D'ora in poi

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

- consideriamo solo forme bilineari che sono simmetriche

$A := B$ $\qquad$ $B =: A$

intendo: A è definito uguale a B

Sto definendo A.

Def Sia V uno sp. vett. su $\mathbb{R}$. Un PRODOTTO SCALARE su V è una forma bilineare simmetrica $b: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ che è DEFINITA POSITIVA, ovvero tale che

$\forall v \in V$ t.c. $v \neq 0$, $\quad b(v,v) > 0$.

Oss $b(0,v) = b(v,0) = 0 \quad \forall v \in V$. In particolare $b(0,0)=0$.

I prodotti scalari li indico con $\langle \cdot , \cdot \rangle$. $\quad b(v,w) =: \langle v, w \rangle$

Esempi 1) $V = \mathbb{R}^n$. Il PRODOTTO SCALARE STANDARD è

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto {}^t x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

si indica con $\langle x, y \rangle$

È definita positiva perché: se $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, x \rangle = {}^t x \cdot x = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$$

se $x \neq 0$, x ha una componente $x_i \neq 0$ perciò $\langle x, x \rangle \geq x_i^2 > 0$.

Quando non lo specifico, su $\mathbb{R}^n$ considero sempre il prodotto scalare standard.

2) $W \leq \mathbb{R}^n$ sottosp. vett. Allora si può considerare la restrizione del prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$.

<u>Non-esempio</u> $V = \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Consideriamo la forma

bilineare $b_A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto {}^t x \cdot A \cdot y = (x_1 \ \ x_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_2 + x_2 y_1$$

È simmetrica ($A = {}^t A$), ma non è definita positiva:

$$b_A(\underbrace{e_1 - e_2}_{= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}, e_1 - e_2) = (1 \ \ -1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1 \ \ -1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 < 0$$

$$b_A(e_1, e_1) = (1 \ \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 \ \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$b_A(e_2, e_2) = 0$ $\qquad$ $b_A(e_1, e_2) = 1$

V sp. vett. su $\mathbb{R}$, $\langle \cdot , \cdot \rangle$ prodotto scalare su V.

Def La NORMA (o LUNGHEZZA) di un vettore $v \in V$ è

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Notare: $\|v\| = 0 \iff \langle v, v \rangle = 0 \overset{\langle \cdot,\cdot \rangle \text{ è definito positivo}}{\iff} v = 0.$

Teorema (Disuguaglianza triangolare) $\forall v, w \in V$ $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Def Se $P, Q \in V$, la DISTANZA tra P e Q è $\|P - Q\|$

Teorema (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)
$\forall v, w \in V$ $\quad |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ $\quad\quad \left|-\frac{1}{2}\right| \leq 1$

In particolare, se $v \neq 0$ e $w \neq 0$, allora

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|} \leq 1$$

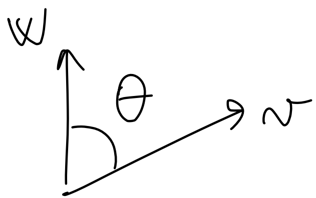
$|a| \leq 1 \iff -1 \leq a \leq 1$

$|\langle v,w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$

so che
$\|v\| > 0$
$\|w\| > 0$

$$\frac{|\langle v,w\rangle|}{\|v\| \, \|w\|} \leq 1$$

$$\| \quad \left| \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\| \, \|w\|} \right|$$



Def Se v e w sono vettori <u>non nulli</u> di V, allora l'ANGOLO fra v e w e'

$$\theta = \arccos \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\| \, \|w\|}$$

cioe' l'unico numero reale $\theta \in [0,\pi]$ tale che $\cos\theta = \dfrac{\langle v,w\rangle}{\|v\| \, \|w\|}$

$\langle x,y\rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\theta$

V sp. vett. su $\mathbb{R}$ con prodotto scalare $\langle \cdot ; \cdot \rangle$

Def Due vettori v e w di V si dicono ORTOGONALI se $\langle v, w \rangle = 0$, ovvero se

$v = 0$ o $w = 0$ o ($v \neq 0$, $w \neq 0$, e l'angolo tra v e w è $\pi/2$)

Teorema (Pitagora) Se $v, w \in V$ sono ortogonali, allora

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

Dimostratelo per esercizio!

Def Due sottosp. vett. U e W di V si dicono ORTOGONALI tra loro se

$$\forall u \in U, \ \forall w \in W, \quad \langle u, w \rangle = 0$$

Oss Se U e W sono ortogonali, allora $U \cap W = \{0\}$.

V sp. vett. su $\mathbb{R}$ con prod. scal. $\langle \cdot , \cdot \rangle$

<u>Def</u> Se $W \leq V$ è un sottosp. vett., allora l'ORTOGONALE di W è il più grande sottosp. vett. di V che è ortogonale a W, ovvero

$$W^\perp := \{ v \in V \mid \forall w \in W, \langle w, v \rangle = 0 \}$$

E' l'insieme dei vettori di V che sono ortogonali a qualsiasi vettore di W

- $W^\perp$ è un sottosp. vett. di V : esercizio per casa

Se $W = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_k)$, allora

$$W^\perp = \{ v \in V \mid \langle w_1, v \rangle = 0, \dots, \langle w_k, v \rangle = 0 \}$$

$\subseteq$) ovvio perché $w_1, \dots, w_k \in W$

$\supseteq$) Sia v nell'insieme di destra, ovvero $\langle w_i, v \rangle = 0$ per ogni i.

Voglio testare se $v \in W^\perp$, cioè se v è ortogonale a ogni vettore di W.

Sia $w \in W$ arbitrario. Allora $w = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i w_i$. Perciò

$$\langle w, v \rangle = \langle \sum_{i=1}^{k} \lambda_i w_i , v \rangle \underset{\text{bilinearità del prodotto scalare}}{=} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \langle w_i, v \rangle = 0$$

perché tutti $\langle w_i, v \rangle = 0$.

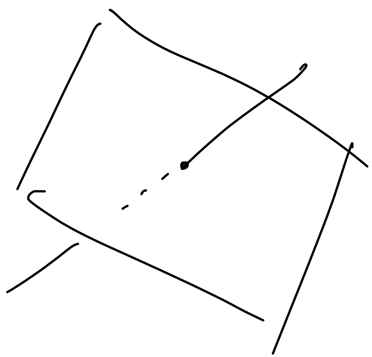
quindi $\forall w \in W$, $\langle w, v \rangle = 0$

Cioè $v \in W^\perp$ che è l'insieme a sinistra. $\square$

Teorema Sia V uno sp. vett. su $\mathbb{R}$ con prod. scalare $\langle \cdot , \cdot \rangle$.
Sia $W \leq V$ un sottosp. vett. Allora

- $V = W \oplus W^\perp$

cioè $V = W + W^\perp$, $W \cap W^\perp = \{0\}$



in particolare
$\dim V = \dim W + \dim W^\perp$

Inoltre: $(W^\perp)^\perp = W$

Come si calcola l'ortogonale?

Ortogonale a un sottosp. vett. di $\mathbb{R}^n$ (munito del prodotto scalare standard) dato in forma parametrica:

$$W = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + t_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} \;\middle|\; t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R} \right\}$$

Non ci sono ipotesi sulla lineare indip. di queste colonne

$$= \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} \right) = \operatorname{Im} A \quad \text{dove}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \in M_{n\times k}(\mathbb{R}).$$

Sia $x \in \mathbb{R}^n$ generico; allora:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in W^\perp \iff \forall j = 1, \dots, k \quad 0 = \left\langle \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i$$

impongo che x è ortogonale ai generatori di W

Abbiamo trovato delle equazioni (lineari!) per $W^\perp$:

$$W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{n1}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{1k}x_1 + \dots + a_{nk}x_n = 0 \end{matrix} \right\}$$

è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di matrice

$$^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1k} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$$

cioè $\quad W^\perp = \operatorname{Ker} {}^tA$

Ricapitolando: $\quad (\operatorname{Im} A)^\perp = \operatorname{Ker} {}^tA$

Da una descrizione parametrica di un sottosp. vett., si ottiene facilissimamente una descrizione cartesiana del suo ortogonale.

Ortogonale di un sottosp. vettoriale di $\mathbb{R}^n$ (munito del prod. scal. standard) in forma cartesiana:

se $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, allora $\operatorname{Ker} A \leq \mathbb{R}^n$

$$(\operatorname{Ker} A)^{\perp} = \operatorname{Im} {}^tA$$

Esempio $W \leq \mathbb{R}^3$ piano di equazione $x + 3y - z = 0$.

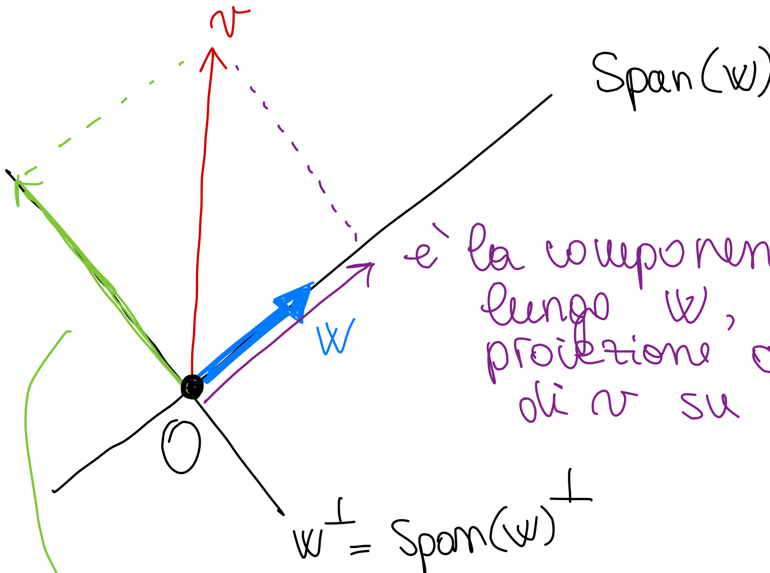
Chi è $W^{\perp}$?

$$W = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$W^{\perp} = \operatorname{Im}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} -100 \\ -300 \\ 100 \end{pmatrix}$$

V sp. vett. su $\mathbb{R}$, $\langle \cdot , \cdot \rangle$ prod. scal.

Siano v e w due vettori, $w \neq 0$



è la componente di v lungo w, detta anche proiezione ortogonale di v su Span(w) | Si indica con $\pi_w(v)$

è la componente di v perpendicolare a w | $v - \pi_w(v)$

Come si trovano queste due componenti?

Siccome $\pi_w(v) \in \mathrm{Span}(w)$, si deve avere $\pi_w(v) = \lambda w$ per un certo $\lambda \in \mathbb{R}$.

So che $\pi_w(v) = \lambda w$

Impongo che $v - \pi_w(v)$ sia ortogonale a w:

$$0 = \langle v - \pi_w(v), w \rangle = \langle v - \lambda w, w \rangle = \langle v, w \rangle - \lambda \langle w, w \rangle$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle}$$ (Ricorda $\langle w, w \rangle \neq 0$ perché $w \neq 0$)

Ricapitolando: la proiezione ortogonale di v su Span(w), ovvero la componente di v lungo w, e'

$$\pi_w(v) := \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w$$

Mentre la componente di v ortogonale a w e'

$$v - \pi_w(v) = v - \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w$$

Def V sp. vett. su $\mathbb{R}$ con prod. scal $\langle \cdot , \cdot \rangle$.

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V.

$\mathcal{B}$ si dice BASE ORTOGONALE se i suoi elementi sono a due a due ortogonali: $\forall i,j \in \{1, \dots, n\}$

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \text{se } i \neq j$$

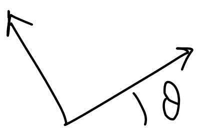
$\mathcal{B}$ si dice BASE ORTONORMALE se è una base ortogonale e i suoi elementi hanno lunghezza 1, cioè se

$$\forall i,j \in \{1, \dots, n\} \qquad \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

In fisica: base ortonormale = riferimento ortogonale di versori

Esempio La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ (rispetto al prod. scalare standard)

Esempio $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ per ogni θ



Oss Se $w_1, \dots, w_n$ è una base ortogonale, allora $\frac{w_1}{\|w_1\|}, \dots, \frac{w_n}{\|w_n\|}$ è una base ortonormale

Riscalo i vettori per farli avere lunghezza 1.

ALGORITMO DI GRAM-SCHMIDT: V sp. vett. su $\mathbb{R}$ con $\langle \cdot\, ; \cdot \rangle$.

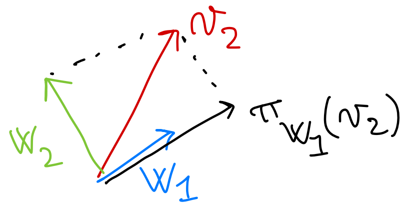
Input: $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V

Output: base ortonormale di V

Procedura: costruisco i vettori $w_1, \dots, w_n$ nel seguente modo:

$w_1 = v_1$

$w_2 = v_2 - \pi_{w_1}(v_2)$



adesso ho $\langle w_2, w_1 \rangle = 0$ (verificare per esercizio!)

$w_3 = v_3 - \pi_{w_1}(v_3) - \pi_{w_2}(v_3)$

"v_3 − le proiezioni di v_3 sui vettori che ho già costruito"

verificare per esercizio che $\langle w_3, w_1 \rangle = 0$ e $\langle w_3, w_2 \rangle = 0$

⋮ vado avanti

$w_n = v_n - \pi_{w_1}(v_n) - \pi_{w_2}(v_n) - \dots - \pi_{w_{n-1}}(v_n)$

$w_1, \dots, w_n$ sono una base ortogonale di V

$\frac{w_1}{\|w_1\|}, \dots, \frac{w_n}{\|w_n\|}$ è una base ortonormale di V

E' l'output dell'algoritmo!

<u>Esempio</u> Trovare una base ortonormale del piano di $\mathbb{R}^3$ ortogonale alla retta $r = \text{Span}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$$r^\perp = \text{Ker}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+2y+3z=0\right\}$$

Trovo una base di $r^\perp$ risolvendo il sistema lineare:

$v_1 = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$ sono una base di $r^\perp$

Applico Gram-Schmidt a v_1, v_2:

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \pi_{w_1}(v_2) = v_2 - \frac{\langle w_1, v_2\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{6}{5}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3\\-6\\5\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/5 \\ -6/5 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una base ortogonale di $r^\perp$

Li riscalo per ottenere una base ortonormale di $r^\perp$

$\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5}$ $\qquad$ $\left\| \begin{pmatrix} -3/5 \\ -6/5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{36}{25} + 1} = \frac{\sqrt{70}}{5}$

$$w_1' = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

questi formano una base ortonormale di $r^\perp$

$$w_2' = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{5}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} -3/5 \\ -6/5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{14} \implies \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ è una base ortonormale di r

Unendo le basi si ottiene che

$$\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix}-3\\-6\\5\end{pmatrix}$$

è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio per casa Ortonormalizzare la base canonica di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ $\quad 1, x, x^2$

rispetto al prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) \, dx$$

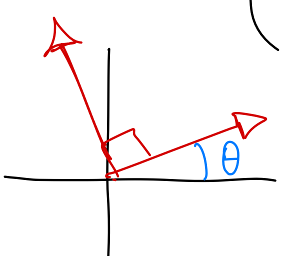
Def Una matrice $n \times n$ reale si dice ORTOGONALE se le sue colonne sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ rispetto al prodotto scalare standard.

Attenzione alla discrepanza nella terminologia!

Esempi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

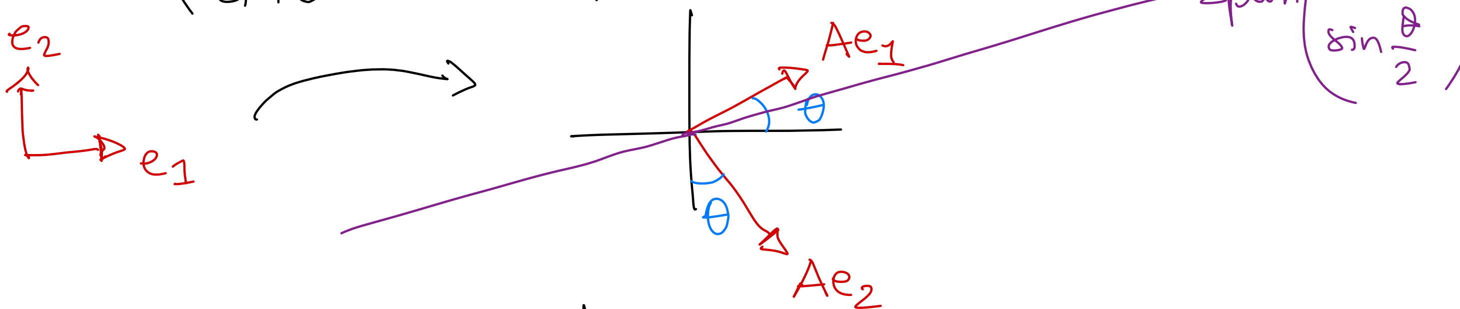
Esempio $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ è ortogonale $\forall \theta$



sono le colonne

È la matrice della rotazione di angolo θ in senso antiorario

Esempio $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ è ortogonale $\forall\theta$



Non è una rotazione!

È la composizione della riflessione ortogonale rispetto all'asse x e di una rotazione di angolo θ.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

È la riflessione ortogonale rispetto alla retta

$$\mathrm{Span}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Non-esempio

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ non è ortogonale, ma le colonne formano una base ortogonale (ma non ortonormale) di $\mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ è ortogonale! È il caso precedente con $\theta = \frac{\pi}{4}$

Teorema Sia $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1) M è ortogonale, cioè le colonne di M sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$
2) ${}^tM \cdot M = I$
3) M è invertibile e $M^{-1} = {}^tM$
4) $M \cdot {}^tM = I$
5) ${}^tM$ è ortogonale, cioè le righe di M sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

Dim $1 \Leftrightarrow 2$: siano $v_1, \dots, v_n$ le colonne di M

quindi $M = \left(v_1 \middle| \dots \middle| v_n \right)$ $\quad {}^tM = \begin{pmatrix} {}^tv_1 \\ \hline \vdots \\ \hline {}^tv_n \end{pmatrix}$

$$ {}^tM \cdot M = \begin{pmatrix} {}^tv_1 \\ \hline \vdots \\ \hline {}^tv_n \end{pmatrix} \cdot \left(v_1 \middle| \cdots \middle| v_n \right) = \begin{pmatrix} {}^tv_1 \cdot v_1 & {}^tv_1 \cdot v_2 & \cdots & {}^tv_1 v_n \\ \vdots & & & \\ {}^tv_n \cdot v_1 & & \cdots & {}^tv_n \cdot v_n \end{pmatrix} $$

$$ {}^tM \cdot M = I \iff \langle v_i, v_j \rangle = {}^tv_i \cdot v_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \iff v_1, \dots, v_n \text{ sono una base ortonormale di } \mathbb{R}^n. $$

$\square$

Prop • Il prodotto di due matrici ortogonali è ortogonale

• Il det. di una matrice ortogonale è 1 o -1.

Dim Facile, per esercizio!

Oss Se M è una matrice ortogonale, allora ${}^tM = M^{-1}$ (è vantaggioso per il calcolo di M^{-1})

"Funziona bene per il cambio base sia per endomorfismi che per forme bilineari"

M ortogonale. $M = (v_1 | \dots | v_n) = M^{can}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^n})$ con $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$

endomorfismo associato ad A

forma bilineare associata ad A

$A = M_{can}(L_A) = M_{can}(b_A)$

$M_{\mathcal{B}}(L_A) = M^{\mathcal{B}}_{can}(id) \cdot M^{can}_{can}(L_A) \cdot M^{can}_{\mathcal{B}}(id) = M^{-1} A M$

sono uguali perché M è ortogonale

$M_{\mathcal{B}}(b_A) = {}^tM^{can}_{\mathcal{B}}(id) \cdot M_{can}(b_A) \cdot M^{can}_{\mathcal{B}}(id) = {}^tM A M$