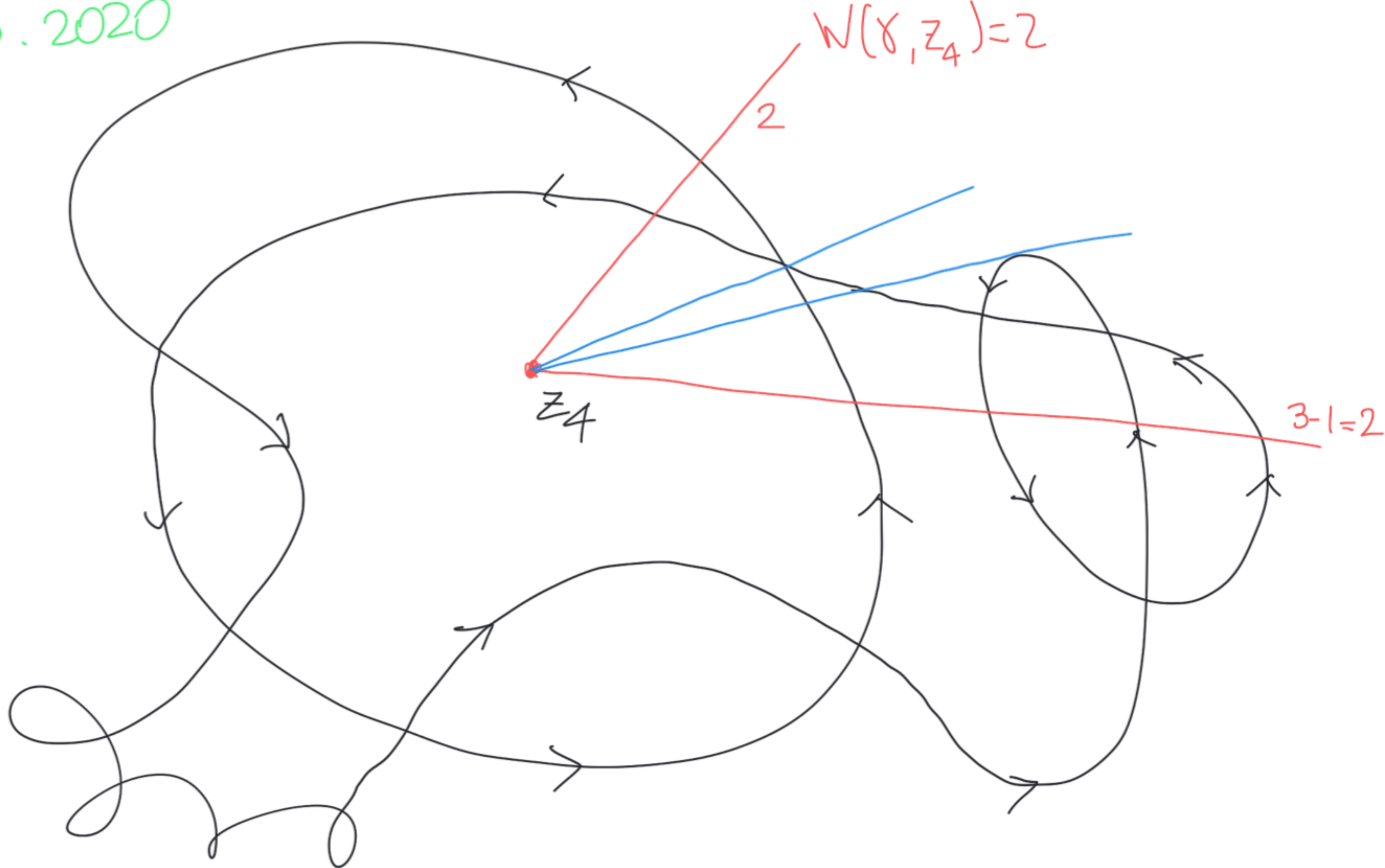


19.05.2020

4.31

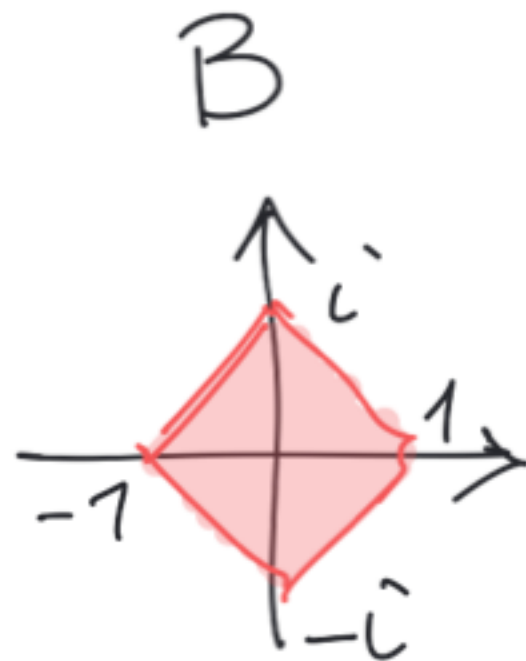
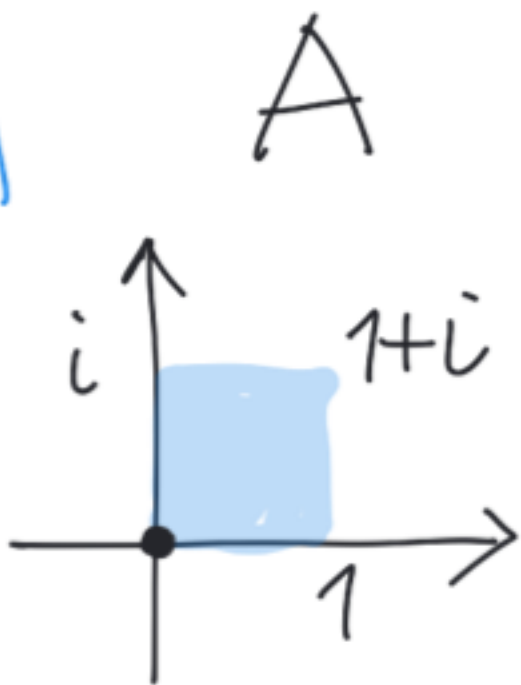


4.5.

$$g_{\alpha,0} \circ g_{1,\beta} \neq g_{\alpha,\beta}$$

$$g_{\alpha,0}(g_{1,\beta}(z)) = g_{\alpha,0}(z + \beta) = \alpha z + \alpha\beta + \beta$$

4.5.d



$$g \in G$$

$$g(A) = B$$

$$\begin{cases} g(0) = 1 \\ g(1) = i \end{cases}$$

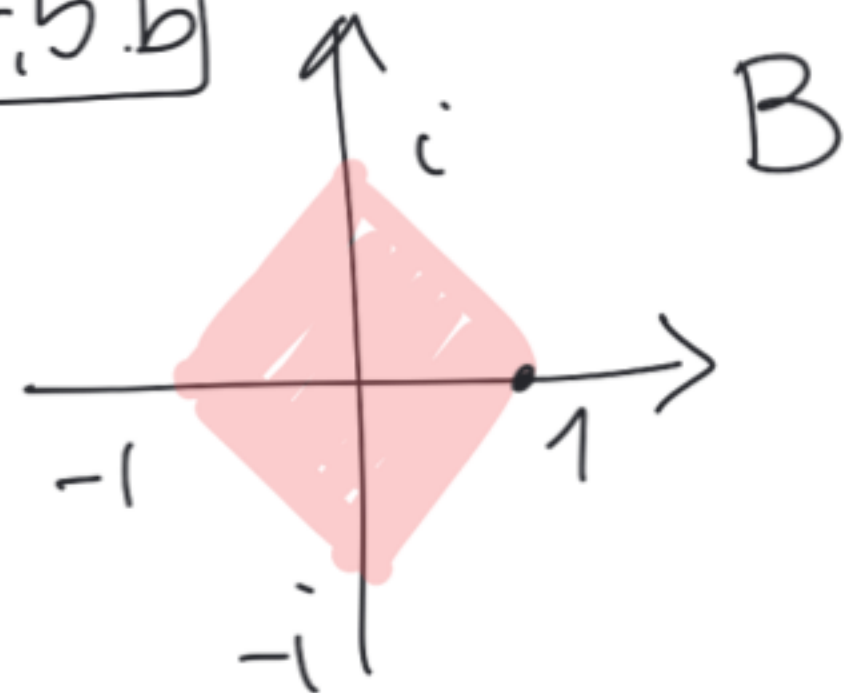
$$\begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha + \beta = i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = -1 + i \end{cases}$$

$$g: z \mapsto \alpha z + \beta$$

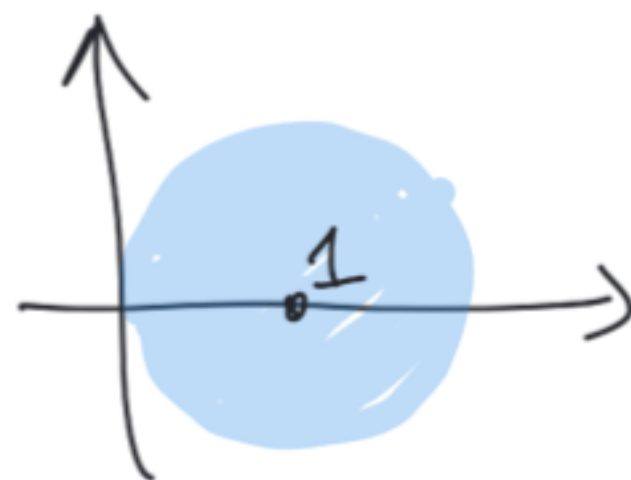
$$(\alpha, \beta) \in \{(-1+i, 1), (-1-i, i), (1-i, -1), (1+i, -i)\}$$

4.5.b



$$(\alpha, \beta) \in \{(1, 0), (i, 0), (-1, 0), (-i, 0)\}$$

4.5.c



$$g(B, (1)) = B, (1)$$

$$\begin{cases} g(1) = 1 \\ |\alpha| = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ |\alpha| = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha \in S^1 \\ \beta = 1 - \alpha \end{cases}$$

4.4.] $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

a) $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $\eta = \varphi(x^2+y^2) \cdot (x dx + y dy)$
auf U .

$\psi: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Stammfunktion von φ (nach Analysis:

$$\psi(t) = \int_1^t \varphi(t) dt \quad \forall t \in (0, +\infty))$$

$F: U \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 , weil ψ C^1 ist
 $(x,y) \mapsto \frac{1}{2} \psi(x^2+y^2)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{2} \varphi(x^2+y^2) \cdot 2x = \varphi(x^2+y^2) \cdot x \quad dF = \eta$$

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \quad \text{auf} \quad U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

(b) ω geschlossen: $\omega \in C^1$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

(c) ω lokal exakt:

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\} \quad v: V \rightarrow \mathbb{R} \quad v(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\} \quad w: W \rightarrow \mathbb{R} \quad w(x,y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$U = V \cup W$$

$$\tan: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\arctan\left(\frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan\left(\frac{\sin \frac{3\pi}{4}}{\cos \frac{3\pi}{4}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\arctan\left(\frac{\sin \frac{7\pi}{4}}{\cos \frac{7\pi}{4}}\right) = \arctan\left(\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\arctan\left(\frac{\sin \frac{9\pi}{4}}{\cos \frac{9\pi}{4}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$t \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z} \right) :$$

$$\arctan\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right) = t \iff -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} < t < \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \arctan\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right) = t - \pi$$

$$\frac{3}{2}\pi < t < \frac{5}{2}\pi \Rightarrow \arctan\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right) = t - 2\pi$$

$$\frac{5}{2}\pi < t < \frac{7}{2}\pi \Rightarrow \arctan\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right) = t - 3\pi$$

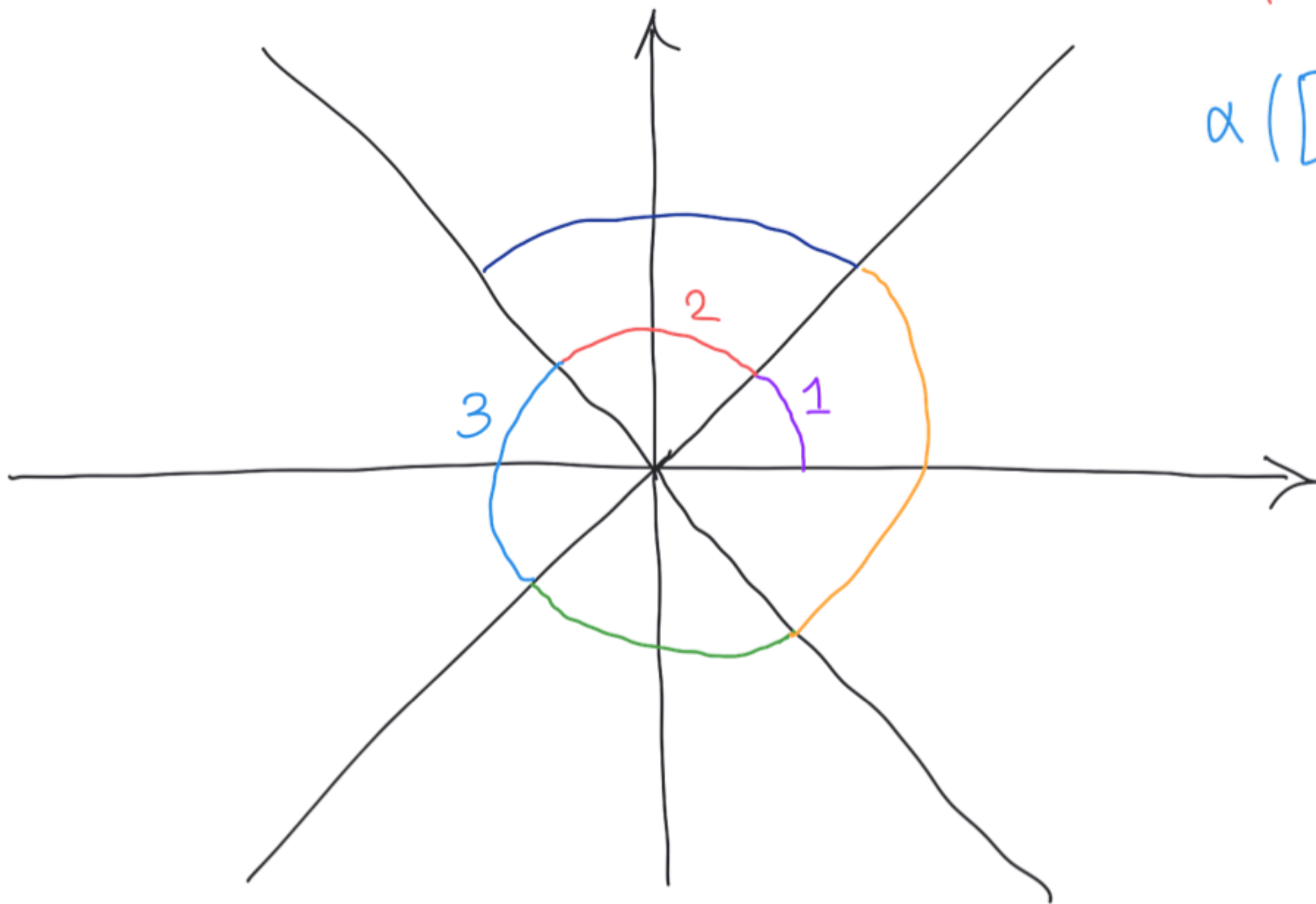
$$\alpha: [0, 4\pi] \longrightarrow V$$

$$t \longmapsto (e^t \cos t, e^t \sin t)$$

$$\alpha\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right) \subseteq V$$

$$\alpha\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]\right) \subseteq W$$

$$\alpha\left(\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]\right) \subseteq V$$



$$\alpha\left([0, \frac{\pi}{4}]\right) \subseteq V$$

can use $v: V \rightarrow \mathbb{R}$ to construct the primitive

$$f: [0, \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= v(\alpha(t)) = v(e^t \cos t, e^t \sin t) = \arctan\left(\frac{e^t \sin t}{e^t \cos t}\right) = \\ &= \arctan\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right) = t \end{aligned}$$

$\nwarrow 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$

$\alpha\left([\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi]\right) \subseteq W$. Should use $w: W \rightarrow \mathbb{R}$ to extend my primitive f to $[0, \frac{3}{4}\pi]$.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} w\left(\alpha\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) &= w\left(e^{\frac{\pi}{4}} \cos \frac{\pi}{4}, e^{\frac{\pi}{4}} \sin \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= -\arctan\left(\frac{e^{\frac{\pi}{4}} \cos \frac{\pi}{4}}{e^{\frac{\pi}{4}} \sin \frac{\pi}{4}}\right) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$f: [0, \frac{3}{4}\pi] \rightarrow U$$

$$f(t) = \begin{cases} \text{old definition, i.e. } t \\ w(\alpha(t)) + \frac{\pi}{2} = \end{cases}$$

$$= w(e^t \cos t, e^t \sin t) + \frac{\pi}{2}$$

$$= -\arctan\left(\frac{e^t \cos t}{e^t \sin t}\right) + \frac{\pi}{2}$$

$$= -\arctan\left(\frac{\cos t}{\sin t}\right) + \frac{\pi}{2}$$

$$= t$$

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}\pi$$

$\alpha\left(\left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right]\right) \subseteq V$. Should use v to get extended my primitive to $\left[0, \frac{5}{4}\pi\right]$.

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{3}{4}\pi$$

$$v\left(\alpha\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right) = v\left(e^{\frac{3}{4}\pi} \cos \frac{3}{4}\pi, e^{\frac{3}{4}\pi} \sin \frac{3}{4}\pi\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{e^{\frac{3}{4}\pi} \sin \frac{3}{4}\pi}{e^{\frac{3}{4}\pi} \cos \frac{3}{4}\pi}\right) =$$

$$= \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

Can define $f: \left[0, \frac{5}{4}\pi\right] \rightarrow \mathbb{R}$

$$0 \leq t \leq \frac{3}{4}\pi$$

$$f(t) = \begin{cases} \text{old definition, i.e. } t \\ v(\alpha(t)) + \pi = \arctan(\tan t) + \pi = t \end{cases}$$

$$\frac{3}{4}\pi \leq t \leq \frac{5}{4}\pi$$

Solution of Laurenz Upmeyer zu Belzen

⑤

Aufgabe 4.4. Sei $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Sei $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Betrachten Sie die folgenden 1-Formen auf U :

$$\eta = \varphi(x^2 + y^2) \cdot (x dx + y dy) \quad \text{und} \quad \omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

- a) Zeigen Sie, dass η exakt ist.
- b) Zeigen Sie, dass ω geschlossen ist.
- c) Zeigen Sie explizit, dass ω lokal exakt ist. Genauer, finden Sie eine offene Überdeckung $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ von U und für jedes $\lambda \in \Lambda$ eine Stammfunktion $F_\lambda: U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$ von $\omega|_{U_\lambda}$.
- d) Finden Sie eine Stammfunktion von ω entlang des Weges $\alpha: [0, 4\pi] \rightarrow U, t \mapsto (e^t \cos t, e^t \sin t)$.
- e) Finden Sie eine Stammfunktion von ω entlang des Weges $\beta: [0, 3] \rightarrow U, t \mapsto (\cos(t^2), \sin(t^2))$.

a) gesucht ist eine C^1 -Abbildung $F: U \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = \varphi(x^2 + y^2) \cdot (x dx + y dy) = \eta$$

gilt, d.h.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \varphi(x^2 + y^2) \cdot x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \varphi(x^2 + y^2) \cdot y.$$

Dies ist erfüllt für die C^1 -Abbildung $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(x, y) := \frac{1}{2} \int_{x_0^2 + y_0^2}^{x^2 + y^2} \varphi(t) dt \quad \text{mit } x_0, y_0 \in U \text{ beliebig fest,}$$

$$\text{dann } \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{2} \varphi(x^2 + y^2) \cdot 2x = \varphi(x^2 + y^2) x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{2} \varphi(x^2 + y^2) \cdot 2y = \varphi(x^2 + y^2) y.$$

Somit gilt $\eta = dF$ und η ist somit exakt. ▀

b) offensichtlich ist $\omega = \underbrace{\frac{-y}{x^2 + y^2}}_{=: \omega_1} dx + \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2}}_{=: \omega_2} dy$ C^1 auf U und es gilt

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{auf } U,$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

d.h. $\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}$ auf U . Somit ist gezeigt, dass ω geschlossen ist. ▀

- c) Definiere $\bullet U_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\} \subseteq U$ offensichtlich offen
 $\bullet U_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\} \subseteq U$ offensichtlich offen

Und es gilt $U_1 \cup U_2 = U$. Somit ist $\{U_1, U_2\}$ eine offene Überdeckung von U . Nun ist zu zeigen, dass

- $\omega|_{U_1}$ eine exakte 1-Form auf U_1 , und
- $\omega|_{U_2}$ eine exakte 1-Form auf U_2 ist.

Betrachte dazu die folgenden offensichtlich C^1 -Abbildungen:

- $F: U_1 \longrightarrow \mathbb{R}: (x,y) \longmapsto \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$
- $G: U_2 \longrightarrow \mathbb{R}: (x,y) \longmapsto -\arctan\left(\frac{x}{y}\right).$

Es gilt:

$$\left. \begin{aligned} \bullet \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \text{auf } U_1, \\ \bullet \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{auf } U_1, \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega|_{U_1} = dF \text{ und somit ist } \omega|_{U_1} \text{ eine exakte 1-Form auf } U_1.$$

$$\left. \begin{aligned} \bullet \frac{\partial G}{\partial x} &= -\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{-x}{y^2+x^2} \quad \text{auf } U_2, \\ \bullet \frac{\partial G}{\partial y} &= -\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{x}{y^2+x^2} \quad \text{auf } U_2. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega|_{U_2} = dG \text{ und somit ist } \omega|_{U_2} \text{ eine exakte 1-Form auf } U_2.$$

Da $\{U_1, U_2\}$ eine offene Überdeckung von U ist, ist somit gezeigt, dass $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ lokal exakte 1-Form auf U ist. 

- d) Es gilt $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, ω lokal exakte 1-Form auf U (nach c)), und $\alpha: [0, 4\pi) \longrightarrow U: t \longmapsto (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$ ist ein Weg. Somit gibt es nach Satz aus VL eine Stammfunktion von ω entlang α , welche eindeutig bis auf eine additive Konstante ist.

- Definiere: $\bullet U_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} \subseteq U$ offensichtlich offen
 $\bullet U_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \subseteq U$ offensichtlich offen
 $\bullet U_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\} \subseteq U$ offensichtlich offen
 $\bullet U_4 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\} \subseteq U$ offensichtlich offen

Definiere:

$$F_1 := U_1 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$F_2 := U_2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\pi}{2}$$

$$F_3 := U_3 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{2\pi}{2}$$

$$F_4 := U_4 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{3\pi}{2}$$

$$F_5 := U_1 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{4\pi}{2}$$

$$F_6 := U_2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{5\pi}{2}$$

$$F_7 := U_3 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{6\pi}{2}$$

$$F_8 := U_4 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{7\pi}{2}$$

$$F_9 := U_1 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{8\pi}{2}$$

Stammfunktionen von $\omega|_{U_i}$ ($1 \leq i \leq 4$) nach c)

Es gilt:

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ auf } U_1 \cap U_2 \text{ und } U_3 \cap U_4 \text{ und}$$

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\pi}{2} \text{ auf } U_2 \cap U_3 \text{ und } U_4 \cap U_1.$$

Somit gilt:

$$\left. \begin{aligned} F_1|_{U_1 \cap U_2} &= F_2|_{U_1 \cap U_2}, & F_2|_{U_2 \cap U_3} &= F_3|_{U_2 \cap U_3}, \\ F_3|_{U_3 \cap U_4} &= F_4|_{U_3 \cap U_4}, & F_4|_{U_4 \cap U_1} &= F_5|_{U_4 \cap U_1}, \\ F_5|_{U_1 \cap U_2} &= F_6|_{U_1 \cap U_2}, & F_6|_{U_2 \cap U_3} &= F_7|_{U_2 \cap U_3}, \\ F_7|_{U_3 \cap U_4} &= F_8|_{U_3 \cap U_4}, & F_8|_{U_4 \cap U_1} &= F_9|_{U_4 \cap U_1}. \end{aligned} \right\} (*)$$

Nun wollen wir eine stetige Abbildung $f: [0, 4\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definieren, sodass $\forall t \in [0, 4\pi], \exists$ offene Umgebung V von $\alpha(t)$ in U und eine Stammfunktion $F: V \longrightarrow \mathbb{R}$ von $\omega|_V: F \circ \alpha|_{\alpha^{-1}(V)} = f|_{\alpha^{-1}(V)}$, d.h. $\forall t \in \gamma^{-1}(V): F(\gamma(t)) = f(t)$.

Definiere $f: [0, 4\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ wie folgt:

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{4}] : f(t) = F_1(\alpha(t)) = \arctan\left(\frac{e^t \sin(t)}{e^t \cos(t)}\right) = t$$

$$\forall t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] : f(t) = F_2(\alpha(t)) = -\arctan\left(\frac{e^t \cos(t)}{e^t \sin(t)}\right) + \frac{\pi}{2} = t$$

$$\forall t \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] : f(t) = F_3(\alpha(t)) = \arctan\left(\frac{e^t \sin(t)}{e^t \cos(t)}\right) + \frac{2\pi}{2} = t$$

$$\forall t \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}] : f(t) = F_4(\alpha(t)) = -\arctan\left(\frac{e^t \cos(t)}{e^t \sin(t)}\right) + \frac{3\pi}{2} = t$$

$$\forall t \in [\frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}] : f(t) = F_5(\alpha(t)) = \arctan\left(\frac{e^t \sin(t)}{e^t \cos(t)}\right) + \frac{4\pi}{2} = t$$

$$\forall t \in [\frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}] : f(t) = F_6(\alpha(t)) = -\arctan\left(\frac{e^t \cos(t)}{e^t \sin(t)}\right) + \frac{5\pi}{2} = t$$

$$\forall t \in [\frac{11\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}] : f(t) = F_7(\alpha(t)) = \arctan\left(\frac{e^t \sin(t)}{e^t \cos(t)}\right) + \frac{6\pi}{2} = t$$

$$\forall t \in [\frac{13\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}] : f(t) = F_8(\alpha(t)) = -\arctan\left(\frac{e^t \cos(t)}{e^t \sin(t)}\right) + \frac{7\pi}{2} = t$$

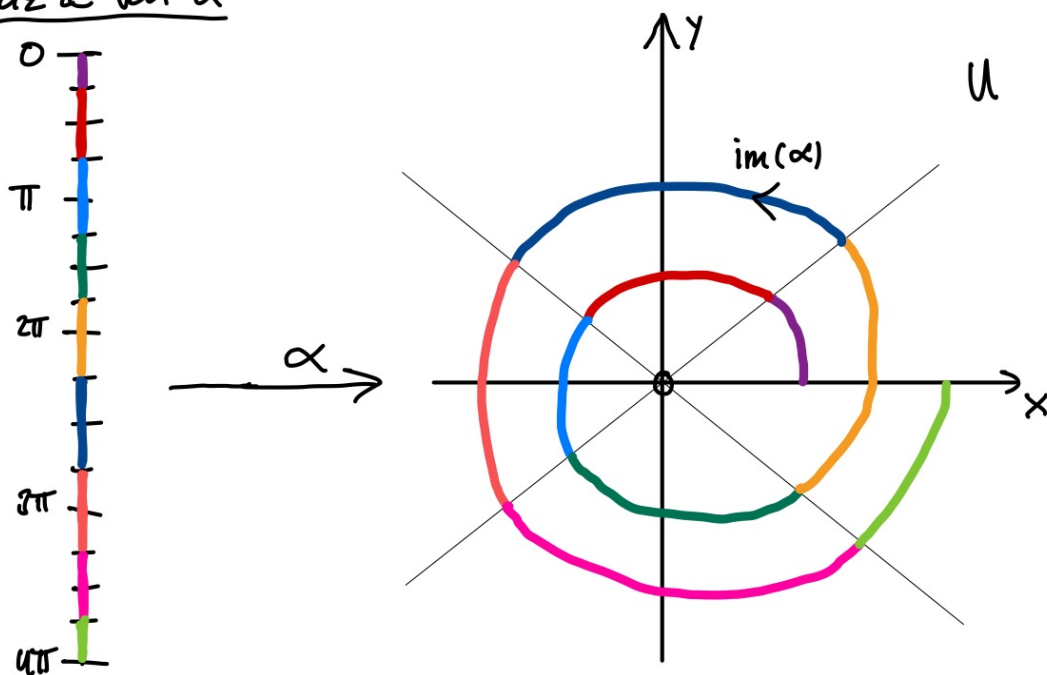
$$\forall t \in [\frac{15\pi}{4}, 4\pi] : f(t) = F_9(\alpha(t)) = \arctan\left(\frac{e^t \sin(t)}{e^t \cos(t)}\right) + \frac{8\pi}{2} = t$$

Nach (*) auf Seite (7) ist $f: [0, 4\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und es gilt nach Definition von $\arctan$, dass $f(t) = t \quad \forall t \in [0, 4\pi]$.

Zudem ist $f: [0, 4\pi] \longrightarrow \mathbb{R} : t \longmapsto t$ nach Definition oben und (*) eine Stammfunktion von $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ entlang $\alpha: [0, 4\pi] \longrightarrow U$
 $t \longmapsto (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$.

($\forall t \in [0, 4\pi]$ können wir eine der U_i ($1 \leq i \leq 4$) offene Umgebung von $\alpha(t)$ in U und dann das passende F_j ($1 \leq j \leq 9$) als Stammfunktion auf U_i von $\omega|_{U_i}$ wählen.)

Skizze von α :



e) Mit U_i ($1 \leq i \leq 4$) und F_j ($1 \leq j \leq 9$) aus d) folgt analog zu d), ^⑨
 dass $f: [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert als

$$\forall t \in [0, \frac{\sqrt{\pi}}{2}): f(t) = F_1(\beta(t)) = \arctan\left(\frac{\sin(t^2)}{\cos(t^2)}\right) = t^2$$

$$\forall t \in [\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{2\pi}}{2}): f(t) = F_2(\beta(t)) = -\arctan\left(\frac{\cos(t^2)}{\sin(t^2)}\right) + \frac{\pi}{2} = t^2$$

$$\forall t \in [\frac{\sqrt{2\pi}}{2}, \frac{\sqrt{3\pi}}{2}): f(t) = F_3(\beta(t)) = \arctan\left(\frac{\sin(t^2)}{\cos(t^2)}\right) + \frac{2\pi}{2} = t^2$$

$$\forall t \in [\frac{\sqrt{3\pi}}{2}, \frac{\sqrt{4\pi}}{2}): f(t) = F_4(\beta(t)) = -\arctan\left(\frac{\cos(t^2)}{\sin(t^2)}\right) + \frac{3\pi}{2} = t^2$$

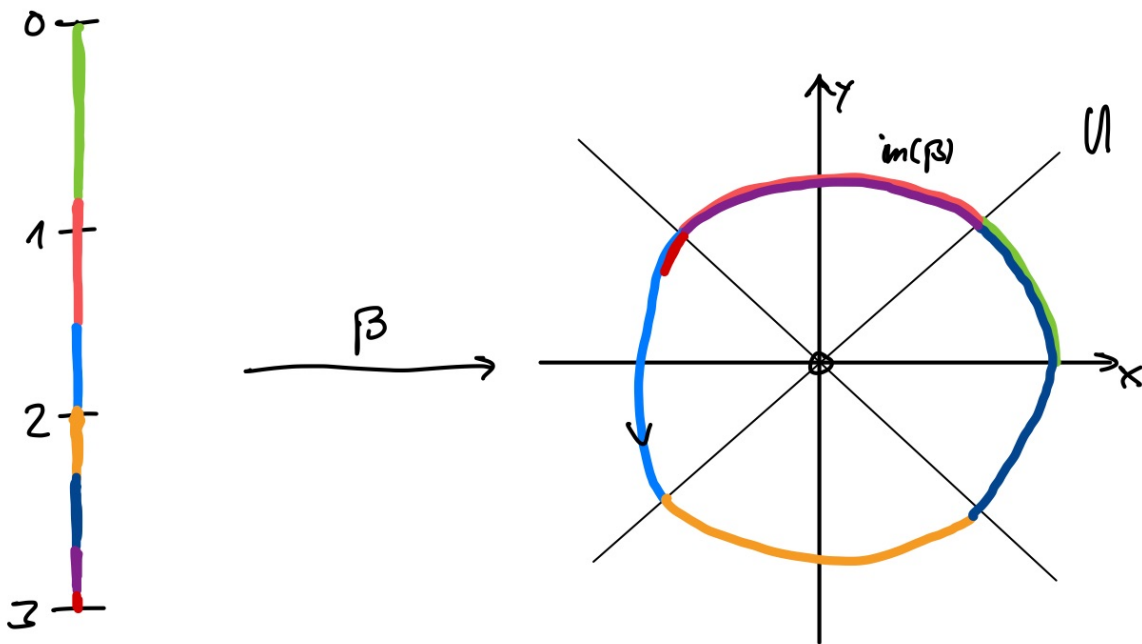
$$\forall t \in [\frac{\sqrt{4\pi}}{2}, \frac{\sqrt{5\pi}}{2}): f(t) = F_5(\beta(t)) = \arctan\left(\frac{\sin(t^2)}{\cos(t^2)}\right) + \frac{4\pi}{2} = t^2$$

$$\forall t \in [\frac{\sqrt{5\pi}}{2}, \frac{\sqrt{6\pi}}{2}): f(t) = F_6(\beta(t)) = -\arctan\left(\frac{\cos(t^2)}{\sin(t^2)}\right) + \frac{5\pi}{2} = t^2$$

$$\forall t \in [\frac{\sqrt{6\pi}}{2}, 3]: f(t) = F_7(\beta(t)) = \arctan\left(\frac{\sin(t^2)}{\cos(t^2)}\right) + \frac{6\pi}{2} = t^2,$$

also $f: [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}: t \longmapsto t^2$ eine Stammfunktion von
 $\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$ entlang $\beta: [0, 3] \longrightarrow U$
 $t \longmapsto (\cos(t^2), \sin(t^2))$ ist.

Skizze von β :



4.1. | There is no continuous function $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$
s.t. $\forall z \in \mathbb{C} \quad e^{f(z)} = z$.

$$\begin{aligned} \exp: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}^* \\ z &\mapsto e^z \end{aligned}$$

$$\exp \circ f = \text{id}_{\mathbb{C}^*}$$

1st way: $\mathbb{C}$ convex $\Rightarrow f \circ \exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und $\text{id}_{\mathbb{C}}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind homotop

$\Rightarrow f$ und $\exp$ sind Homotopieäquivalenzen

$\Rightarrow \mathbb{C}$ und $\mathbb{C}^*$ sind homotopieäquivalent

$$\Rightarrow \pi_1(\mathbb{C}) \cong \pi_1(\mathbb{C}^*)$$

trivial group $\{e\}$

$$\mathbb{Z}$$



X top. Raum, $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex

$f: X \rightarrow Y$, $g: X \rightarrow Y$ stetig

$\Rightarrow f$ und g sind homotop

Bws $F(x,s) = (1-s)f(x) + s g(x)$.

2nd way $\exp \circ f = \text{id}_{\mathbb{C}^*}$, $z_0 \in \mathbb{C}^*$

$$\pi_1(\mathbb{C}^*, z_0) \xrightarrow{\pi_1(f, z_0)} \pi_1(\mathbb{C}, f(z_0)) \xrightarrow{\pi_1(\exp, f(z_0))} \pi_1(\mathbb{C}^*, z_0)$$

$\pi_1(\text{id}_{\mathbb{C}^*}, z_0) = \text{id}_{\pi_1(\mathbb{C}^*, z_0)}$

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Null hom.}} \{e\} \xrightarrow{\text{Null hom.}} \mathbb{Z}$$

$\text{id}_{\mathbb{Z}}$

G group, $\{e\}$ trivial group

$$G \longrightarrow \{e\}$$

$$g \longmapsto e$$

Nullhomomorphism

$$\{e\} \longrightarrow G$$

$$e \longmapsto e_G$$

Nullhomomorphism

G, H groups

Nullhomomorphism

$$G \longrightarrow H$$

$$g \longmapsto e_H$$

X top space, $x_0 \in X$ $\rightsquigarrow$ group $\pi_1(X, x_0)$

X, Y top. spaces
 $x_0 \in X, y_0 \in Y$
 $f: X \rightarrow Y$ continuous
 $f(x_0) = y_0$

group homomorphism

$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\pi_1(f, x_0)} \pi_1(Y, y_0)$

$\text{id}_X: X \rightarrow X$ $\rightsquigarrow$ $\pi_1(\text{id}_X, x_0) = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$
 $x_0 \mapsto y_0 \mapsto z_0$

$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\pi_1(f, x_0)} \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{\pi_1(g, y_0)} \pi_1(Z, z_0)$
 $\pi_1(g \circ f, x_0)$

4.2 $g: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ continuous s.t. $g(z)^n = z \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$.
 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$.

$$p_n: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* \\ z \mapsto z^n$$

$$p_n \circ g = \text{id}_{\mathbb{C}^*}, \quad z_0 \in \mathbb{C}^*$$

$$\pi_1(\mathbb{C}^*, z_0) \xrightarrow{\pi_1(g, z_0)} \pi_1(\mathbb{C}^*, g(z_0)) \xrightarrow{\pi_1(p_n, z_0)} \pi_1(\mathbb{C}^*, z_0)$$

$$\text{id}_{\pi_1(\mathbb{C}^*, z_0)}$$

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\quad} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}$$

$\text{id}_{\mathbb{Z}}$

$\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}$ is not
 $k \mapsto kn$ surjective because
 1 is not in the
 image, because
 $|n| \geq 2$.

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{g_*} \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z}$$

$\text{id}_{\mathbb{Z}}$

$\left[\begin{array}{l} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \text{ sets} \\ g \circ f \text{ bijective} \Rightarrow g \text{ surjective \& } f \text{ injective} \end{array} \right]$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

stetig

$$x_0 \in X, y_0 = f(x_0), z_0 = g(y_0)$$

$$f_* = \pi_1(f, x_0): \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

$$g_* = \pi_1(g, y_0)$$

$$(g \circ f)_* = \pi_1(g \circ f, x_0)$$

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

$$[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$$

$$(g \circ f)_*([\gamma]) = [(g \circ f) \circ \gamma]$$

$$\begin{aligned} (g_* \circ f_*)([\gamma]) &= g_*(f_*([\gamma])) = g_*([\gamma \circ f]) = \\ &= [g \circ (\gamma \circ f)] \end{aligned}$$