$\mathbb{K}$ campo

<u>Def</u> Il RANGO (rank) di una matrice è la dimensione dell'immagine:

$\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\quad rk(A) := \dim \operatorname{Im} A$

dove $\operatorname{Im} A := \operatorname{Im} L_A$ dove $L_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$
$\qquad\qquad x \longmapsto A \cdot x$

Primo modo per il calcolare il rango:
le colonne di A sono un insieme di generatori di Im A.
Se ne estrae una base con l'algoritmo delle estrazioni successive. Il numero degli elementi di questa base è il rango.

Esempio

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

applico l'algoritmo di estrazione di una base alle colonne

1° colonna $\neq 0 \Rightarrow$ la prendo

La 2° colonna è un multiplo della 1° $\Rightarrow$ non la prendo

La 3° colonna non . . . . $\Rightarrow$ la prendo

La 4° colonna è la 1° − la 3° $\Rightarrow$ non la prendo

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono una base dell'immagine

$\Rightarrow rk = 2.$

Proprietà del rango

- rango $\leq$ # righe
- rango $\leq$ # colonne
- rango $= 0 \iff$ la matrice è nulla
- rango $= 1 \iff$ la matrice non è nulla e le colonne/righe sono tutte multiple di un unico vettore

p.es. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -4 & -6 \end{pmatrix}$

Mosse di Gauss o operazioni elementari sulle righe

Trasformano una matrice in un'altra matrice, i numeri delle righe e delle colonne restano gli stessi.
Ci sono 3 tipi di mosse:

1. scambiare due righe tra di loro
2. moltiplicare una riga per un numero $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$
3. sommare a una riga un multiplo di un'altra riga

Teorema Le mosse di Gauss sulle righe lasciano invariato il rango

Teorema (riduzione a scala o eliminazione gaussiana)

Ogni matrice, tramite un numero finito di mosse elementari sulle righe, può essere trasformata in una matrice a scala, cioè del tipo

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \boxed{1} & * & \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \boxed{1} & * \cdots & * \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
\vdots & & & & & & & & \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

un elemento di $\mathbb{K}$ arbitrario

gli scalini iniziano con 1 e si chiamano pivot

sotto o a sx della scala ci sono zeri

questa zona può non esistere e quindi la 1° riga inizia con 1

<u>N.B:</u> Il rango è il numero di pivot

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è a scala e ha rango 2

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è a scala e ha rango 3

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ non è a scala

Esempio
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Al posto (1,1) c'è 0 e me ne voglio sbarazzare. Scelgo un el. $\neq 0$ nella 1° colonna e lo sposto al posto (1,1)

Uso la mossa 1 e scambio 1° e 2° riga

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

al posto (1,1) c'è 1 e questo è il 1° pivot!

Uso questo pivot per mettere zeri sotto di lui

Alla 2° riga c'è già 0 e non faccio nulla.

Alla 3° riga c'è 2, lo voglio far diventare zero:

uso la mossa 3 e sommo alla 3° riga (−2) volte la 1°

$(2\ -6\ 2\ 0) - 2 \cdot (1\ -3\ 1\ 0) = (0\ 0\ 0\ 0)$

La matrice è diventata

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La zona verde è a scala e non la tocco più.

Ci concentriamo sulla parte rimanente

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Guardo la 2° colonna: è nulla nelle righe ≥ 2, quindi non faccio niente

Guardo la 3° colonna: il 3 lo voglio far diventare un 1; uso la mossa (2) e moltiplico la 2° riga per $\frac{1}{3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pivot

è a scala!

$\#pivot = 2 \Rightarrow rk = 2$

N.B: i pivot compaiono nella 1° e 3° colonna.

La 1° e la 3° colonna sono i vettori che avevamo estratto dalla matrice originaria all'inizio della lezione come base dell'immagine

Un sistema lineare $AX = b$ con $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$

$(A \mid b) \in M_{m \times (n+1)}(\mathbb{K})$ MATRICE COMPLETA ASSOCIATA AL SISTEMA

matrice ottenuta mettendo a destra di A la colonna b

Le mosse di Gauss sulle righe di $(A \mid b)$ trasformano un sistema lineare in un uno equivalente, cioè con le stesse soluzioni.

__Oss__ Le mosse di Gauss vi aiutano a trovare un sistema lineare equivalente più semplice da risolvere

__Teorema__ (Rouché - Capelli)

Il sistema lineare
$AX = b$
ha almeno una soluzione $\iff \operatorname{rk}(A \mid b) = \operatorname{rk}(A)$

Esempio

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{riduce a scalini}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 3z = -3 \\ x - 3y + z = 0 \\ 2x - 6y + 2z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{equivalente}} \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ z = -1 \\ 0 = 0 \quad \leftarrow \text{inutile} \end{cases}$$

Il sistema a scalini si risolve bene, andando a ritroso: dal basso verso l'alto, da dx a sx.

- 3° eq $\rightsquigarrow z = -1$
- $\boxed{\text{nessuna condizione sulla } y}$ perché nella colonna della y non c'è un pivot $\rightsquigarrow y = t$, dove t è un parametro
- 1° eq $\rightsquigarrow x = 3y - z = 3t + 1$

Quindi le sol. del sistema sono tutti e soli i vettori del tipo

$$\begin{pmatrix} 3t+1 \\ t \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{K}$ campo. Per una matrice quadrata $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ si può definire uno scalare $\det(A) \in \mathbb{K}$ detto DETERMINANTE di A.

Per $n=1$: $A=(a)$, $\det(A)=a$

Per $n=2$: $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\det(A) = ad - bc$

Per $n=3$: regola di Sarrus

Per $n\geq 4$: è complicato (e inutile) dare la formula esplicita

Si indica con $|A|$ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$

N.B: il determinante non è definito per matrici rettangolari

Sviluppi di Laplace

Per calcolare il det di una matrice $n \times n$, si sceglie una riga o una colonna a piacere e poi si calcolano n determinanti di matrici $(n-1) \times (n-1)$, cioè più piccole.

<u>Nota</u> Il posto (i,j) di una matrice ha il segno $(-1)^{i+j}$

$$\begin{matrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \\ + & - & + & - & \\ - & + & - & + & \\ \vdots & & & & \end{matrix}$$

Esempio di sviluppo di Laplace

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = +3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

scelgo la 1° colonna

segno del posto (1,1)

elemento di posto (1,1)

determinante della matrice che ottengo cancellando la riga 1 e la colonna 1

segno del posto (2,1)

el. di posto (2,1)

det. cancellando riga 2 e colonna 1

$$= 3 \cdot (3+1) - 1 \cdot (-6) + 0$$

$$= 18$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{uso la } 2^\circ \text{ riga}}{=} -1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot (-6) + 1 \cdot 9 + 3$$

$$= 18$$

Per gli sviluppi di Laplace del det. è comodo usare righe o colonne con tanti 0.

<u>Esercizio per casa</u>

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

<u>Oss</u> con la mossa di Gauss

4° riga $\rightsquigarrow$ 4° riga $- 2 \cdot (2^\circ$ riga$)$

$\Longrightarrow$ nella 4° colonna l'unico elemento $\neq 0$ è nella riga 2°.

Fare lo sviluppo di Laplace per la colonna 4° è facile ora!

Proprietà del det

- se A è triangolare superiore o triangolare inferiore

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ * & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$*$ = el. qualsiasi

allora $\det(A)$ è il prodotto degli elementi sulla diagonale
$a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$

- Cosa succede con le mosse di Gauss sulle righe?

1. se si scambiano 2 righe tra di loro, il det cambia segno
2. moltiplicare una riga per $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$, moltiplica anche il det per λ
3. sommare a una riga un multiplo di un'altra non cambia il determinante.

Con la riduzione a scalini, ottenete una matrice con tanti zeri per cui gli sviluppi di Laplace sono più semplici.

Altre proprietà

- $\det({}^tA) = \det(A)$
- tutto quello che vi ho detto per le righe vale anche per le colonne.
  Cioè per calcolare det, potete fare mosse di Gauss sulle colonne

N.B. Le mosse di Gauss sulle colonne NON vanno bene sui sistemi lineari.

Altre proprietà

- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

N.B: in generale $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

- Se le colonne (o le righe) di A sono linearmente dipendenti (p.es.: ce ne è una nulla, ce ne sono due uguali, oppure ce ne è una che è combinazione lineare delle altre) allora $\det(A) = 0$.

OSS V sp. vett. su $\mathbb{K}$. $v_1, \dots, v_r \in V$. Se esiste un sottoinsieme di $\{v_1, \dots, v_r\}$ lin. dip., allora $v_1, \dots, v_r$ sono lin. dip.

Esercizio per casa: convincetevi di questa cosa!

Determinanti e rango I

Teorema $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ matrice quadrata. Allora i seguenti fatti sono equivalenti:

1) A è invertibile, ovvero $\exists B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ t.c. $AB = BA = I$
2) $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ è iniettiva / suriettiva / biettiva
3) Le colonne / righe di A sono lin. indip. / generatori / una base di $\mathbb{K}^n$
4) $rk(A) = n$
5) $\det(A) \neq 0$

$1 \Leftrightarrow 2$ già fatto nella lezione precedente

$2 \Leftrightarrow 4$: L_A suriettiva $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im} A = \mathbb{K}^n$ $\Leftrightarrow$ $rk(A) = \dim \operatorname{Im} A = n$

Determinanti e rango II

vuol dire ottenuta cancellando delle righe e/o delle colonne

rettangolare

Teorema $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$

Se esiste una sottomatrice quadrata $r \times r$ che abbia determinante $\neq 0$, allora $rk(A) \geq r$.

Esempio

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ha $\det \neq 0$

ha $\det = 0$ inutile

$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0$.

Oss Questo teorema in realtà può essere migliorato a un risultato più preciso che ci dice quando $rk(A) = r$. Questo risultato più preciso si chiama criterio degli orlati.

Un modo per calcolare l'inversa di una matrice

Data $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, il COFATTORE di posto (i,j)

$$Cof(A)_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det\left(\begin{array}{c}\text{matrice ottenuta da } A \\ \text{eliminando la } i\text{-esima riga} \\ \text{e la } j\text{-esima colonna}\end{array}\right)$$

Considerate la matrice $Cof(A) \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

<u>Teorema</u> $A \cdot {}^t(Cof(A)) = {}^t(Cof(A)) \cdot A = \det(A) \cdot I$

I è la matrice identità

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$$

<u>Cor</u> Se $\det(A) \neq 0$, allora

$$A^{-1} = (\det(A))^{-1} \cdot {}^t(Cof(A))$$

Un ulteriore modo per calcolare A^{-1} è applicare le mosse di Gauss sulle righe di $(A \mid I) \in M_{n\times 2n}(\mathbb{K})$ per trovare $(I \mid A^{-1})$