

2.6.2020

6.3 und 6.4

$U \subseteq \mathbb{C}$ offen.

a) $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph $\Rightarrow$ $\operatorname{Re} f: U \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch
 $\operatorname{Im} f: U \rightarrow \mathbb{R}$

$$f = u + iv$$

$$f \in C^\infty \Rightarrow u, v \in C^\infty$$

C.R. Gleichungen

b) $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad \text{reelle 1-Form auf } U.$$

$$u \in C^2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x} \in C^1 \Rightarrow \omega \in C^1$$

$$\omega \text{ geschlossen} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

c) $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch, U einfach zusammenhängend

$\omega = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$ geschlossen auf $U \Rightarrow \omega$ lokal exakt.

$\Rightarrow \omega$ exakt $\Rightarrow$ sei $v: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von ω .

$\uparrow$
 U einfach
 zusammenhängend

$$\text{Dann: } \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = dv = \omega = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{C.R.}$$

$\Rightarrow u+iv: U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphic.

a) $\Rightarrow v$ ist harmonisch.

Beispiel $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $u: U \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x,y) = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2)$

$$u(z) = \log |z|$$

u ist harmonisch.

u ist der reelle Teil von keiner holomorphen Abbildung $U \rightarrow \mathbb{C}$.

By contradiction: $\exists v: U \rightarrow \mathbb{R}$ s.d. $u+iv \in \mathcal{O}(U)$.

$$\text{C.R.} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2} \frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$dv = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

aber diese 1-Form ist nicht exakt auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\Rightarrow v$ kann nicht existieren.

6.4 d) $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch $\Rightarrow$
 u ist C^∞

$z_0 \in U$, $r > 0$, $B_r(z_0) \subseteq U$. Es genügt, zu beweisen, dass
 $u|_{B_r(z_0)}$ C^∞ ist.

6.3 c $B_r(z_0)$ einfach zusammenhängend $\Rightarrow$

$\exists f \in \mathcal{O}(B_r(z_0))$ s.d. $\operatorname{Re} f = u|_{B_r(z_0)}$.

$f \in C^\infty \Rightarrow u|_{B_r(z_0)} \in C^\infty$.

6.4e, 6.4f : einfach.

6.4g : $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch, nicht konstant
 $\Rightarrow u(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend $\xRightarrow{6.3.c} \exists f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) : \operatorname{Re} f = u$.

$\sup_{\mathbb{R}^2} u = +\infty$; sonst $\sup_{z \in \mathbb{C}} \operatorname{Re} f(z) < +\infty \Rightarrow f$ konstant
 $\uparrow$ Korollar zu Liouville $\downarrow$ u konstant

$\inf_{\mathbb{R}^2} u = -\infty$; sonst $\xRightarrow{6.2b} f$ konstant $\Rightarrow u$ konstant.

$\mathbb{R}^2$ zusammenhängend $\Rightarrow u(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend $\Rightarrow$

$u(\mathbb{R}^2)$ ist ein Intervall $\Rightarrow u(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$.

6.2 a) $p \geq 0$ ganz. $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$

$C, R > 0$: $\forall z \in \mathbb{C} \setminus B_R(0) \quad |f(z)| \leq C |z|^p$.

$\Rightarrow f$ ist ein Polynom mit $\text{Grade} \leq p$.

$\exists a = \sum_{n \geq 0} a_n T^n \in \mathbb{C}[[T]]$ mit Konvergenzradius $+\infty$,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

$$\forall r > 0, \quad M(r) := \max_{\partial B_r(0)} |f| = \max_{z \in \partial B_r(0)} |f(z)|$$

Cauchyische Abschätzung $\Rightarrow \forall n \geq 0, \forall r > 0 \quad |a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$.

Hypothesis $\Rightarrow \forall r \geq R, M(r) \leq C r^p$.

Sei $n > p$ fest. $\forall r \geq R \quad |a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \leq \frac{C r^p}{r^n} = \frac{C}{r^{n-p}}$

$n-p > 0 \Rightarrow |a_n| \leq \inf_{r \geq R} \frac{C}{r^{n-p}} = 0 \Rightarrow |a_n| = 0$

$\Rightarrow a_n = 0.$

$\forall n > p, \quad a_n = 0 \Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^p a_n z^n.$

f ist ein Polynom mit
Grade $\leq p$.

Kor $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $\sup_{\mathbb{C}} \operatorname{Re} f < +\infty \implies f$ konstant.

BWS $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto e^{f(z)}$ $C = \sup_{\mathbb{C}} \operatorname{Re} f < +\infty, C \in \mathbb{R}.$

$\forall z \in \mathbb{C} \quad |g(z)| = |e^{f(z)}| = e^{\operatorname{Re} f(z)} \leq e^C.$ g ist beschränkt

$g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \xRightarrow{\text{Liouville}} g$ ist konstant.

$\exists w \in \mathbb{C}: \forall z \in \mathbb{C} \quad e^{f(z)} = g(z) = w.$

$\exp \circ f$ ist
konstant

$$f(\mathbb{C}) \subseteq \exp^{-1}(w).$$

$\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ holomorph, nicht konstant, auf einer zusammenhängenden
offenen TM von $\mathbb{C}$

$\implies \exp^{-1}(w)$ ist diskret.

$$\left. \begin{array}{l} f(\mathbb{C}) \text{ zusammenhängend} \\ \exp^{-1}(w) \text{ diskret} \\ f(\mathbb{C}) \subseteq \exp^{-1}(w) \end{array} \right\} \Rightarrow f(\mathbb{C}) \text{ ist ein Punkt} \\ \Downarrow \\ f \text{ konstant.}$$

6.2.b | $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $\inf_{\mathbb{C}} \operatorname{Re} f > -\infty \Rightarrow f \text{ konstant}$

$$g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto e^{-f(z)}$$

$$C = \inf_{\mathbb{C}} \operatorname{Re} f \quad \forall z \in \mathbb{C}, |g(z)| = |e^{-f(z)}| = e^{-\operatorname{Re} f(z)} \leq e^{-C}$$

$\Rightarrow g$ konstant: $\exists w \in \mathbb{C} : \forall z \in \mathbb{C} \quad g(z) = w.$
 Liouville

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto e^{-z} \end{aligned}$$

$$g = \varphi \circ f$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \varphi(f(z)) = w$$

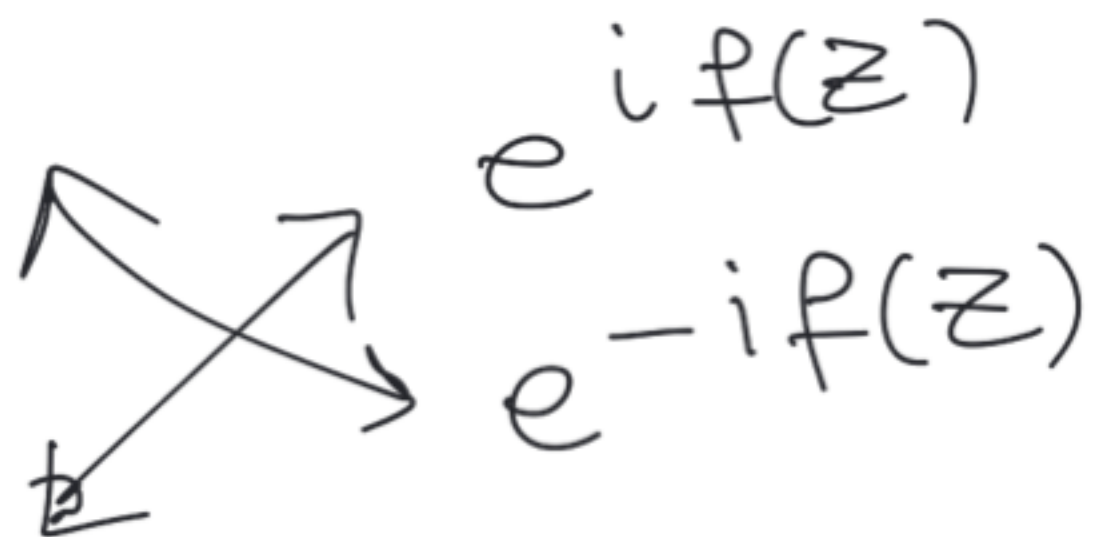
$$\forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) \in \varphi^{-1}(w)$$

φ hol.,
nicht konst
 $\Rightarrow \varphi^{-1}(w)$ diskret

$$\underbrace{f(\mathbb{C})}_{\text{zusammenhängend}} \subseteq \underbrace{\varphi^{-1}(w)}_{\text{diskret}}$$

$\Rightarrow f(\mathbb{C})$ Punkt $\Rightarrow f$ konstant.

6.2c


$$e^{i f(z)}$$
$$e^{-i f(z)}$$

6.2d

6.2.e

$$p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto z^3 + 5iz - 2$$

$$f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}), \quad \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)^3 + 5if(z) - 2| < +\infty$$

$$\sup_{\mathbb{C}} |p \circ f| < +\infty$$

$$p \circ f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \xRightarrow{\text{Liouville}} p \circ f \text{ konstant}$$

$$\exists w \in \mathbb{C} : \forall z \in \mathbb{C} \quad p(f(z)) = w$$

$\Rightarrow f(\mathbb{C}) \subseteq p^{-1}(w)$
zusammenhängend diskrete

actually $p^{-1}(w)$ is a finite set with cardinality ≤ 3

$\Rightarrow f(\mathbb{C})$ Punkt $\Rightarrow f$ konstant.

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad 3f(z)^2 f'(z) + 5i f'(z) = 0$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad f'(z) \cdot [3f(z)^2 + 5i] = 0$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \text{either } f'(z) = 0 \quad \text{or} \quad 3f(z)^2 + 5i = 0$$

obvious $\uparrow$ $\Downarrow$ not obvious.

$$\text{either } \forall z \in \mathbb{C} \quad f'(z) = 0 \quad \text{or} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad 3f(z)^2 + 5i = 0$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ either } f'(z) = 0 \text{ or } 3f(z)^2 + 5i = 0$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad f'(z) \cdot (3f(z)^2 + 5i) = 0.$$

$$h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}), \quad h(z) = 3f(z)^2 + 5i$$

$$f' \in \mathcal{O}(\mathbb{C}).$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad f'(z) \cdot h(z) = 0 \Rightarrow f' \cdot h = 0 \quad \Rightarrow$$

$\mathcal{O}(\mathbb{C})$
integral domain
 $\downarrow$

$$\text{either } f' = 0 \quad \text{or } h = 0$$

6.1 | $\omega = \frac{e^{-z}}{(z+2)^3} dz$ auf $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$

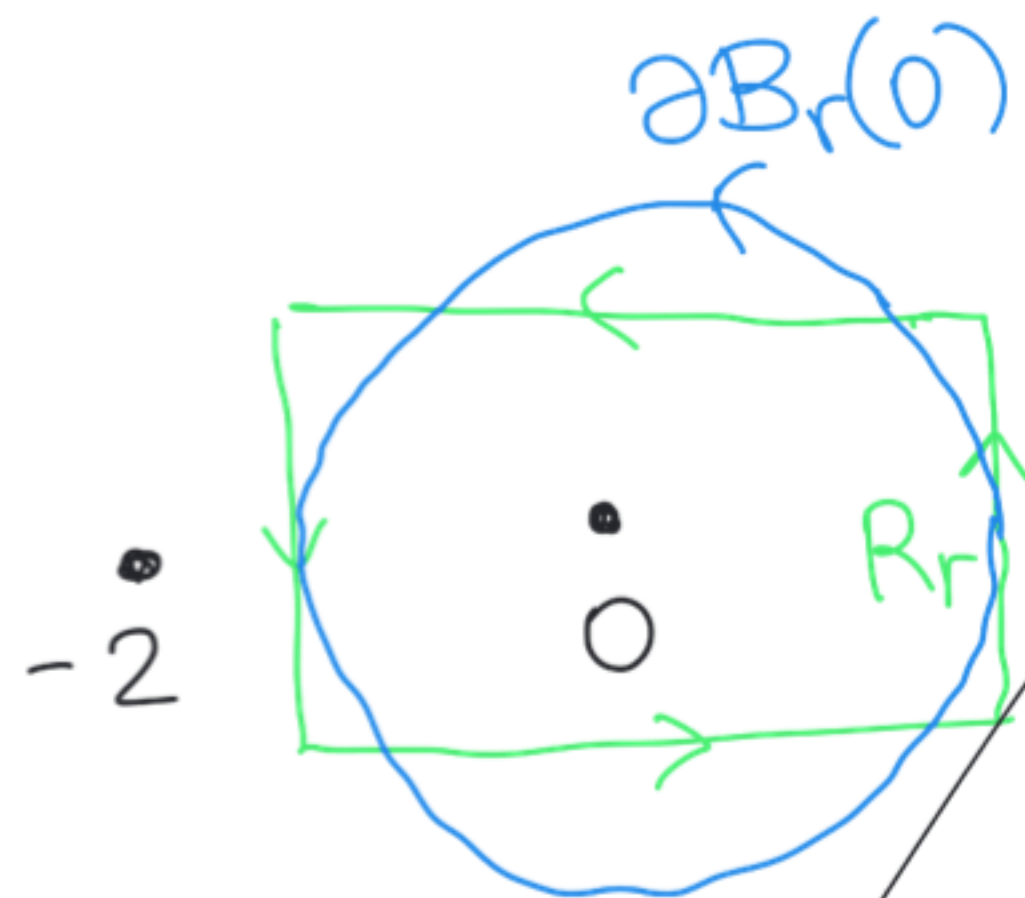
$\mathbb{C} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph
 $z \mapsto \frac{e^{-z}}{(z+2)^3}$

Goursat $\Rightarrow$ ω lokal exakt. $\Rightarrow$

α, β Schleifen
homolog in $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$

$$\Rightarrow \int_{\alpha} \omega = \int_{\beta} \omega$$

$$0 < r < 2$$



up to
reparametrisation

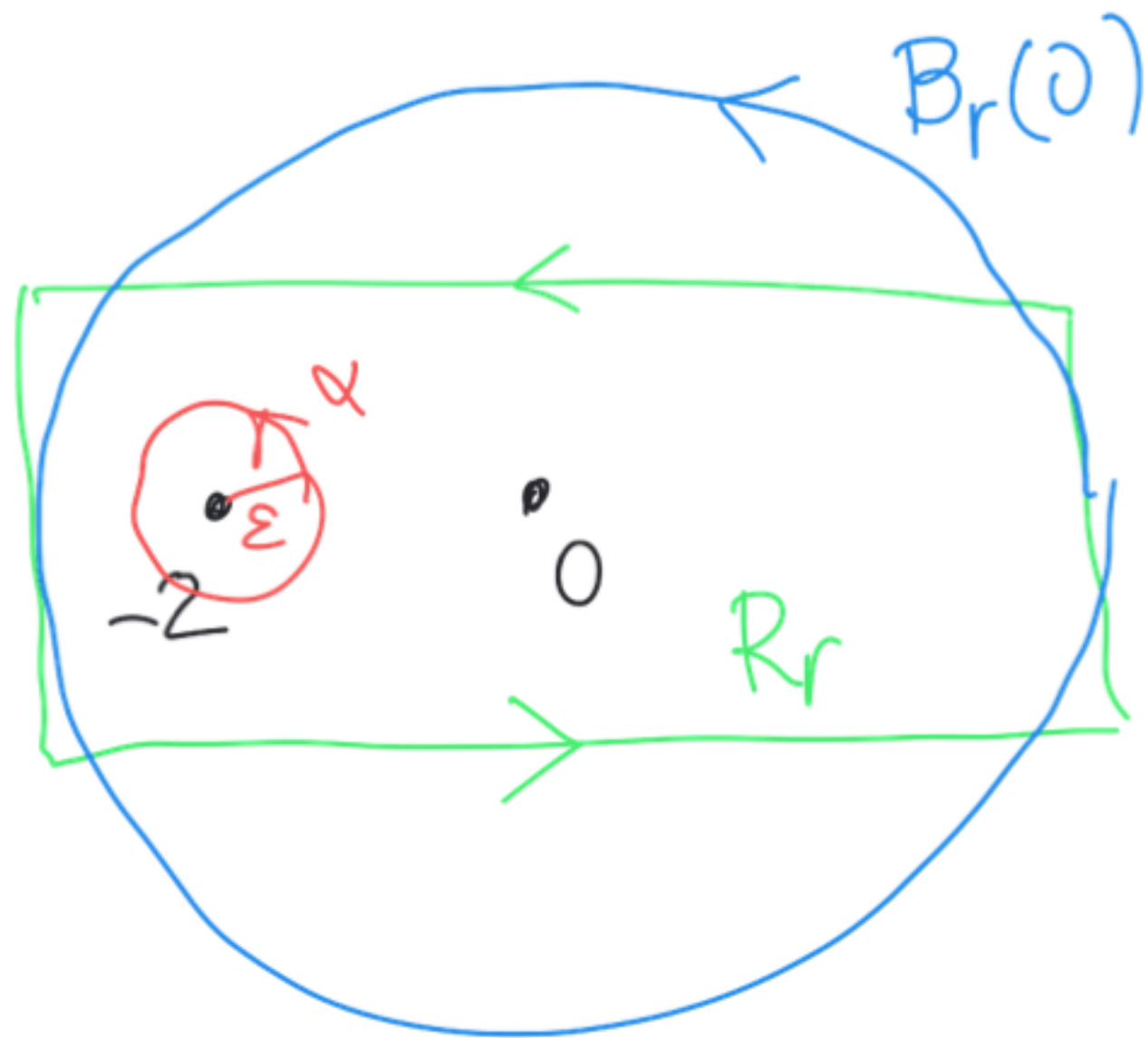
$$\gamma_r = \underbrace{\partial B_r(0) * \dots * \partial B_r(0)}_{4 \text{ Mal}}$$

$$\int_{\gamma_r} \omega = 4 \cdot \int_{\partial B_r(0)} \omega$$

∂R_r und $\partial B_r(0)$ sind
null homolog in $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$

$$\Rightarrow \int_{\partial R_r} \omega = \int_{\partial B_r(0)} \omega = 0.$$

$$r > 2$$



$$= \int_{\partial B_\epsilon(-2)} \frac{e^{-z}}{(z+2)^3} dz$$

$\partial B_r(0)$ und ∂R_r sind
homolog in $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$,
sind homolog zu

$$\epsilon > 0 \quad \alpha = \partial B_\epsilon(-2) \quad \text{in } \mathbb{C} \setminus \{-2\}$$

$$\int_{\partial B_r(0)} \omega = \int_{\partial R_r} \omega = \int_{\partial B_\epsilon(-2)} \omega =$$

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{hol.} \quad \varepsilon > 0$$

$$z \mapsto e^{-z}$$

Potenzreihenentwicklung in -2 :

$$\forall z \in B_\varepsilon(-2) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z+2)^n$$

$$\frac{f^{(n)}(-2)}{n!} = a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varepsilon(-2)} \frac{f(z)}{(z+2)^{n+1}} dz \quad \forall n \geq 0.$$

$$\stackrel{n=2}{\int_{\partial B_\varepsilon(-2)} \frac{f(z)}{(z+2)^3} dz} = 2\pi i \cdot \frac{f^{(2)}(-2)}{2!} = 2\pi i \cdot \frac{e^2}{2} = \pi i e^2$$

$$f'(z) = -e^{-z}, \quad f''(z) = e^{-z}, \quad f''(-2) = e^2$$

6.5 $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, zusammenhängend
 $f \in \mathcal{O}(U)$ nicht konstant

$z_0 \in U, r > 0, B_r(z_0) \subseteq U$

$\forall z \in B_r(z_0) \quad |f(z)| \geq |f(z_0)|$

$\stackrel{?}{\Rightarrow} f(z_0) = 0.$

z_0, r sind
fest!

By contradiction $f(z_0) \neq 0.$

$\forall z \in B_r(z_0) \quad |f(z)| \geq |f(z_0)| > 0$

$f(z) \neq 0$

Man betrachte

$$g: B_r(z_0) \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \frac{1}{f(z)}$$

g ist holomorph $\Rightarrow g$ hat MWE.

$$\forall z \in B_r(z_0) \quad |g(z)| = \left| \frac{1}{f(z)} \right| \leq \left| \frac{1}{f(z_0)} \right| = |g(z_0)|.$$

$$\forall z \in B_r(z_0) \quad |f(z)| \geq |f(z_0)|$$

Maximumprinzip $\Rightarrow g$ ist konstant: $\exists \lambda \in \mathbb{C}^* : \forall z \in B_r(z_0) \quad g(z) = \lambda$

$$\Rightarrow \forall z \in B_r(z_0) \quad f(z) = \lambda^{-1}.$$

$[f|_{B_r(z_0)} \text{ ist konstant}]$

$$h: U \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{hol.} \\ z \mapsto \lambda^{-1}$$

$h|_{B_r(z_0)} = f|_{B_r(z_0)}$
 U zusammenhängend

analytic
 $\Rightarrow$ continuation

$$h = f \Rightarrow \forall z \in U \quad f(z) = \lambda^{-1} \\ \Rightarrow f \text{ konstant} \quad \Downarrow$$