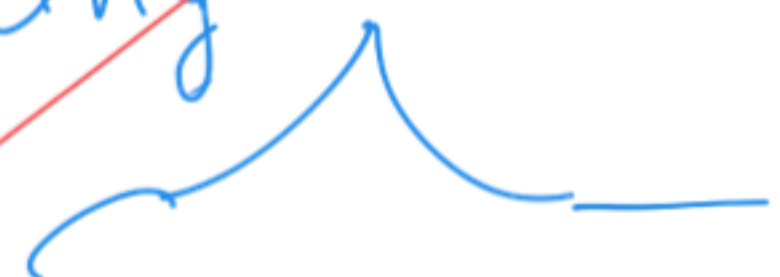


02.07.2020

10.5 i

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad C^1, \quad f(x_0) = 1.$

Da die Ableitung  gleich 0 ist, dann $f'(x_0) = 0.$

von der konstanten Funktion 1

$\{x_0\}$ ist nicht offen in $\mathbb{R}$

Man kennt nicht, wie f in einer Umgebung von x_0 ist.

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ hol.}$$

$$\forall z \in S^1 \quad f(z) = 2\bar{z}.$$

10,5 i

$$g: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \frac{2}{z}$$

$$\forall z \in S^1$$

$$z \cdot \bar{z} = 1 \quad z^{-1} = \bar{z}$$

$$g(z) = \frac{2}{z} = 2\bar{z}$$

$$f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \quad f|_{\mathbb{C}^*} \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$$

$$g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^*)$$

$$\forall z \in S^1 \quad g(z) = f(z)$$

$\Rightarrow$

$$g = f|_{\mathbb{C}^*} \Rightarrow$$

S^1 ist nicht diskrete

Principle of analytic continuation

$\Rightarrow g$ hat eine hebbare Singularität in 0.

Widerspruch, weil g einen Pol in 0 hat

$f \in O(\mathbb{C})$ mit $\forall z \in S^1 \quad f(z) = 2\bar{z}$.

$\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend $\Rightarrow$ die Form $f(z)dz$ ist exakt.

Man betrachte die Schleife $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C}$
 $t \mapsto e^{it}$

$$0 = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} 2 \overline{e^{it}} i e^{it} dt =$$

$f(z)dz$ exakt
auf $\mathbb{C}$

$$= \int_0^{2\pi} 2i dt = 4\pi i$$

Widerspruch!

10.5 ii $\mathbb{N}^+ = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$

Es gibt eine offene Teilmenge U von $\mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{O}(U)$
sodass: $U \supseteq \{100\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$, $f(100) = 1$

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$$

WAHR:

$$U = B_2(0) \cup B_1(100)$$

$$f \in \mathcal{O}(U)$$

$$f(z) = \begin{cases} z^3 & z \in B_2(0) \\ 1 & z \in B_1(100) \end{cases}$$

X, Y top. Räume

$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ offene Überdeckung von X

$f: X \rightarrow Y$.

$f: X \rightarrow Y$
stetig

$\Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda \quad f|_{U_\lambda}: U_\lambda \rightarrow Y$ ist stetig

Es gibt eine offene zusammenhängende Teilmenge U von $\mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{O}(U)$ mit:

- $U \supseteq \{100\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$

- $f(100) = 1$

- $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$

WAHR $U = \mathbb{C}^*$

$$f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f(z) = z^3 - \frac{999999}{\sin\left(\frac{\pi}{100}\right)} \sin\left(\frac{\pi}{z}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^3 - \frac{999999}{\sin\left(\frac{\pi}{100}\right)} \cdot \cancel{\sin(\pi n)}$$

$$f(100) = 10^6 - \frac{10^6 - 1}{\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{100}\right)}} \cdot \cancel{\sin\left(\frac{\pi}{100}\right)} = 10^6 - (10^6 - 1) = 1$$

Es gibt $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ sodass

- $f(100) = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N}^+ \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$

FALSCH:

$$0 \in \mathbb{C} \quad 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \quad f \text{ stetig} \Rightarrow f(0) = 0.$$

$$S = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

$$\forall z \in S \quad f(z) = z^3$$

$$g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$$
$$z \mapsto z^3$$

$$f|_S = g|_S$$

$$S \text{ nicht diskret} \Rightarrow f = g \Rightarrow 1 = f(100) = g(100) = 10^6.$$

Widerspruch

10.5 iii $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f \in \mathcal{O}(U)$, $f' = 0 \Rightarrow f$ konstant

FALSCH.

$$U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \operatorname{Im} z > 0 \\ 1 & \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

10.5vi $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, zusammenhängend, $f \in \mathcal{O}(U)$.

$$\forall z \in U \quad (\operatorname{Re} f(z)) \cdot (\operatorname{Im} f(z)) = 0.$$

$\Rightarrow f$ ist konstant.

WAHR:

Wäre f nicht konstant, wäre $f(U)$ offen in $\mathbb{C}$.

$$f(U) \subseteq \{x+iy \mid xy=0\} = \Gamma$$



Die innere Kern von Γ ist leer.

$$\Rightarrow f(U) = \emptyset \quad \Downarrow$$

10.5 v $U \subseteq \mathbb{C}$ offen zusammenhängend, $f \in \mathcal{O}(U)$.

$\operatorname{Re} f$ konstant $\Rightarrow f$ konstant

WAHR:

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall z \in U \quad \operatorname{Re} f(z) = c$$

$$\Rightarrow f(U) \subseteq \{c + iy \mid y \in \mathbb{R}\} = \Gamma$$

Der innere Kern von Γ ist leer.

$\Rightarrow f(U)$ ist nicht offen in $\mathbb{C}$

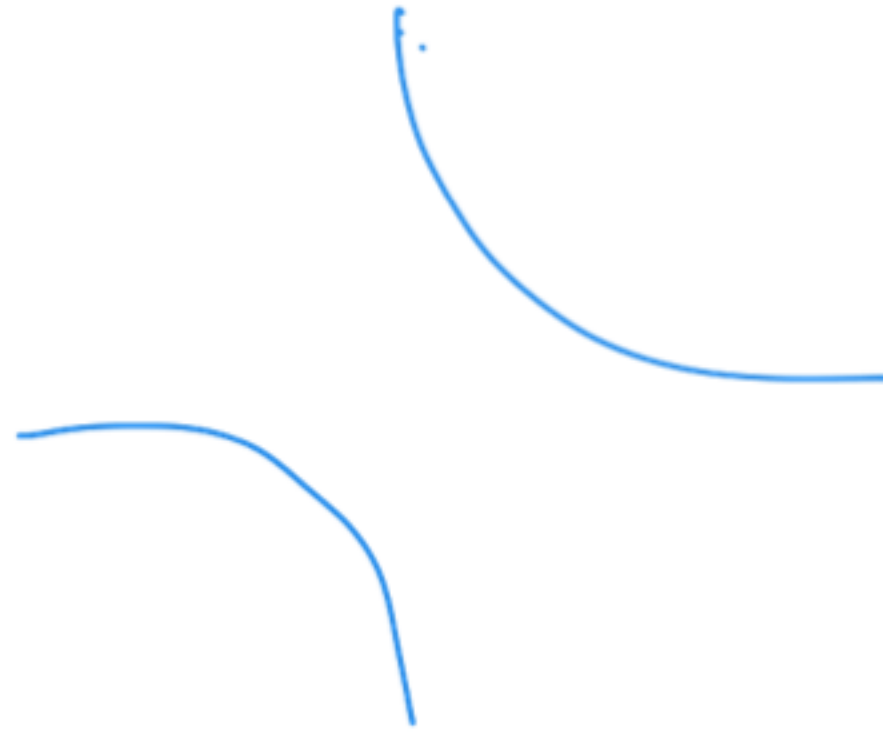
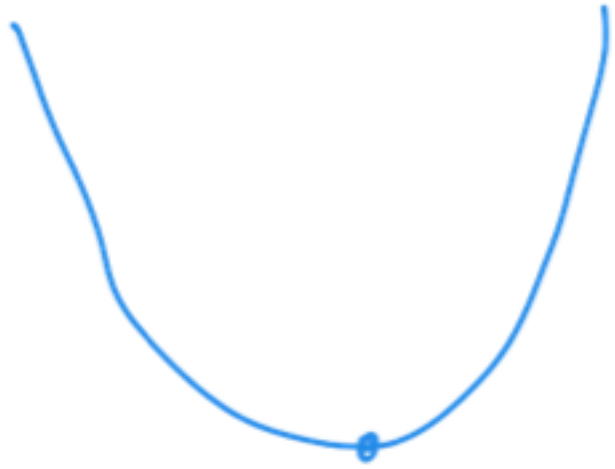
$\Rightarrow f$ konstant.

Gebietstreue

$U \subseteq \mathbb{C}$ offen, zusammen. $f \in \mathcal{O}(U)$

• $\forall z \in U \quad \operatorname{Im} f(z) = (\operatorname{Re} f(z))^2 \Rightarrow f \text{ konstant}$

• $\forall z \in U \quad \operatorname{Im} f(z) \cdot \operatorname{Re} f(z) = 1 \Rightarrow f \text{ konstant}$

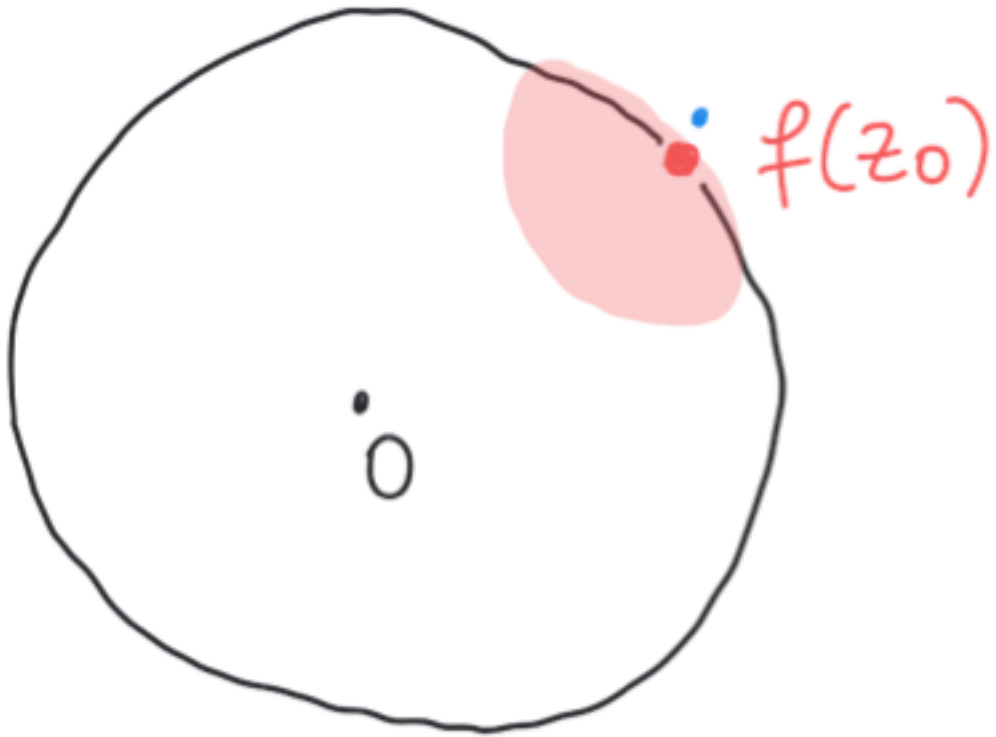


Beweis vom Maximumsprinzip aus Gebietstreue:

Satz $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$, $f \in \mathcal{O}(U)$
 $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(z_0) \subseteq U$ und $\forall z \in B_\varepsilon(z_0) \quad |f(z)| \leq |f(z_0)|$
 $\Rightarrow \forall z \in B_\varepsilon(z_0), \quad f(z) = f(z_0)$

BWS Man nehme an, dass $f|_{B_\varepsilon(z_0)}$ nicht konstant ist.
Gebietstreue $\Rightarrow f(B_\varepsilon(z_0))$ ist offen in $\mathbb{C}$.

$f(B_\varepsilon(z_0))$



$f(B_\varepsilon(z_0))$ ist keine Umgebung von $f(z_0)$.

Widerspruch!

10.5 iii $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ hol. $f \circ f = f$
 $\Rightarrow$ entweder f konstant oder $f = \text{id}_{\mathbb{C}}$

WAHR:

Man nehme an, dass f nicht konstant ist.
Gebietstreue $\Rightarrow f(\mathbb{C})$ ist offen in $\mathbb{C} \Rightarrow f(\mathbb{C})$ ist
nicht diskret.

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\text{id}_{\mathbb{C}}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$f \circ f = f \Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} \quad f(f(z)) = f(z)$$

$$\Rightarrow \forall w \in f(\mathbb{C}) \quad f(w) = w = \text{id}_{\mathbb{C}}(w)$$

$$\Rightarrow f|_{f(\mathbb{C})} = \text{id}_{\mathbb{C}}|_{f(\mathbb{C})} \Rightarrow f = \text{id}_{\mathbb{C}} \quad \square$$

principle of
analytic continuation

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad f'(f(z)) \cdot f'(z) = f'(z)$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad (f'(f(z)) - 1) \cdot f'(z) = 0.$$

$\mathcal{O}(\mathbb{C})$ Integritätsring $\Rightarrow$

entweder $\forall z \in \mathbb{C} \quad f'(f(z)) = 1$

f konstant

f nicht konstant
 $f(\mathbb{C})$ nicht diskrete

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad f'(z) = 1$$

$$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{C} \quad f(z) = z + c$$

$$z + 2c = f(f(z)) = f(z) = z + c$$

$$c = 0.$$

oder $\forall z \in \mathbb{C} \quad f'(z) = 0$
 $\Downarrow$
 f konstant.

10.1 $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$$

$$g: U \rightarrow \mathbb{C}$$
$$\rho e^{i\theta} \mapsto \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta}{n}}$$

$$\rho > 0, 0 < \theta < 2\pi$$

$$g \in \mathcal{O}(U) : \text{ok}$$

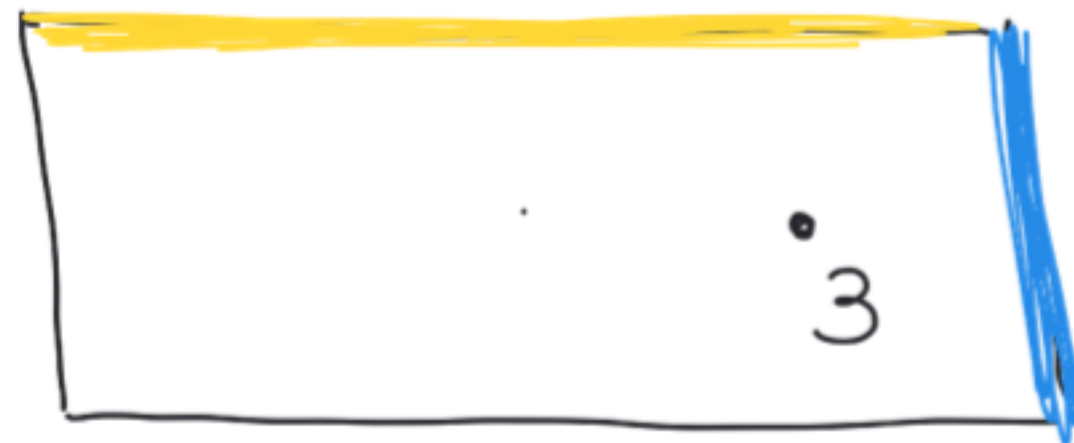
$$\left[g(z) = z^{\frac{1}{n}} \quad g'(z) = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} \right]$$

$$\forall z \in U \quad g(z)^n = z$$

$$\forall z \in U \quad n g(z)^{n-1} g'(z) = 1$$

$$g'(z) = \frac{1}{n g(z)^{n-1}} = \frac{g(z)}{n z}$$

10.2 $f(z) = e^z - e^{-z} + \frac{2}{z-3}$



$$K_r = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} |\operatorname{Re} z| \leq r \\ |\operatorname{Im} z| \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$$

r genug groß

• $z = r + it, |t| \leq \frac{\pi}{2}$ $|e^z| = e^r, |e^{-z}| = e^{-r}, |e^z - e^{-z}| \geq e^r - e^{-r}$

$$\left| \frac{2}{z-3} \right| = \frac{2}{|z-3|} \leq \frac{2}{r-3}$$

• $z = x + i\frac{\pi}{2}, |x| \leq r$ $e^z = e^{x+i\frac{\pi}{2}} = ie^x, e^{-z} = e^{-x-i\frac{\pi}{2}} = -ie^{-x}$
 $|e^z - e^{-z}| = e^x + e^{-x} \geq 2$

$$\frac{2}{|z-3|} \leq \frac{2}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi} < 2$$

10.3 $U = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$
 $V = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < 3\}$

ii) Man nehme an, dass $f: U \rightarrow V$ ein Biholomorphismus ist.
 $z_0 \in U$. i) $\Rightarrow \pi_1(f, z_0): \pi_1(U, z_0) \rightarrow \pi_1(V, f(z_0))$ ist
 der Nullhomomorphismus.

$$f^{-1}: V \rightarrow U$$

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{f^{-1}} U$$

id_U

$$\pi_1(U) \xrightarrow{f_*} \pi_1(V) \xrightarrow{(f_*)^{-1}} \pi_1(U)$$

id

$$\Rightarrow \pi_1(U) = 0 \quad \Downarrow$$

10.3i

$z_0 \in U$



$U = B_1(0) \setminus \{0\}$



$V = A_{2,3}(0)$

$f: U \rightarrow V$ holomorph.

$f(U) \subseteq V \subseteq B_2(0) \Rightarrow f$ ist beschränkt in jeder punktierten Umgebung von 0 $\Rightarrow f$ hat eine hebbare Singularität in 0

$\exists \tilde{f}: B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ hol. mit $\tilde{f}|_U = f$.

Was ist $\tilde{f}(B_1(0))$?

$$\tilde{f}(B_1(0)) = f(U) \cup \{\tilde{f}(0)\} \subseteq V \cup \{\tilde{f}(0)\}$$

We want to prove that $\tilde{f}(B_1(0)) \subseteq V$. There are 2 cases:

• f konstant $\Rightarrow \forall z \in U \quad f(z) = f(z_0)$

By continuity also $\tilde{f}$ is constant so $\forall z \in B_1(0), \tilde{f}(z) = f(z_0)$.

$$\Rightarrow \tilde{f}(B_1(0)) = \{f(z_0)\} \subseteq V.$$

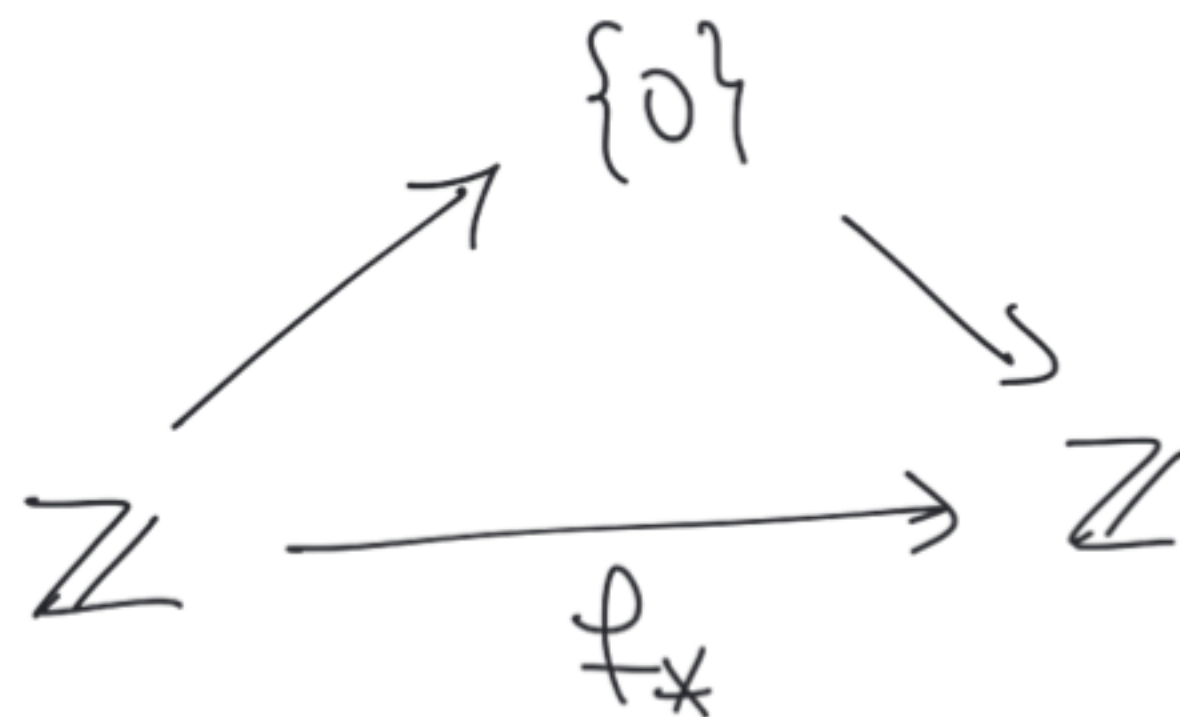
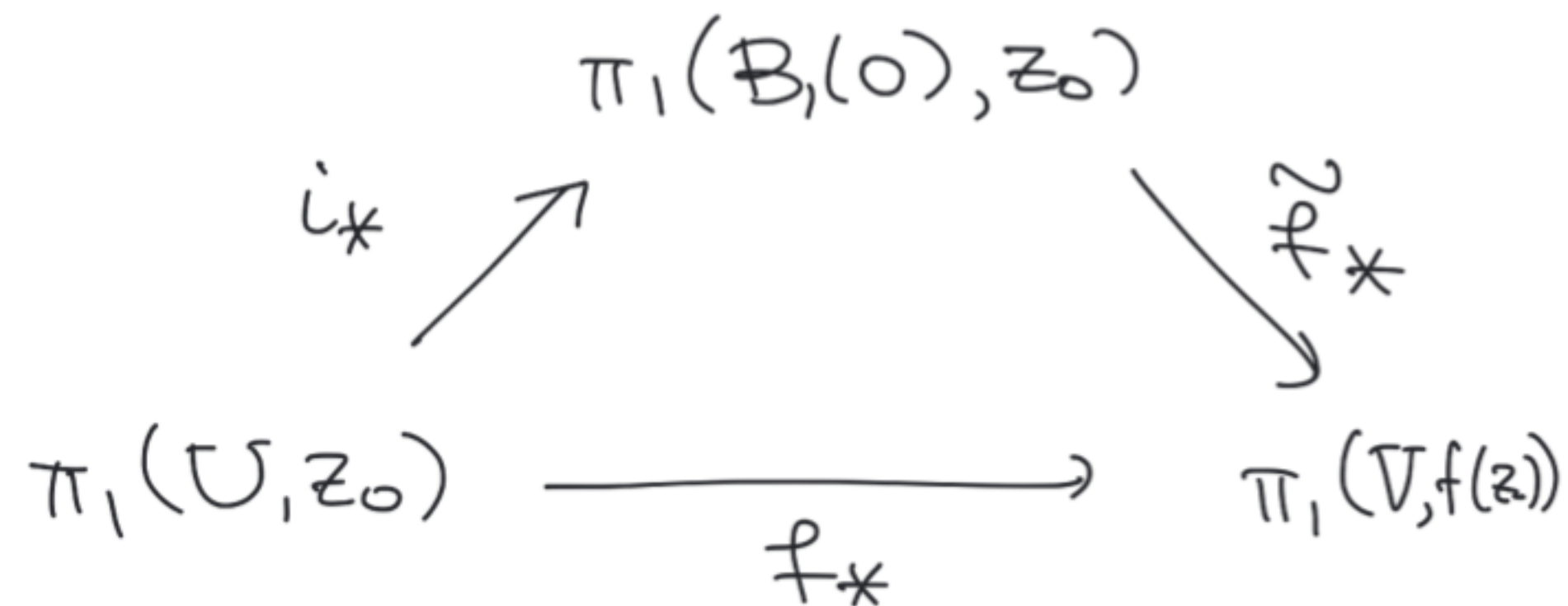
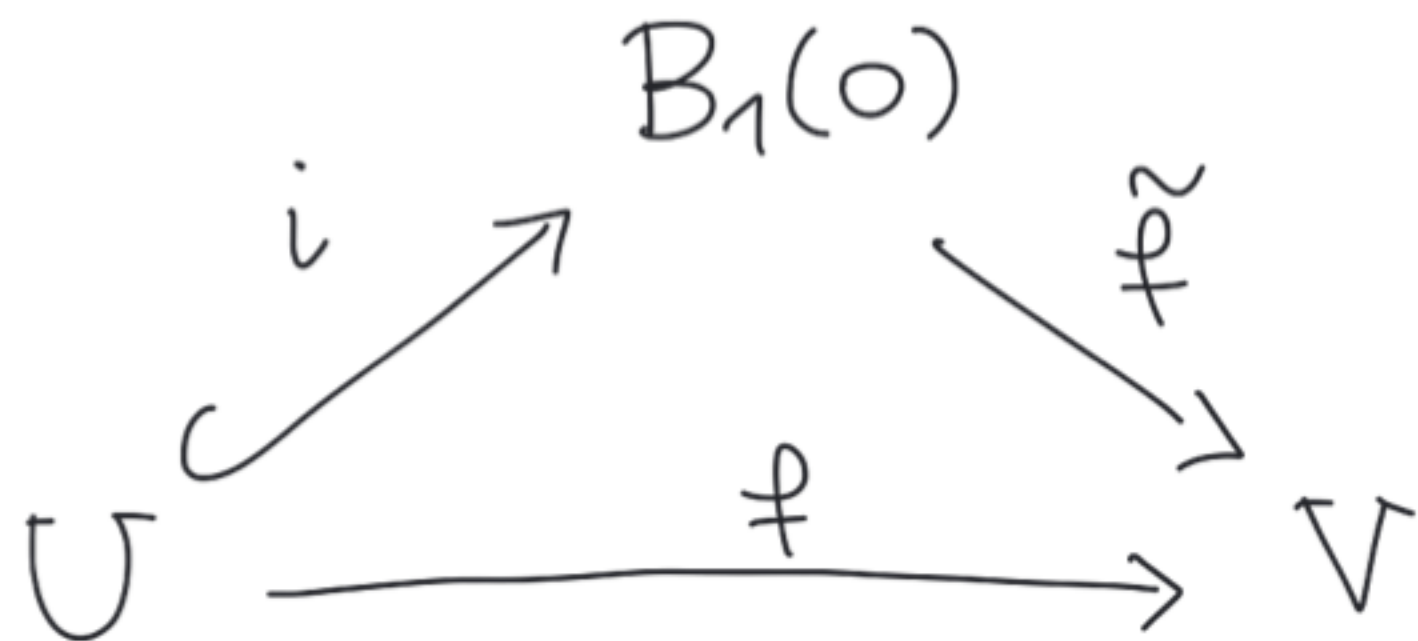
• f nicht konstant $\Rightarrow \tilde{f}$ nicht konstant $\xRightarrow{\text{Gebietstreue}}$

$\tilde{f}(B_1(0))$ offen in $\mathbb{C}$.

$$\tilde{f}(B_1(0)) \subseteq V \cup \{\tilde{f}(0)\}$$

$$\tilde{f}(0) \in \overline{V} = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 \leq |z| \leq 3\}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(B_1(0)) \subseteq \text{interior part of } V \cup \{\tilde{f}(0)\} = V.$$



$$\Rightarrow f_* = 0$$

$$f(z) = (z+1)^3$$

$$\text{ord}(f, -1) = 3$$

Die Potenzreihenentwicklung von f in -1 ist T^3

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

$$\sum_{n \geq 0} a_n T^n$$

$$f(z) = e^z - 1 - z$$

$$\text{ord}(f, 0) = 2$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n - 1 - z = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n!} z^n$$

$$f(z) = e^z - 1 - \sin z \quad \text{in } \mathbb{C}$$

$$f(0) = e^0 - 1 - \sin 0 = 0$$

$$f'(z) = e^z - \cos z$$

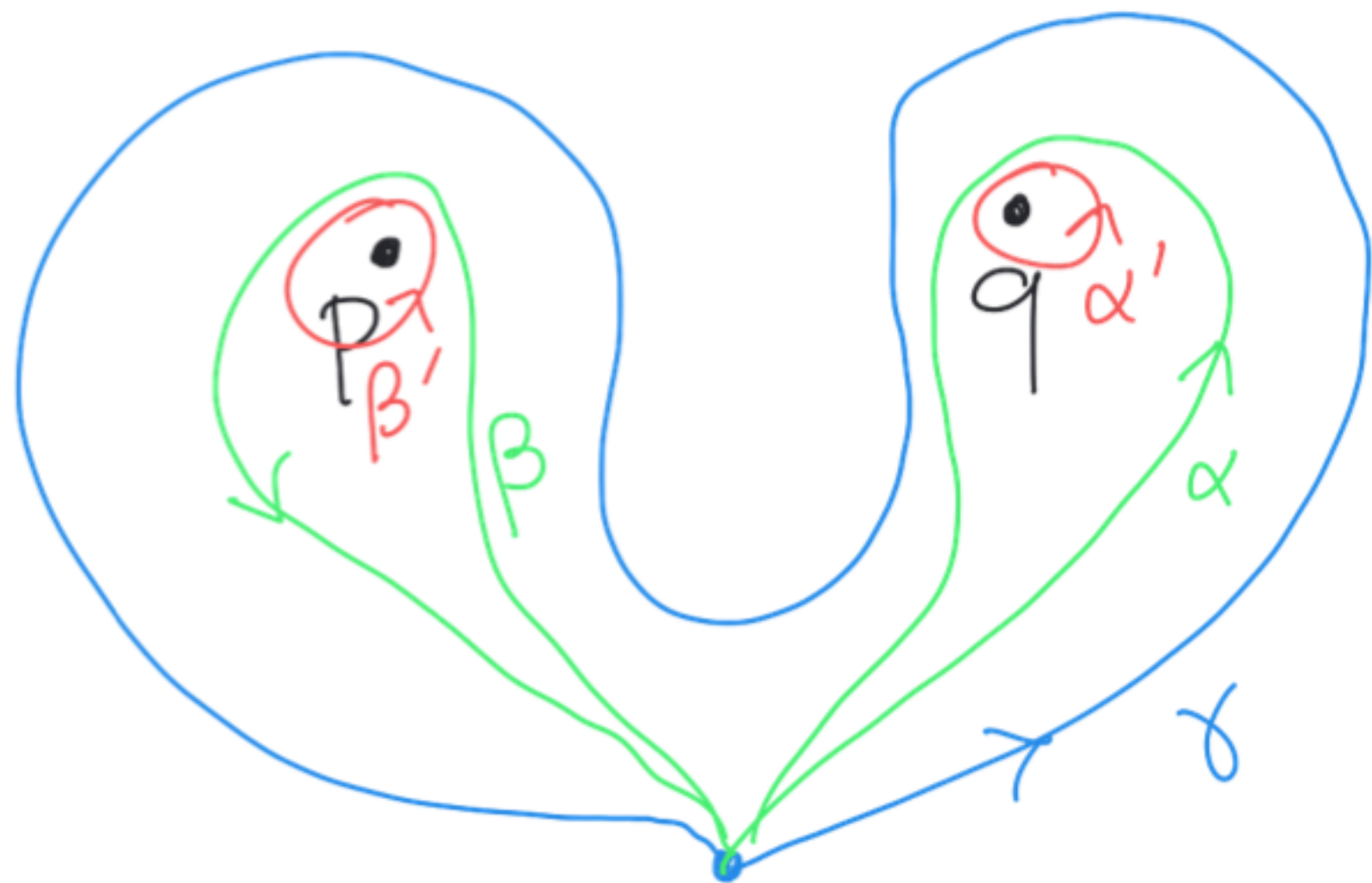
$$f'(0) = e^0 - \cos 0 = 1 - 1 = 0$$

$$f''(z) = e^z + \sin z$$

$$f''(0) = e^0 + 0 = 1$$

$$\Rightarrow \text{ord}(f, 0) = 2$$

$$U = \mathbb{C} \setminus \{p, q\}$$



γ is path homotopic to $\alpha * \beta$

α is homologous to α'

β " " " β'

γ is homologous to $\alpha' + \beta'$

ω locally exact
1-form on U

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\alpha'} \omega + \int_{\beta'} \omega$$

$$U = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$$

$$V = \mathbb{C} \setminus \text{segment between } i \text{ and } -i$$

$$A = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 1} i$$

$$\omega = \frac{az+b}{z^2+1} dz$$

U



$$\int_{\alpha} \omega = 2\pi i \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Residue} \\ \text{theorem}}}{\text{Res}} \left(\frac{az+b}{z^2+1}, i \right) =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{ai+b}{2i}$$

$$= \pi(ai+b)$$

$$\int_{\beta} \omega = 2\pi i \text{ Res} \left(\frac{az+b}{z^2+1}, -i \right) = 2\pi i \frac{-ai+b}{-2i}$$

$$= \pi(ai-b)$$

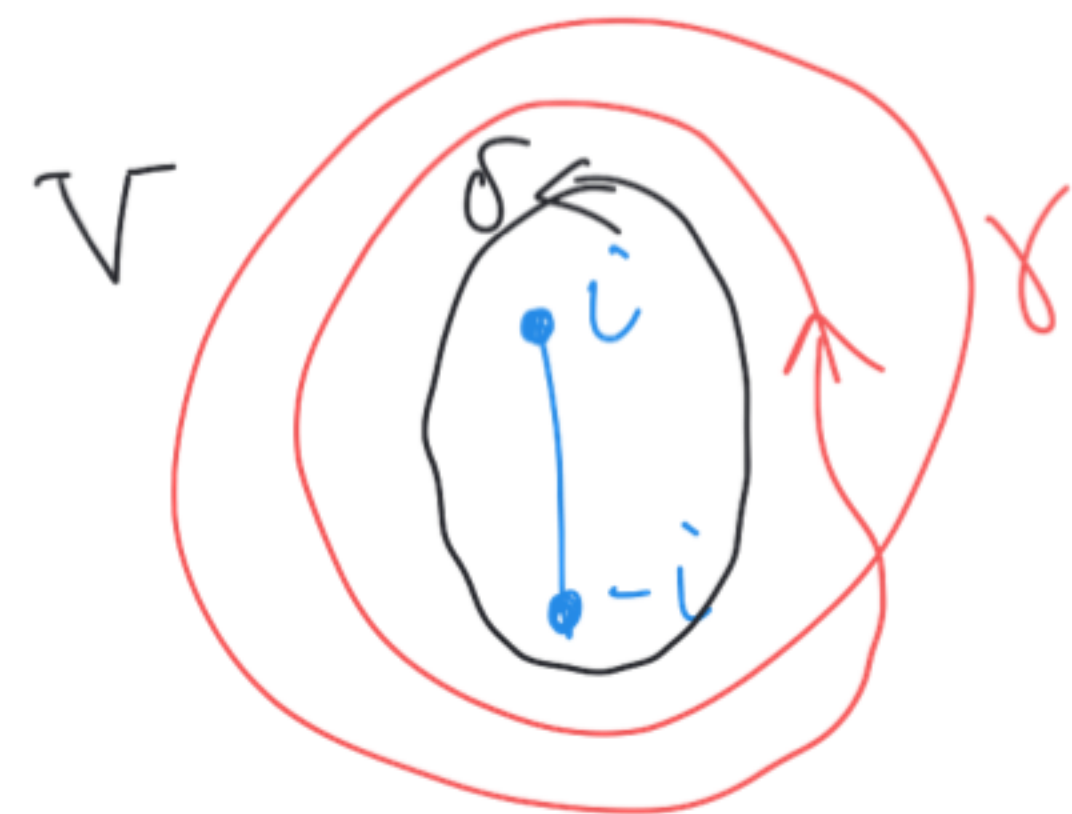




$$\int_{\gamma} \omega = W(\gamma, i) \cdot \int_{\alpha} \omega + W(\gamma, -i) \cdot \int_{\beta} \omega$$

γ homologous to

$$W(\gamma, i) [\alpha] + W(\gamma, -i) [\beta]$$



γ Schleife in V

$$W(\gamma, i) = W(\gamma, -i)$$

γ is homologous to $W(\gamma, i) [\delta]$

$$\omega \text{ exact} \Leftrightarrow \int_{\gamma} \omega = 0$$

δ is a loop in V , but also a loop in U

$$\Rightarrow \int_{\delta} \omega = \int_{\alpha} \omega + \int_{\beta} \omega$$

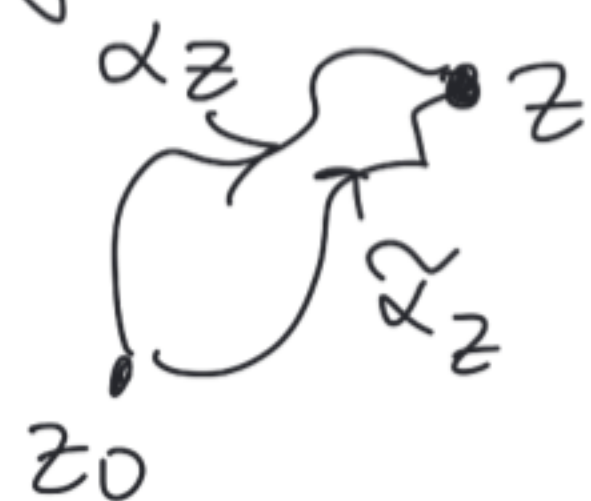
$$U \quad h: U \rightarrow \mathbb{C}^* \quad a \in \mathbb{C} \quad a^n = h(z_0)$$

10.4

$$g: U \rightarrow \mathbb{C}^*$$

$$z \mapsto a \cdot \exp \left(\frac{1}{n} \int_{\alpha_z} \frac{h'(z)}{h(z)} dz \right) \quad \text{where } \alpha_z \text{ is a path in } U \text{ from } z_0 \text{ to } z$$

g is well defined: pick another path $\tilde{\alpha}_z$ from z_0 to



$$\omega = \frac{h'(z)}{h(z)} dz$$

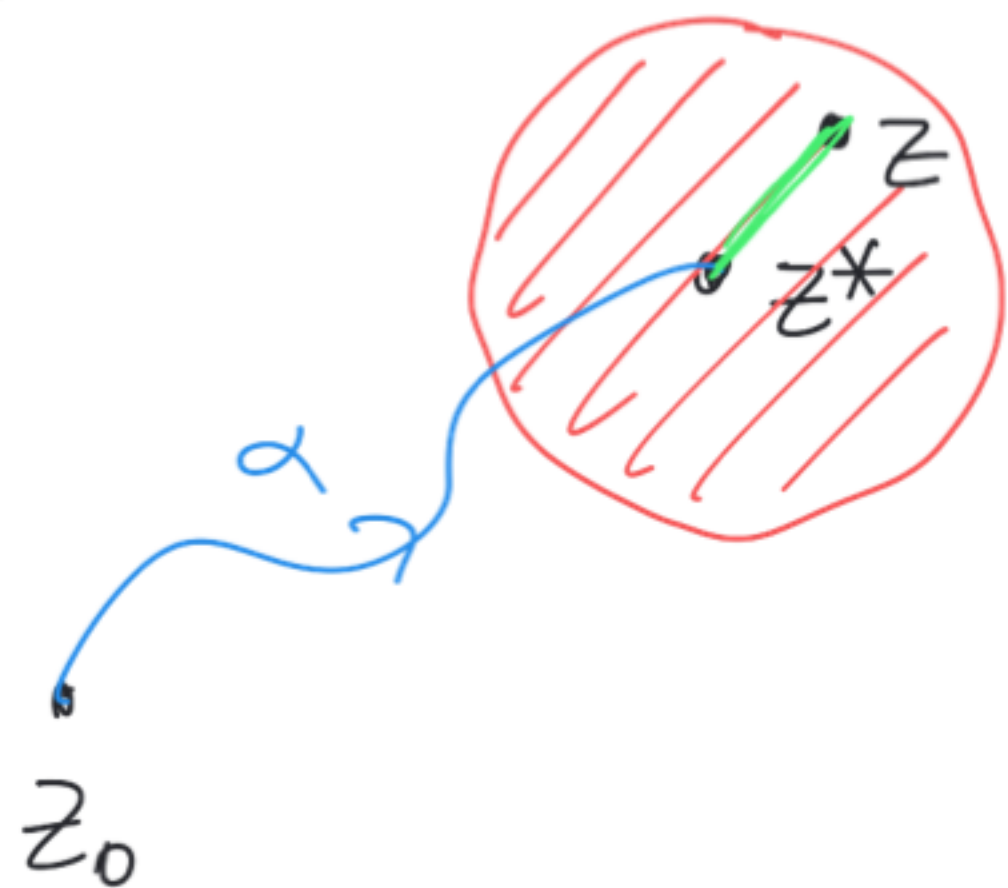
$$\int_{\alpha_z} \omega - \int_{\tilde{\alpha}_z} \omega \in 2\pi i n \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \exp \left(\frac{1}{n} \int_{\alpha_z} \omega \right) = \exp \left(\frac{1}{n} \int_{\tilde{\alpha}_z} \omega \right)$$

g is holomorphic in $z^* \in U$:

let $f \in \mathcal{O}(B_r(z^*))$ be a primitive
of $\omega|_{B_r(z^*)}$.

Up to add a constant to f



Fix a path α
from z_0 to z^*

$\forall z \in B_r(z^*)$ β_z segment
from z^* to z

$$\int_{\alpha * \beta_z} \omega = \int_{\alpha} \omega + f(z)$$

$f(z^*) = 0$

$$g(z) = a \cdot \exp\left(\frac{1}{n} \int_{\alpha * \beta_z} \omega\right) = \text{constant} \cdot \exp\left(\frac{1}{n} \cdot f(z)\right) \quad \forall z \in B_r(z^*)$$

