Autovalori / autovettori / diagonalizzare le matrici ha applicazioni in ogni ambito della fisica e dell'ingegneria:

- tensore d'inerzia
- sistemi lineari di equazioni differenziali: oscillatore armonico $\ddot{x} = kx$ esponenziali di matrici
- statistica: analisi delle componenti principali

Le matrici diagonali sono facili

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

Vogliamo "rendere", se possibile, ogni matrice diagonale, cioè vogliamo "diagonalizzare".

Def V sp. vett. sul campo $\mathbb{K}$. Un ENDOMORFISMO di V è un'applicazione lineare da V a V.

$\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V, V)$ è l'insieme degli endomorfismi.

Se $\mathcal{B}$ è una base di V, allora la matrice associata a $f \in \mathrm{End}(V)$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ è la matrice associata a f prendendo $\mathcal{B}$ come base sia in partenza che in arrivo:

base di arrivo

$$M_{\mathcal{B}}(f) := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$$

base di partenza

$M_{\mathcal{B}}(f)$ è una matrice quadrata

__Esempio__ $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $f = L_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$A = M_{can}(f)$.

Ora considero $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Per il momento questi vettori vengono dal cielo

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ perché $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = -2-3 = -5 \neq 0$.

Voglio calcolare $M_{\mathcal{B}}(f)$. Come si fa?

1° modo: $f(v_1) = A \cdot v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+6 \\ 6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 2v_1 + 0v_2$

$f(v_2) = A v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0v_1 - 3v_2$

$[f(v_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[f(v_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ è diagonale

2° modo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B} & \text{can} & \text{can} & \mathcal{B} \\
\mathbb{R}^2 \arrow[r] \arrow[rrr, bend left, "f"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "id"] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}
$$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = M^{\mathcal{B}}_{can}(id) \cdot M^{can}_{can}(f) \cdot M^{can}_{\mathcal{B}}(id)$$

$$M^{can}_{can}(f) = A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

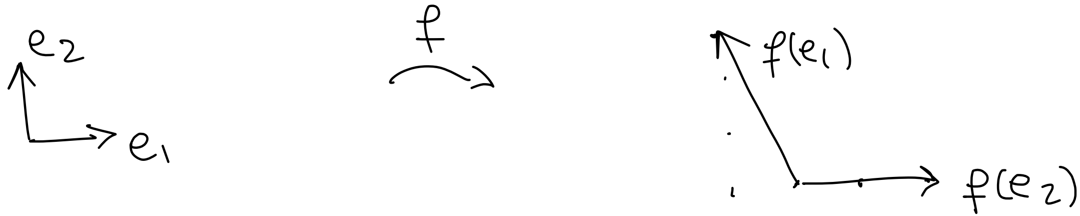
$$M^{can}_{\mathcal{B}}(id) = (v_1 | v_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M^{\mathcal{B}}_{can}(id) = \left(M^{can}_{\mathcal{B}}(id)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

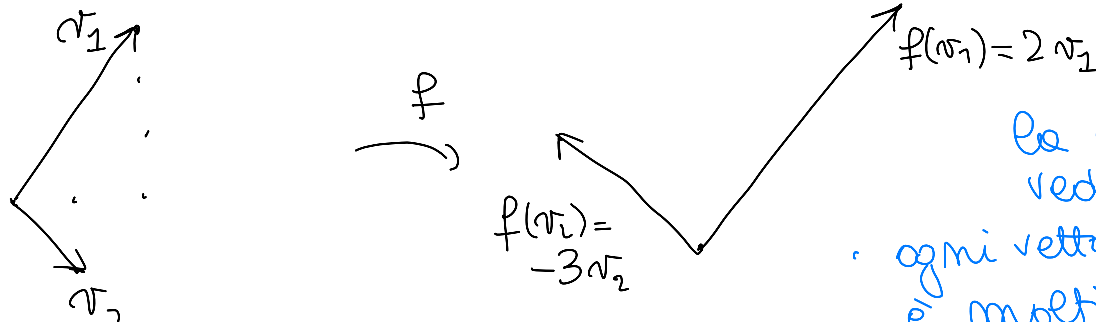
$$M_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$M = (v_1 | v_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$M^{-1} A M$ è diagonale



La geometria di f è un po' oscura



La geometria si vede meglio.

- ogni vettore di $\mathrm{span}(v_1)$ è moltiplicato per 2
- ogni vettore di $\mathrm{span}(v_2)$ è moltiplicato per -3

Un altro vantaggio è:

$B = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, allora $A = MBM^{-1}$

$A^2 = MB\cancel{M^{-1}}\cancel{M}BM^{-1} = MB^2M^{-1}$, $A^k = MB^kM^{-1} = M \cdot \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & (-3)^k \end{pmatrix} M^{-1}$ è facile

Questione irrisolta: da dove vengono v_1 e v_2 che sono stati così convenienti?

Def Due matrici quadrate $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ si dicono SIMILI se rappresentano lo stesso endomorfismo rispetto a basi diverse, cioè se esiste $M \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertibile tale che $B = M^{-1} A M$.

$$
\begin{tikzcd}
\underset{\mathcal{B}'}{V} \arrow[r, "id"] \arrow[rrr, bend left, "f"] & \underset{\mathcal{B}}{V} \arrow[r, "f"] & \underset{\mathcal{B}}{V} \arrow[r, "id"] & \underset{\mathcal{B}'}{V}
\end{tikzcd}
$$

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(id)\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id)$$

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = M^{-1}\, M_{\mathcal{B}}(f)\, M \qquad \text{dove } M = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id)$$

Vale anche:

$$M\, M_{\mathcal{B}'}(f)\, M^{-1} = M_{\mathcal{B}}(f)$$

Prop Due matrici simili hanno la stessa traccia e lo stesso det.

Dim $\det(M^{-1}AM) \overset{\text{Binet}}{=} \det(M^{-1})\det(A)\det(M) = \cancel{\det(M)^{-1}}\det(A)\cancel{\det(M)}$

M è invertibile!

$$tr(M^{-1}AM) = tr((M^{-1}A)\cdot M) = tr(M(M^{-1}A)) = tr(IA) = tr(A).$$

$tr(C\cdot D) = tr(D\cdot C)$
se C e D
sono quadrate

traccia = somma degli elementi sulla diag. principale, cioè dal posto (1,1) al posto (n,n)

$\square$

Si può definire det e tr di un endomorfismo come det e tr di una qualsiasi matrice che lo rappresenta.

Def IL POLINOMIO CARATTERISTICO di $f \in End(V)$ è

$$P_f(t) = \det(M_B(f) - t \cdot I)$$

per una qualsiasi base B di f

- È un polinomio nella variabile t a coeff. in $\mathbb{K}$
- È ben definito: la dimostrazione è analoga a quella della pagina precedente

cioè non dipende dalla base B scelta

Esempio $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad P_A(t) = \det(A - tI) = \det\begin{pmatrix} -1-t & 2 \\ 3 & -t \end{pmatrix} =$

$= (-1-t)\cdot(-t) - 6 = t(t+1) - 6 = t^2 + t - 6$

Prop Se $f \in End(V)$, allora $P_f(t)$ è un polinomio di grado $\dim(V) = n$

- il coeff. di t^n è $(-1)^n$
- il coeff. di $t^0 = 1$ è $\det(f)$
- il coeff. di t^{n-1} è $(-1)^{n-1} tr(f)$

<u>Oss</u> Due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico

<u>Esempio</u> $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $P_A(t) = t^2 + t - 6$
appena calcolato

A è simile a $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

$$P_B(t) = \det(B - tI) = \det\begin{pmatrix} 2-t & 0 \\ 0 & -3-t \end{pmatrix} = (2-t)(-3-t) = t^2 + t - 6$$

<u>Oss</u> Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ matrice triangolare superiore

$* =$ qualsiasi elemento

allora $P_A(t) = \det\begin{pmatrix} a_{11}-t & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22}-t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}-t \end{pmatrix} = (a_{11}-t)(a_{22}-t)\dots(a_{nn}-t)$

Def Sia $f \in End(V)$ fissato.
Un AUTOVETTORE di f è un vettore non nullo $v \in V$ tale che esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $f(v) = \lambda v$. [cioè se $f(v) \in Span(v)$]
Un AUTOVALORE di f è un numero $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che esiste $v \in V$ non nullo tale che $f(v) = \lambda v$.

Oss • $f(0) = 0 = \lambda \cdot 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$. Per questo richiediamo $v \neq 0$.
• se $v \in V$, $v \neq 0$ con $f(v) = \lambda v$ e $f(v) = \mu v$, allora $\lambda = \mu$:
infatti $0 = f(v) - f(v) = \lambda v - \mu v = (\lambda - \mu) v \overset{v \neq 0}{\Longrightarrow} \lambda - \mu = 0$. $\square$
Ad un autovettore è associato un unico autovalore
• ad un autovalore sono associati molti autovettori:
se v è un autovettore associato a λ, allora anche tutti i multipli di v, non nulli, sono autovettori associati a λ
$f(v) = \lambda v$, $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0 \Longrightarrow f(av) = a \cdot f(v) = a \cdot \lambda v = \lambda \cdot (av)$
• $0 \in \mathbb{K}$ può essere un autovalore.
Questo succede $\Longleftrightarrow \exists\, v \in V$ t.c. $v \neq 0$ e $f(v) = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} f \supsetneq \{0\} \Longleftrightarrow f$ non è iniettiva / suriettiva / biunivoca

Oss Autovalori e autovettori hanno senso solo per endomorfismi, non per tutte le applicazioni lineari.

Infatti se $f(v) = \lambda v$ allora automaticamente $f(v)$ deve stare nello stesso spazio vettoriale che contiene λv, oppure v

Come si trovano gli autovalori?

sostituite t a λ nel pol. caratteristico

Prop Siano $f \in End(V)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Allora λ è un autovalore di $f \iff P_f(\lambda) = 0$, cioè λ è una radice del polinomio caratteristico

Terminologia: una radice di un polinomio $p(t)$ è $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $p(\lambda) = 0$, cioè il polinomio si annulla in $t = \lambda$.

Dim Scegliendo una base $\mathcal{B}$ di V, posso assumere che $V = \mathbb{K}^n$, $f = L_A$ con $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

λ è un autovalore di f (o di A) $\iff \exists v \in \mathbb{K}^n$ t.c. $v \neq 0$ e $Av = \lambda v$

$\iff \exists v \in \mathbb{K}^n$ t.c. $v \neq 0$ e $0 = Av - \lambda v = Av - \lambda I v = (A - \lambda I)v$

$\iff$ il kernel della matrice $A - \lambda I$ contiene un vettore $\neq 0$

$\iff \det(A - \lambda I) = 0$

Ma $\det(A - \lambda I) = P_A(\lambda)$ è il numero che ottenete mettendo λ al posto della variabile t in $P_A(t)$. $\square$

<u>Corollario</u> $f \in End(V)$, $\dim V = n$.
$\Longrightarrow$ ci sono al più n autovalori distinti

<u>Dim</u> P_f è un pol. di grado n e ha al più n radici distinte. $\square$

Attenzione: • possono avere molteplicità
p. es. $(t-1)^2(t-3)$ la radice 1 ha molteplicità 2

• non tutte le radici di P_f stanno in $\mathbb{K}$
p. es. $(t-1)(t^2+1)$ ha solo la radice 1 in $\mathbb{R}$
ha le radici $1, i, -i$ in $\mathbb{C}$

<u>Def</u> Se $f \in End(V)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ è un autovalore di f, allora la MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA di λ, denotata con $m_a(\lambda)$, è la molteplicità con cui λ è radice del polinomio caratteristico p_f

<u>Esempio</u> $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -17 \\ 0 & 5 & 1000 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$ $\quad p_A(t) = (5-t)(5-t)(-10-t)$

$$= (5-t)^2(-10-t)^1$$

Gli autovalori di A sono:
- 5 con molt. algebrica 2
- -10 " " " 1

<u>Oss</u> In generale gli autovalori di una matrice triangolare superiore/inferiore sono gli elementi sulla diagonale principale e le molteplicità algebriche sono quante volte compaiono.

Def Se $\lambda \in \mathbb{K}$ è un autovalore di $f \in \mathrm{End}(V)$, allora
l'AUTOSPAZIO relativo a λ è

$$V_\lambda := \{0\} \cup \{v \in V \mid v \neq 0 \text{ e } v \text{ è un autovettore di } f \text{ relativo a } \lambda\}$$

$$= \{0\} \cup \{v \in V \mid v \neq 0 \text{ e } f(v) = \lambda v\}$$

$$= \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

$$0 = f(v) - \lambda v = f(v) - \lambda\, id(v) = (f - \lambda id)(v)$$

$$= \{v \in V \mid (f - \lambda id)(v) = 0\}$$

$$= \mathrm{Ker}(f - \lambda id)$$ è un sottospazio vett. di V

La MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA di λ come autovalore di f
è la dimensione del corrispondente autospazio:

$$m_g(\lambda) = \dim V_\lambda$$

Oss Se 0 è un autovalore di f, allora $V_0 = \mathrm{Ker} f$

Teorema Se λ è un autovalore di $f \in \mathrm{End}(V)$, allora

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq \dim V.$$

Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ e $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V.
$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left([f(v_1)]_{\mathcal{B}} \,\middle|\, \dots \,\middle|\, [f(v_n)]_{\mathcal{B}} \right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow [f(v_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, [f(v_n)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_n = \lambda_1 v_1 \\ f(v_2) = \lambda_2 v_2 \\ \vdots \\ f(v_n) = \lambda_n v_n \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow \forall i = 1, \dots, n$ $\quad v_i$ è un autovettore di f relativo a λ_i

Se $f \in End(V)$ e $\mathcal{B}$ è una base di V, allora:

$M_{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale $\iff$ ogni elemento di $\mathcal{B}$ è un autovettore di f

Def $f \in End(V)$ si dice DIAGONALIZZABILE se esiste $\mathcal{B}$ base di V tale che $M_{\mathcal{B}}(f)$ è diagonale, ovvero tale che ogni vettore di $\mathcal{B}$ è un autovettore di f.

Definizione identica per le matrici:
$A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ è diagonalizzabile se è simile a una matrice diagonale, cioè se esiste $M \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ invertibile tale che $M^{-1}AM$ è diagonale.

Diagonalizzare A significa trovare M e la matrice diagonale $M^{-1}AM$.

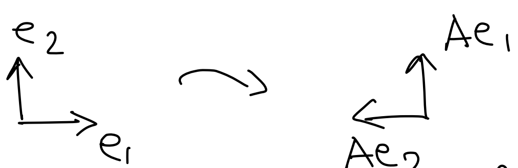
Teorema (Criterio di diagonalizzabilità)

V sp. vett. su $\mathbb{K}$ di dimensione finita. $f \in \mathrm{End}(V)$ Allora:

f è diagonalizzabile (cioè esiste una base di V costituita da autovettori di f) $\iff$

- tutte le radici di f stanno nel campo $\mathbb{K}$
- per ogni λ autovalore di f $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$



E' la rotazione di $90°$ in senso antiorario

A occhio: tutte le direzioni cambiano, quindi non ci sono autovettori né autovalori

$P_A(t) = \det\begin{pmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = t^2 + 1$ non ha radici in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ A non ha autovalori in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ A non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$

(Ma è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$)

Esempio $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ $P_A(t) = \det \begin{pmatrix} 5-t & 3 \\ 0 & 5-t \end{pmatrix} = (5-t)^2$

C'è un unico autovalore, 5, che ha molt. alg. 2.

P_A ha tutte le radici in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ la 1° condizione è soddisfatta.

Verifichiamo se la 2° condizione è soddisfatta: devo calcolare la molt. geometrica; devo studiare l'autospazio

$V_5 = \operatorname{Ker}(A - 5I) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 5-5 & 3 \\ 0 & 5-5 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha dimensione 1 (infatti $V_5 = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$)

$\Rightarrow$ $m_g(5) = 1 < 2 = m_a(5)$

$\Rightarrow$ A non è diagonalizzabile

Metodo per diagonalizzare una matrice $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$

- Calcolo il polinomio caratteristico $P_A(t) = \det(A - t\cdot I)$
- Fattorizzo $P_A(t)$ e determino le radici di $P_A(t)$, che sono gli autovalori, e le loro molteplicità algebriche.

Se non tutte le radici sono in $\mathbb{K}$ (cioè se $\sum_\lambda m_a(\lambda) < n$), vi fermate.

- per ogni λ autovalore, determino

formula del rango

$$m_g(\lambda) = \dim V_\lambda = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I) = n - \underbrace{rk(A - \lambda I)}_{\text{da calcolare come volete}}$$

Se la 2° condizione del criterio di diagonalizz. non è soddisfatta, vi fermate.

Altrimenti: per ogni autovalore λ, trovo una base di V_λ (risolvendo il sist. lineare omog. dato dalla matrice $A-\lambda I$)

Ora unisco tutte queste basi: l'unione è una base di $\mathbb{K}^n = V$

È una base di autovettori $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$

$$M = M^{can}_{\mathcal{B}}(id) = (v_1 | \dots | v_n)$$

allora $M^{-1}AM$ è diagonale e sulla diagonale ci sono gli autovalori di A, e il numero di volte con cui compaiono è la loro molteplicità (algebrica o geometrica).

<u>Esempio</u> $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ è l'esempio visto all'inizio.

$P_A(t) = t^2 + t - 6 = (t-2)(t+3)$

$\Rightarrow$ gli autovalori sono 2 e -3 con molt. alg. 1

$V_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \boxed{=} \mathrm{Span}\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{= v_1}$

$V_{-3} = \mathrm{Ker}(A + 3I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{= v_2}$

$M = (v_1 \mid v_2)$

$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

ora spiega come trovare v_1 e v_2 che erano i vettori che erano venuti dal cielo

$\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} -3x + 2y = 0 \\ \underbrace{3x - 2y = 0}_{\text{inutile}} \end{array} \right\} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Esercizio per casa (per il weekend, entro lunedì 13/12/2021)

Diagonalizzare la matrice
$$\begin{pmatrix} -5 & 6 & -6 \\ -9 & 10 & -9 \\ -6 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

Esercizio Diagonalizzare tante matrici.
Trovate esempi fattibili in qualsiasi libro/dispensa di algebra lineare