V sp. vett. su $\mathbb{K}$ di dim n. $f \in \mathrm{End}(V)$.

- $\forall \lambda$ autovalore, $1 \le m_g(\lambda) \le m_a(\lambda) \le n$.

- CRITERIO DI DIAGONALIZZABILITÀ:

f è diagonalizzabile ($\exists B$ base di V t.c. $M_B(f)$ è diagonale) $\iff$ $\begin{cases} \cdot \text{ tutte le radici di } P_f \text{ sono in } \mathbb{K} \\ \cdot\ \forall \lambda \text{ autovalore } m_g(\lambda) = m_a(\lambda) \end{cases}$ $\iff$ $\displaystyle\sum_{\lambda \text{ autovalore}} m_g(\lambda) = n$

- CRITERIO DI TRIANGOLABITÀ:

f è triangolabile ($\exists B$ base di V t.c. $M_B(f)$ è triangolare superiore) $\iff$ tutte le radici di P_f sono in $\mathbb{K}$ $\iff$ $\displaystyle\sum_{\lambda \text{ autovalore}} m_a(\lambda) = n$

richiediamo che il numero delle radici di P_f (contate con molteplicità algebrica) sia uguale al grado di P_f, che è n.

Prop V sp. vett. su $\mathbb{K}$, $f \in End(V)$, $\dim V = n$.
Se f ha n autovalori distinti, allora f è diagonalizzabile

Dim $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ autovalori distinti

$$P_f(t) = (\lambda_1 - t)^{m_a(\lambda_1)} \cdots (\lambda_n - t)^{m_a(\lambda_n)}$$

Ma $\deg P_f = n$ quindi $m_a(\lambda_1) = \dots = m_a(\lambda_n) = 1$

Quindi per la disuguaglianza $1 \leq m_g \leq m_a$, si ha

$$m_g(\lambda_1) = \dots = m_g(\lambda_n) = 1.$$

E quindi f è diagonalizzabile. $\square$

Oss Esistono endomorfismi diagonalizzabili t.c. il numero di autovalori distinti è $< n$: esempio $V = \mathbb{K}^2$, $f = id_V$, $P_f(t) = (t-1)^2$ c'è solo autovalore 1 con molt. 2.

Teorema spettrale (versione debole)

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$. $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simmetrica.

$\Rightarrow$ A è diagonalizzabile.

Quindi tutti gli autovalori di A sono reali e le loro molteplicità geometriche coincidono con quelle algebriche.

Esempio $A = \begin{pmatrix} 5 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ è simmetrica, quindi è diagonalizzabile per il teo spettrale

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 5-t & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -1-t \end{vmatrix} = (5-t)(-1-t) - (3\sqrt{3})^2 = t^2 - 4t - 5 - 27$$

$$= t^2 - 4t - 32$$

Le sue radici sono $\lambda_\pm = \dfrac{4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 32}}{2} = 2 \pm \sqrt{4+32} = 2 \pm 6 = \begin{cases} 8 \\ -4 \end{cases}$

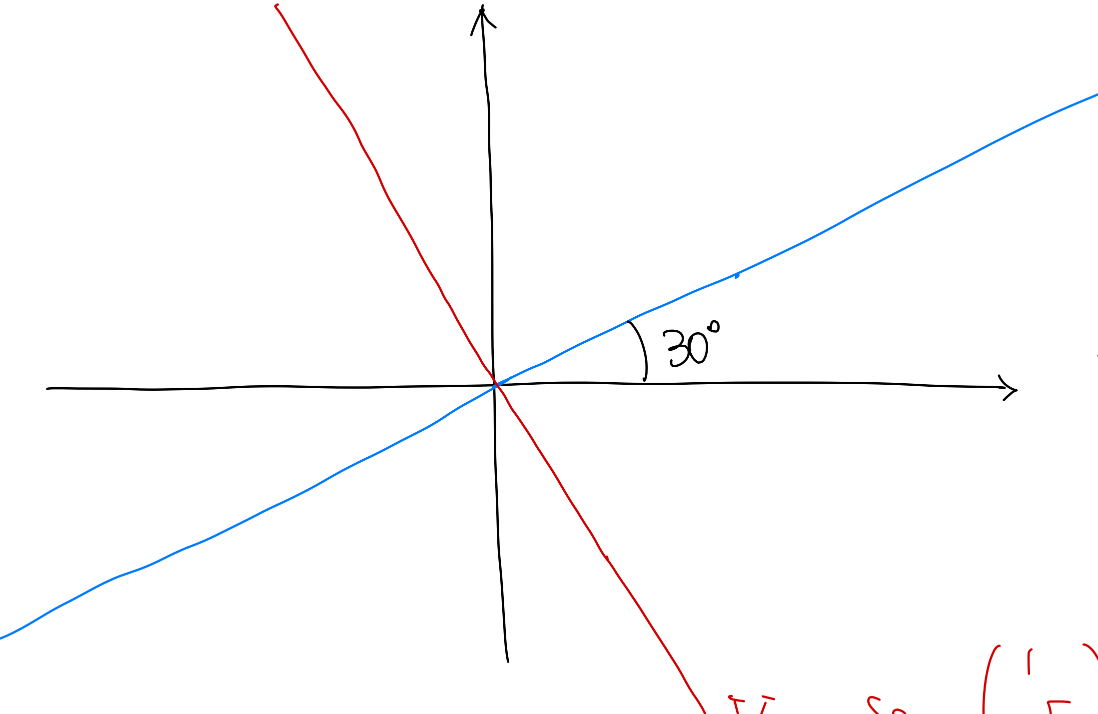
Calcolo gli autospazi:

$$V_8 = \mathrm{Ker}(A - 8I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -3 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -9 \end{pmatrix} \underset{\text{mosse di Gauss sulle righe}}{=} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} =$$

la 2° riga è $-\sqrt{3}$ volte la 1° riga

$$= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_{-4} = \mathrm{Ker}(A + 4I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 9 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} = \dots = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$



$V_8 = \text{Span}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$

<u>Nota</u> V_{-4} e V_8 sono ortogonali. Lo vedremo meglio in seguito.
Vale perché A è simmetrica.

$V_{-4} = \text{Span}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$

ai vettori di V_8 L_A li moltiplica per 8

i vettori di V_{-4} vengono moltiplicati per -4

Per definizione

$V_8 = \{0\} \cup \{$ gli autovettori di L_A con autovalore $8\}$

$= \{0\} \cup \{$ i vettori non nulli $v \in \mathbb{R}^2$ t.c. $A \cdot v = 8v\}$

$= \{0\} \cup \{$ i vettori non nulli di $\mathbb{R}^2$ che vengono moltiplicati per 8 quando ci si applica A,

cioè diventano $8v$ dopo la trasformazione indotta da A

Trucchetto: se $a, b \in \mathbb{K}$, $(a,b) \neq (0,0)$

$$\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, ax+by=0 \right\}$$

è una retta che passa per l'origine

sono entrambi rette, quindi basta per vedere che il vettore $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ soddisfa l'equazione $ax+by=0$

$$a \cdot (-b) + b \cdot a = 0$$

Def V sp. vett. sul campo $\mathbb{K}$. Una FORMA BILINEARE è una funzione $b: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ che è lineare in entrambi gli argomenti, cioè:

Prende come input una coppia di vettori (v, w), dove $v, w \in V$, e restituisce come output uno scalare $b(v, w) \in \mathbb{K}$

- linearità nel 1° argomento:

$\forall w \in V$ la funzione $\begin{array}{l} V \longrightarrow \mathbb{K} \\ v \longmapsto b(v,w) \end{array}$ è lineare, ovvero

fisso il 2° input

nota che V e $\mathbb{K}$ sono sp. vett.

$\forall v_1, v_2 \in V \quad b(v_1 + v_2, w) = b(v_1, w) + b(v_2, w)$

$\forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad b(\lambda v, w) = \lambda \cdot b(v, w)$.

- linearità nel 2° argomento:

$\forall v \in V$ la funzione $\begin{array}{l} V \longrightarrow \mathbb{K} \\ w \longmapsto b(v,w) \end{array}$ è lineare, ovvero

fisso il 1° input

$\forall w_1, w_2 \in V \quad b(v, w_1 + w_2) = b(v, w_1) + b(v, w_2)$

$\forall w \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad b(v, \lambda w) = \lambda \cdot b(v, w)$.

Def V sp. vett. su $\mathbb{K}$.

$\mathrm{Bil}(V) := \{$ forme bilineari $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}\}$

Def $b \in \mathrm{Bil}(V)$ si dice

- SIMMETRICA se $\forall v, w \in V \quad b(v,w) = b(w,v)$
- ANTISIMMETRICA se $\forall v, w \in V \quad b(v,w) = -b(w,v)$

Esempi 1) $V = \mathbb{K}^2$, $b : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ definita da

$$b\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_2 \cdot y_1$$

è una forma bilineare (esercizio per casa)

Idea: è un polinomio nelle x_1, x_2 e nelle y_1, y_2 che ha grado 1 separatamente.

2) $V = \mathbb{K}^n$, $b : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ definita da

$$b\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ si chiama PRODOTTO SCALARE STANDARD

Più compattamente posso scrivere

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \quad b(x, y) = {}^t x \cdot y = (x_1 \cdots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

sono colonne

è una riga

3) Se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ allora considero la forma bilineare $b_A : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ definita da

$$b_A(x,y) = {}^t x \cdot A \cdot y \qquad \forall x,y \in \mathbb{K}^n$$

Se $A = I_n$ è la matrice identità, allora b_A è l'esempio 2:

$$Iy = y \implies {}^t x\, I\, y = {}^t x \cdot y$$

Se $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, allora $b_A(x,y) = b_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = {}^t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$= (x_1 \ \ x_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 \ \ x_2)\begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 y_2$ è l'esempio 1.

Tutte le forme bilineari $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ sono fatte così, cioè del tipo b_A per $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

$$\mathrm{Bil}(\mathbb{K}^n) \xleftrightarrow{\text{corrisp. biunivoca}} M_{n\times n}(\mathbb{K}).$$

Voi avete visto

matrici $m \times n$ $\xleftrightarrow{\text{corrisp. biunivoca}}$ applicazioni lineari $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

Ora

matrici $n \times n$ $\xleftrightarrow{\text{un'altra corrisp. biunivoca}}$ forme bilineari $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ allora $b_A \in \mathrm{Bil}(\mathbb{K}^n)$

$$b_A(e_i, e_j) = {}^t e_i \, A \, e_j = (0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{in posizione } i}}{1},0,\dots,0) \cdot \begin{pmatrix} j\text{-esima} \\ \text{colonna} \\ \text{di } A \end{pmatrix} = a_{ij}$$

è l'elemento di posto (i,j) in A

Quindi la matrice A si trova a partire da b_A considerando il valore di b_A sulle coppie della base canonica di $\mathbb{K}^n$.

Def V sp. vett. su $\mathbb{K}$ di dimensione n, $b \in Bil(V)$

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V.

La MATRICE ASSOCIATA a b nella base $\mathcal{B}$ è

$$M_{\mathcal{B}}(b) := \begin{pmatrix} b(v_1,v_1) & b(v_1,v_2) & \dots & b(v_1,v_n) \\ b(v_2,v_1) & b(v_2,v_2) & \dots & b(v_2,v_n) \\ \vdots & & & \\ b(v_n,v_1) & b(v_n,v_2) & \dots & b(v_n,v_n) \end{pmatrix}$$

l'elemento di posto (i,j) di $M_{\mathcal{B}}(b)$ è $b(v_i, v_j)$.

Una matrice quadrata rappresenta sia una forma bilineare sia un endomorfismo. Sono cose diverse!

Se $\mathcal{B}$ è una base di V e $b \in Bil(V)$, allora $\forall v, w \in V$

$$b(v,w) = {}^t[v]_{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}(b) \cdot [w]_{\mathcal{B}} .$$

---

b è simmetrica $\iff$ $M_{\mathcal{B}}(b)$ è simmetrica

antisimmetrica antisimmetrica

Esempio $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x] = \{$ polinomi a coeff. in $\mathbb{R}$, nella variabile x, con grado $\leq 2 \}$

$b : V \times V \to \mathbb{R}$ definita da $b(f,g) = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\, dx$

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ Cos'è $M_{\mathcal{B}}(b)$?

L'el. di posto $(1,1)$ è $b(1,1) = \int_0^1 1 \cdot 1\, dx = 1$

L'el. di posto $(1,2)$ è $b(1,x) = \int_0^1 1 \cdot x\, dx = \frac{1}{2}$

L'el. di posto $(1,3)$ è $b(1,x^2) = \int_0^1 1 \cdot x^2\, dx = \frac{1}{3}$

$$M_{\mathcal{B}}(b) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

è simmetrica

b è simmetrica.

Come cambia la matrice associata a una forma bilineare quando cambio la base?

V sp. vett. su $\mathbb{K}$ di dim n, $b \in Bil(V)$

$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V $\longrightarrow$ $A = M_{\mathcal{B}}(b)$

$\mathcal{B}' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ un'altra base di V $\longrightarrow$ $A' = M_{\mathcal{B}'}(b)$

Come sono collegate A e A'?

Se $M = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id_V)$ è la matrice di cambio base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, allora $A' = {}^tM\, A\, M$.

<u>Dim</u> $\forall v, w \in V$, $[v]_{\mathcal{B}} = M \cdot [v]_{\mathcal{B}'}$ $\quad [w]_{\mathcal{B}} = M \cdot [w]_{\mathcal{B}'}$

${}^t[v]_{\mathcal{B}'} A' [w]_{\mathcal{B}'} = b(v,w) = {}^t[v]_{\mathcal{B}} A [w]_{\mathcal{B}} =$

$= {}^t(M \cdot [v]_{\mathcal{B}'}) \cdot A \cdot (M \cdot [w]_{\mathcal{B}'}) = {}^t[v]_{\mathcal{B}'} \cdot {}^tMAM \cdot [w]_{\mathcal{B}'}$

Per l'arbitrarietà di v e w concludo. $\square$

Def Due matrici quadrate $A, A' \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ si dicono CONGRUENTI se rappresentano la stessa forma bilineare rispetto a basi diverse, cioè se esiste $M \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertibile tale che $A' = {}^tM A M$.

Nota: $A' = {}^tMAM \iff A = {}^tM^{-1} A M^{-1}$

Oss A e A' sono congruenti

$\Rightarrow$ (A simmetrica $\iff$ A' simmetrica)
(A antisimmetrica $\iff$ A' antisimmetrica)

Esempio $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sono congruenti su $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sono congruenti su $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{vmatrix} = t^2 - 1 = (t+1)(t-1)$$

A ha 1 autovalore positivo e 1 negativo.