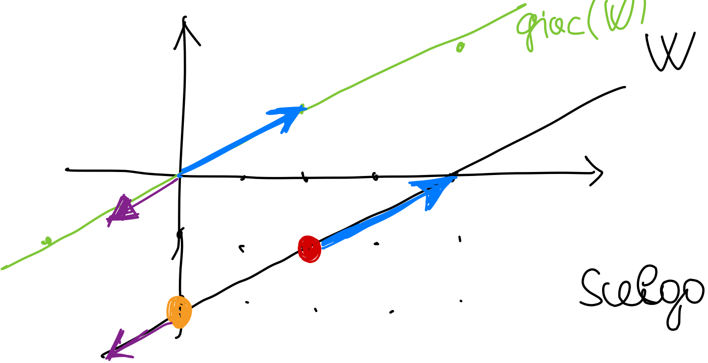
Lo slogan della geometria affine:

- i sottosp. affini sono traslati di sottosp. vettoriali

- la geometria affine è una generalizzazione dell'algebra lineare, ottenuta aggiungendo un termine di traslazione.

Esempio $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x - 2y = 4 \right\}$



La GIACITURA di W è il traslato di W che passa per l'origine

$\text{giac}(W) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x - 2y = 0 \right\}$

prendo il sist. lin. omog. associato

Scelgo un punto di W e una base di giac(W):

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$W = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$ sono eq. parametriche di W.

Potevo fare anche altre scelte: $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in W$, $\begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ base di giac(W)

$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}$ sono altre eq. parametriche di W

Le due eq. parametriche sono equivalenti:

$\begin{pmatrix} 2 + 2t \\ -1 + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ -2 - \frac{1}{2}s \end{pmatrix}$ se $2 + 2t = -s$

$s = -2t - 2$

$t = \frac{s+2}{-2} = -\frac{1}{2}s - 1$

I due numeri sono le matrici di cambio base tra le due basi scelte di giac(W):

$\begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

$\mathbb{K}$ campo

<u>Def</u> Un **SOTTOSPAZIO AFFINE** di $\mathbb{K}^n$ è un sottoinsieme non vuoto che consiste delle soluzioni di un sistema lineare:

$$W = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\} \quad \text{dove } A \in M_{m\times n}(\mathbb{K}),\ b \in \mathbb{K}^m$$

La **GIACITURA** di W è $\text{giac}(W) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\} = \text{Ker}\, A$

è un sottosp. vettoriale!

$$\dim W := \dim \text{giac}(W) = \dim \text{Ker}\, A = n - \text{rk}(A).$$

$L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$,

$\underbrace{\dim \mathbb{K}^n}_{=n} = \dim \text{Ker}\, L_A + \underbrace{\dim \text{Im}\, L_A}_{=\text{rk}(A)}$

RETTA := sottosp. affine di dim 1

PIANO " 2

IPERPIANO " . . . . n−1

Quando $W = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\}$ si dice che abbiamo **EQUAZIONI CARTESIANE** di W. Ce ne sono tante: sistemi lineari equivalenti

Dette **EQUAZIONI PARAMETRICHE** di un sottosp. affine sono

$$W = \{ w_0 + t_1 v_1 + \dots + t_k v_k \mid t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K} \}$$

parametri

dove $w_0 \in W$ e $\{v_1, \dots, v_k\}$ è una base di giac(W)

Da eq. cartesiane a eq. parametriche: risolvere il sistema lineare (o per sostituzione o per riduzione a scalini)

Da eq. parametriche a eq. cartesiane:
si risolve il sistema lineare che ha per incognite i parametri e poi si impone il teorema di Rouché - Capelli.

Esempio $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; t, s \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$

sono eq. parametriche. Come si passa a un'eq. cartesiana? Cioè voglio esprimere W come l'insieme delle sol. di un sist. lineare.

Consideriamo il sist. lineare

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + s \\ z = -t + s \\ u = -1 + 2s \end{cases}$$

pensato nelle incognite t, s

$$\begin{cases} t = x \\ s = y - 1 \\ -t + s = z \\ 2s = u + 1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-1 \\ -1 & 1 & z \\ 0 & 2 & u+1 \end{array}\right)$$

Applico la riduzione a scalini: sommo alla 3° riga la 1°:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-1 \\ 0 & 1 & x+z \\ 0 & 2 & u+1 \end{array}\right)$$

3° riga ⇝ 3° riga − 2° riga

4° riga ⇝ 4° riga − 2 · (2° riga)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-1 \\ 0 & 0 & x+z-(y-1) \\ 0 & 0 & u+1-2(y-1) \end{array}\right)$$

$x - y + z + 1$

$-2y + u + 3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} \in W \iff \exists\, t,s \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \begin{cases} x = t \\ y = 1+s \\ z = -t+s \\ u = -1+2s \end{cases} \iff$$

il sistema lineare

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-1 \\ 0 & 0 & x-y+z+1 \\ 0 & 0 & -2y+u+3 \end{array}\right)$$

ha almeno una sol.

Rouchi-Capelli

$$\iff \operatorname{rk}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-1 \\ 0 & 0 & x-y+z+1 \\ 0 & 0 & -2y+u+3 \end{array}\right) = 2 \iff \begin{cases} x-y+z+1=0 \\ -2y+u+3=0 \end{cases}$$

sono delle eq. cartesiane di W

Se facessi una riduzione a scala non voglio nuovi pivot

Da param. a cartesiane si può anche usare il criterio dei minori orlati

Se S, T sono sottosp. affini di $\mathbb{K}^n$, allora $S \cap T$ è vuoto oppure è un sottosp. affine tale che
$\text{giac}(S \cap T) = \text{giac}(S) \cap \text{giac}(T)$.

L'intersezione si calcola bene con le eq. cartesiane

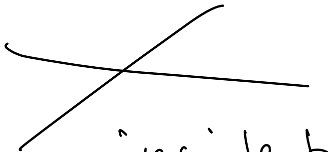
$\vdash$

S, T sottosp. affini di $\mathbb{K}^n$. $S \nsubseteq T$, $T \nsubseteq S$. Allora
S e T si dicono

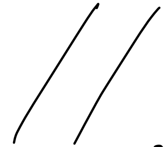
- INCIDENTI se $S \cap T \neq \emptyset$
- PARALLELI se $S \cap T = \emptyset$ e $(\text{giac}(S) \subseteq \text{giac}(T)$ o $\text{giac}(T) \subseteq \text{giac}(S))$
- SGHEMBI se $S \cap T = \emptyset$, $\text{giac}(S) \nsubseteq \text{giac}(T)$, $\text{giac}(T) \nsubseteq \text{giac}(S)$

$\emptyset$ è l'insieme vuoto

2 rette in $\mathbb{R}^2$

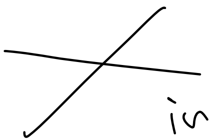


incidenti

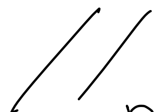


parallele

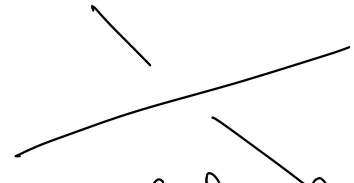
2 rette in $\mathbb{R}^3$



incidenti



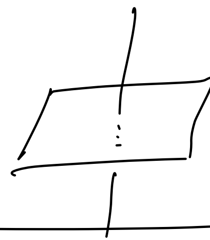
parallele



sghembe

retta, piano in $\mathbb{R}^3$

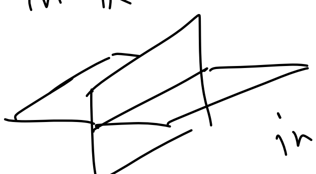
paralleli



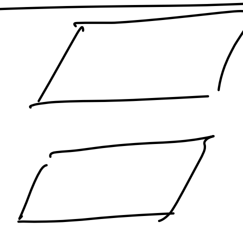
incidenti

retta $\subseteq$ piano

2 piani in $\mathbb{R}^3$



incidenti

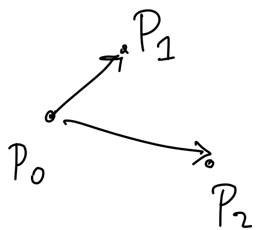


paralleli

Dati $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{K}^n$ si chiama INVILUPPO AFFINE (SPAN AFFINE) di $P_0, \dots, P_k$ il più piccolo sottosp. affine che li contiene:

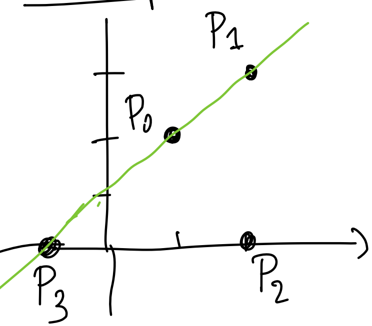
$$\mathrm{Span}_{aff}(P_0, \dots, P_k) = \{ P_0 + t_1(P_1 - P_0) + \dots + t_k(P_k - P_0) \mid t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K} \}$$

sono eq. parametriche



Esempio $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Span}_{aff}(P_0, P_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$ eq. parametriche della retta verde



$P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Span}_{aff}(P_0, P_1, P_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

$P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Span}_{aff}(P_0, P_1, P_3) = \mathrm{Span}_{aff}(P_0, P_1)$$

$\mathrm{Span}(P_0, P_1) = \mathbb{R}^2$

OSS $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = \mathrm{Span}_{aff}(0, v_1, \dots, v_k)$

Equazione della retta per due punti in $\mathbb{R}^2$

Alle superiori forse avete visto:

$$\frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

$P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$ distinti.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \operatorname{Span}_{aff}(P_0, P_1) \iff \exists t \in \mathbb{K} \text{ t.c. } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} \iff$$

"eq. parametriche"

$\iff$ il sistema lineare $\begin{cases} (x_1-x_0)t = x - x_0 \\ (y_1-y_0)t = y-y_0 \end{cases}$ nell'incognita t ha almeno una soluzione

$$\overset{\text{Rouché Capelli}}{\iff} \operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x-x_0 \\ y_1-y_0 & y-y_0 \end{pmatrix} = 1$$

$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_1-x_0 \\ y_1-y_0 \end{pmatrix} = 1$ perché $\begin{pmatrix} x_1-x_0 \\ y_1-y_0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\iff \det\begin{pmatrix} x_1-x_0 & x-x_0 \\ y_1-y_0 & y-y_0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_1-x_0)\cdot(y-y_0) - (y_1-y_0)(x-x_0) = 0$$

eq. cartesiana

Piano passante per 3 punti in $\mathbb{R}^3$

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$\pi = \mathrm{Span}_{aff}(P_0, P_1, P_2)$ supponiamo che sia un piano.

Quali sono le eq. cartesiane di π? Stesso ragionamento di prima:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \pi \iff \mathrm{rk}\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & y - y_0 \\ z_1 - z_0 & z_2 - z_0 & z - z_0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\iff \det \boxed{} = 0 \quad \leftarrow \text{eq. cartesiana di } \pi$$

Def Dei punti $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{K}^n$ si dicono AFFINEMENTE INDIPENDENTI se

$$\dim \operatorname{Span}_{aff}(P_0, \dots, P_k) = k$$

o equivalentemente se

$P_1 - P_0, \dots, P_k - P_0$ sono lin. indip.

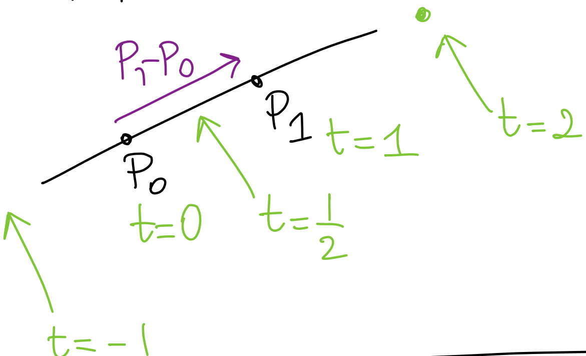
Oss L'indipendenza affine non dipende dall'ordine di $P_0, \dots, P_k$.

Esempio
- P da solo è sempre aff. indip.
- P_0, P_1 aff. indip $\iff P_1 - P_0 \neq 0 \iff P_1 \neq P_0$
- P_0, P_1, P_2 aff. indip $\iff$ non stanno su una retta
  non sono collineari/allineati
- P_0, P_1, P_2, P_3 aff. indip $\iff$ non esiste un piano che li contiene, cioè non sono complanari

$\boxed{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$

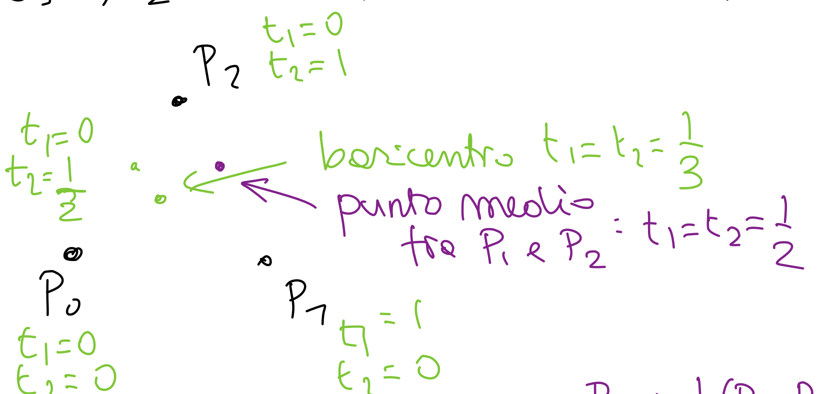
$P_0, P_1 \in \mathbb{R}^n$ distinti. $\mathrm{Span}_{aff}(P_0, P_1) = \{ P_0 + t(P_1 - P_0) \mid t \in \mathbb{R} \}$

moto rettilineo uniforme



Il segmento tra P_0 e P_1 è $\{ P_0 + t(P_1 - P_0) \mid t \in \mathbb{R},\ 0 \le t \le 1 \}$

$P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{R}^n$ aff. indip. $\mathrm{Span}_{aff}(P_0, P_1, P_2) = \{ P_0 + t_1(P_1 - P_0) + t_2(P_2 - P_0) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \}$



Il triangolo con vertici P_0, P_1, P_2 è

$$\left\{ P_0 + t_1(P_1 - P_0) + t_2(P_2 - P_0) \;\middle|\; \begin{array}{l} t_1, t_2 \in \mathbb{R} \\ 0 \le t_1 \le 1 \\ 0 \le t_2 \le 1 \\ t_1 + t_2 \le 1 \end{array} \right\}$$

$$P_0 + \frac{1}{2}(P_1 - P_0) + \frac{1}{2}(P_2 - P_0) = \frac{P_1 + P_2}{2}$$

Trasformazioni affini

Def Una TRASFORMAZIONE AFFINE è una funzione

$$f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$
$$x \longmapsto Ax+b$$

dove $\underbrace{A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})}_{\text{parte lineare di } f}$, $\underbrace{b \in \mathbb{K}^m}_{\text{termine di traslazione}}$

Nota A e b sono univocamente determinati dalla funzione f

Nota $f(0) = b$ può non essere zero

$b=0 \iff f$ è lineare

Def Una trasf. affine $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $x \mapsto Ax+b$ come sopra si dice AFFINITÀ se $m=n$ e la matrice A è invertibile, cioè tale che $\det(A) \neq 0$.

Esercizio per casa Un'affinità è una funzione biettiva (biunivoca e invertibile) e la sua inversa è un'affinità.

Soluzione dell'esercizio: $y = f(x) = Ax + b$

Per calcolare f^{-1} devo esprimere x in funzione di y:

$Ax = y - b$ moltiplico per A^{-1}: $\underbrace{A^{-1}Ax}_{= Ix = x} = A^{-1}(y-b)$

$$x = A^{-1} \cdot y - A^{-1} \cdot b$$

quindi f^{-1} è la trasformazione affine con parte lineare A^{-1}, con termine di traslazione $-A^{-1} b$.

Teorema (di estensione lineare unica) V, W sp. vett. su $\mathbb{K}$

$v_1, \dots, v_n$ base di V. ($n = \dim V$)

$w_1, \dots, w_n$ vettori qualsiasi di W

$\Rightarrow \exists!\ f: V \longrightarrow W$ lineare tale che $f(v_1) = w_1, \dots, f(v_n) = w_n$.

Metodo pratico $V = \mathbb{K}^n$, $W = \mathbb{K}^m$

$M_V = (v_1 | \cdots | v_n)$ è la matrice che ha per colonne $v_1, \dots, v_n$

$M_V \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, $\quad M_V \cdot e_i = v_i$, $\quad M_V$ è invertibile perché le colonne sono lin. indip.

$(M_V)^{-1} \cdot v_i = e_i$

$M_V \cdot e_i = v_i$ moltiplico ambo i membri per M_V^{-1}

$\underset{\overset{\parallel}{e_i}}{I \cdot e_i} \quad ((M_V)^{-1} \cdot M_V) \cdot e_i = (M_V)^{-1} (M_V \cdot e_i) = (M_V)^{-1} v_i$

$M_W = (w_1 | \dots | w_n) \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. La matrice voluta $A = M_W \cdot (M_V)^{-1}$

Infatti:

$A \cdot v_i = M_W \cdot (M_V)^{-1} v_i \overset{\text{uso}}{=} M_W \cdot e_i = w_i \quad$ quindi $f = L_A$

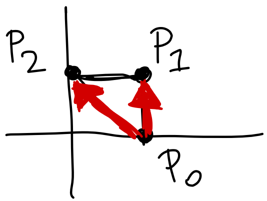
Teorema (di estensione affine unica)
$P_0, \dots, P_n \in \mathbb{K}^n$ aff. indip.
$Q_0, \dots, Q_n \in \mathbb{K}^m$ punti qualsiasi.
$\Rightarrow \exists!\ f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ appl. affine tale che $f(P_i) = Q_i \ \forall i = 0, \dots, n.$
Tale f è un'affinità $\Longleftrightarrow m = n$ e $Q_0, \dots, Q_n$ sono aff. indip.

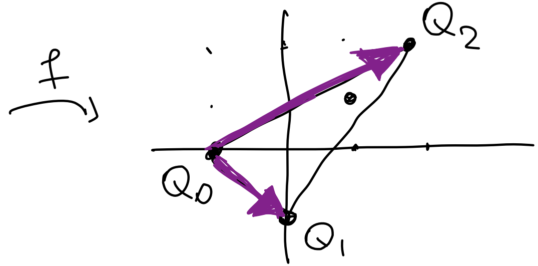
Metodo pratico: Cerco $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$ tale che
$A \cdot P_i + b = Q_i \quad \forall i = 0, \dots, n.$
sottraggo $A \cdot P_0 + b = Q_0 \Rightarrow A \cdot P_i + \cancel{b} - (A \cdot P_0 + \cancel{b}) = Q_i - Q_0$
$\Rightarrow A \cdot (P_i - P_0) = Q_i - Q_0$
So che $P_1 - P_0, \dots, P_n - P_0$ sono una base di $\mathbb{K}^n$.
Per trovare A applico il metodo nella slide precedente con
$v_i = P_i - P_0$
$w_i = Q_i - Q_0$

$$A = \left(Q_1 - Q_0 \middle| \dots \middle| Q_n - Q_0 \right) \cdot \left(P_1 - P_0 \middle| \dots \middle| P_n - P_0 \right)^{-1}$$

Per ora abbiamo trovato la parte lineare.
Come si trova il termine di traslazione b?
$Q_0 = f(P_0) = A \cdot P_0 + b \Rightarrow b = Q_0 - A \cdot P_0.$

Esempio





Voglio $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ affinità tale che

$$f(P_i) = Q_i \quad i = 0, 1, 2.$$

$$P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Q_1 - Q_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 - P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Q_2 - Q_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La parte lineare di f è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Trovate b per casa

Esempio $\pi = \mathrm{Span}_{\text{aff}}\left(\underset{P_0}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}, \underset{P_1}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{P_2}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}\right)$

Trovare f la riflessione ortogonale rispetto a π.

$\pi = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=1 \right\}$ eq. cartesiana di π.

$\mathrm{giac}(\pi) = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0 \right\} = \mathrm{Span}\left(\underset{\substack{\| \\ v_1 \\ P_1 - P_0}}{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{\substack{\| \\ v_2 \\ P_2 - P_0}}{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}\right)$

Qual è la direzione perpendicolare a π? $\boxed{\text{È } v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$ lo vedremo meglio più avanti

Per calcolare la parte lineare A di f, dovete trovare la matrice $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ tale che

$$\left.\begin{aligned} A\cdot v_1 &= v_1 \\ A\cdot v_2 &= v_2 \end{aligned}\right]$$

alle direzioni di giac(π), A non sta facendo nulla, ovvero le lascia invariate

$$A\cdot v_3 = -v_3 \;\Big]$$

il vettore v_3 viene mandato nell'opposto di v_3 perché v_3 è ortogonale a π.

Quindi la parte lineare A di f si trova facendo

$$A = \left(v_1 \,\middle|\, v_2 \,\middle|\, -v_3 \right) \cdot \left(v_1 \,\middle|\, v_2 \,\middle|\, v_3 \right)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Il termine di traslazione b di f si calcola imponendo $f(P_0) = P_0$

cioè $\quad A \cdot P_0 + b = P_0 \implies b = A \cdot P_0 - P_0$.