Visto ieri: se $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ è ortogonale (cioè ${}^tM \cdot M = I$, ${}^tM = M^{-1}$, le righe/colonne di M sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$), allora

$${}^tMAM = M^{-1}AM \quad \text{rappresenta}$$

- sia l'endomorfismo $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$

- sia la forma bilineare $b_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto {}^tx A y$

rispetto alla base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ costituita dalle colonne di M, infatti $M = M^{can}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^n})$

Teorema spettrale $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica.
Allora esiste $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ortogonale tale che
$^tMAM = M^{-1}AM$ è diagonale

Corollario $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica. Allora esiste $\mathcal{B}$ base di $\mathbb{R}^n$ tale che

- $\mathcal{B}$ è una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard
- $\mathcal{B}$ è costituita di autovettori di $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, cioe' $M_{\mathcal{B}}(L_A)$ è diagonale. In particolare L_A è diagonalizzabile
- la matrice $M_{\mathcal{B}}(b_A)$ che rappresenta la forma bil. b_A è diagonale

Dim Corollario Basta scegliere come $\mathcal{B}$ le colonne di M date dal teorema spettrale. $\square$

Prop $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica $\Longrightarrow$ gli autospazi di A sono a due a due ortogonali. Cioè: se λ e μ sono autovalori distinti di A, allora V_λ e V_μ sono ortogonali.

Dim Siano $x \in V_\lambda$, $y \in V_\mu$. Devo dimostrare che x e y sono ortogonali, cioè $0 = \langle x, y\rangle = {}^t x \cdot y$.

So che $Ax = \lambda x$ perché x è autovettore rispetto all'autoval. λ

$Ay = \mu y$ " y " " μ

$$\lambda \cdot {}^t x \cdot y = {}^t(\lambda x) y = {}^t(Ax) y \underset{\uparrow\ {}^t(C\cdot D) = {}^tD \cdot {}^tC}{=} {}^t x\, {}^t A\, y \overset{{}^tA = A}{=} {}^t x A y = {}^t x (\mu y) = \mu\, {}^t x y$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda - \mu)}_{} \cdot \underbrace{({}^t x \cdot y)}_{} = 0$$

sono entrambi in $\mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ ${}^t x \cdot y = 0$ $\square$

$\lambda - \mu \neq 0$ perché $\lambda \neq \mu$

Oss In generale se $f \in \mathrm{End}(V)$
e λ e μ sono autovalori distinti allora

$$V_\lambda \cap V_\mu = \{0\}$$

Infatti: se $v \in V_\lambda \cap V_\mu$ e $v \neq 0$ allora

v è autovettore con autovalore λ : $f(v) = \lambda v$

v " " " μ $f(v) = \mu v$

ma allora $0 = \lambda v - \mu v = (\lambda - \mu) \cdot v \xRightarrow{v \neq 0} \lambda - \mu = 0$

che è assurdo. $\square$

Un autovettore ha un unico autovalore associato

Come si calcola M ortogonale del teorema spettrale?
Come si diagonalizza ortonormalmente una matrice simmetrica?
Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica. Calcolo $P_A(t)$ e gli autovalori

$\forall \lambda$ autovalore:
- determino una base dell'autospazio V_λ
- applico Gram-Schmidt e determino una base ortonormale di V_λ

Ora unisco queste basi: ottengo una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ che è ortonormale, perché gli autospazi sono a due a due ortogonali per la prop. precedente

Prendo $M = (v_1 | \dots | v_n)$.

Esempio (vedi lezione 20)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono 8 e -4

$V_8 = \text{Span}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$; una base ortonormale di V_8 è $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = v_1$

$V_{-4} = \text{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ " " " " V_{-4} è $\begin{pmatrix} 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = v_2$

$M = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ è ortogonale, ${}^tM = M^{-1}$

$${}^tMAM = \underbrace{M^{-1}AM}_{\text{è la matrice associata all'endomorfismo } L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ rispetto alla base } \mathcal{B} = \{v_1, v_2\}} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$Av_1 = 8v_1 \quad Av_2 = -4v_2$

A ha segnatura $(0, 1, 1)$

Io ho enunciato una forma pratica/semplificata (ma equivalente) del teorema spettrale

Nei libri trovate	Voi interpretate
V sp. vett. reale con prodotto scalare $\langle \cdot , \cdot \rangle$	$\mathbb{R}^n$ con prodotto scalare standard
$f \in End(V)$ endomorfismo autoaggiunto	$L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simmetrica

Def Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica. Definiamo

INDICE DI NULLITÀ $n_0(A) :=$ molteplicità di 0 come autovalore di A

Indifferentemente molteplicità algebrica o geometrica perché sono uguali in quanto A è diagonalizzabile per il teorema spettrale

INDICE DI POSITIVITÀ $n_+(A) :=$ numero di autovalori positivi contati con molteplicità

INDICE DI NEGATIVITÀ $n_-(A) :=$ numero di autovalori negativi contati con molteplicità

La terna $(n_0(A), n_+(A), n_-(A))$ si chiama SEGNATURA di A.

$$n_0(A) + n_+(A) + n_-(A) = n$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{\text{OSS}} \\ &n_0(A) = \dim \operatorname{Ker} A \\ &\qquad\;\; = n - \operatorname{rk} A \end{aligned}}$$

Teorema 1 Siano $A, A' \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetriche. Allora

A e A' sono congruenti su $\mathbb{R}$ cioè $\exists\, M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertibile (non necessariamente ortogonale) tale che $A' = {}^tMAM$ $\iff$ A e A' hanno la stessa segnatura

2 Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ è simmetrica, allora A è congruente alla seguente matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

dove

il numero di 0 è $n_0(A)$

il numero di 1 è $n_+(A)$

il numero di -1 è $n_-(A)$

Se A è una matrice diagonale e A' è ottenuta da A permutando gli elementi sulla diagonale

(p.es. $A = \begin{pmatrix} 5 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 5 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$)

allora A e A' sono sia simili sia congruenti:

stiamo permutando gli elementi della base

Esempio $A = \begin{pmatrix} 5 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ ha segnatura $(0,1,1)$

se $M = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ allora M è ortogonale (cioè ${}^tM = M^{-1}$)

$${}^tMAM = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

voglio farla diventare con $0, 1, -1$ usando la congruenza

$$N = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{8}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{4}} \end{pmatrix}$$

prendo la matrice diagonale che ha $\dfrac{1}{\sqrt{\text{modulo degli autovalori}}}$

$$\underbrace{{}^tN({}^tMAM)N}_{\substack{\shortparallel \\ {}^t(MN)\cdot A\cdot(MN)}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{8}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{4}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{8}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

, siccome MN è invertibile ($\det(MN) = \det(M)\cdot\det(N) \neq 0$) ho che

A è congruente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

A è sia simile sia congruente a $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

A è congruente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

A non è simile a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ perché hanno traccia / determinante / pol. caratt. / autovalori diversi.

Dim Teorema (1) $\Rightarrow$: difficile.

(1) $\Leftarrow$: segue dalla parte (2). Infatti se A e A' hanno la stessa segnatura, allora per (2) sono congruenti alla stessa matrice con $0, 1, -1$, e quindi sono congruenti. Sto usando la proprietà transitiva della congruenza.

(2): generalizziamo l'esempio. Per il teorema spettrale A è simile e congruente a

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \lambda_s & & \\ & & & & & & \mu_1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \mu_r \end{pmatrix} = {}^tMAM = M^{-1}AM$$

dove M è ortogonale

$\lambda_1, \dots, \lambda_s > 0$

$\mu_1, \dots, \mu_r < 0$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_s}} & & \\ & & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\mu_1}} & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\mu_r}} \end{pmatrix} = {}^tN$$

A è congruente a

$${}^t(MN)\,A\,(MN) = {}^tN\,({}^tMAM)\,N = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix} \quad \square$$

Prop V sp. vett. reale di dim n. $b: V \times V \to \mathbb{R}$ forma bil. simmetrica
Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ la matrice (simmetrica!) che rappresenta b rispetto a una base di V. Allora

b è definita positiva $\iff$ $n_0(A) = n_-(A) = 0$
$\forall v \in V$ con $v \neq 0$, $b(v,v) > 0$ — cioè la segnatura di A è $(0, n, 0)$

b è semidefinita positiva $\iff$ $n_-(A) = 0$
$\forall v \in V$ $b(v,v) \geq 0$

cose analoghe

definita negativa

semidefinita negativa

In molti casi per calcolare la segnatura non serve calcolare gli autovalori grazie al seguente teorema:

<u>Teorema</u> (Criterio di Sylvester o dei minori principali)

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simmetrica. Pongo

$$d_0 = 1, \quad d_i = \det\begin{pmatrix} \text{sottomatrice quadrata} \\ i \times i \text{ ottenuta da } A \\ \text{prendendo le prime } i \\ \text{righe e le prime } i \text{ colonne} \end{pmatrix} \text{ per ogni } i = 1, \dots, n$$

Supponiamo $d_1, \dots, d_n$ siano $\neq 0$. [Senza quest'ipotesi non si può applicare il teorema]

Allora:

- $n_0(A) = 0 \Leftarrow$ 0 non è autovalore di A $\Leftarrow$ A è invertibile $\Leftarrow d_n = \det(A) \neq 0$
- $n_+(A) =$ numero delle permanenze di segno in $(d_0, d_1, \dots, d_n)$ cioè quante volte il segno rimane lo stesso andando da sx a dx in $(d_0, d_1, \dots, d_n)$
- $n_-(A) =$ numero di cambiamenti di segno in $(d_0, d_1, \dots, d_n)$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$d_0 = 1$

cambiamento di segno

$d_1 = -1$

permanenza di segno

$d_2 = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = -5$

permanenza di segno

$d_3 = \det(A) = -10$

2 permanenze

1 cambio

$$(n_0, n_+, n_-) = (0, 2, 1)$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

non possiamo applicare il criterio perché $d_1 = 0$

$$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = t^2 - 1 = (t+1)(t-1)$$

gli autovalori sono 1 e -1

la segnatura è $(0,1,1)$.

<u>Esercizio per casa</u> Quali delle seguenti matrici sono simili o congruenti tra loro?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ha solo l'autovalore 1 con molt. algebrica 2

La molt. geom. è anch'essa 2: si vede in due modi

- la matrice è diagonale, quindi diagonalizzabile quindi $m_{geo} = m_{alg}$
- L'autospazio $V_1 = \operatorname{Ker}(A - I) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^2$ ha dimensione 2

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ha autovalore 2 con molt (alg ~~e~~ geo) 2

Due matrici simili hanno gli stessi autovalori

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ non sono simili

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sono congruenti perché hanno la stessa segnatura $(0,2,0)$, più esplicitamente

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{{}^tM} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{M} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A'}$$

Se $A' = M^{-1}AM$ e $A'' = N^{-1}A'N$ dove M, N invertibili

allora $A'' = N^{-1}(M^{-1}AM)N = (MN)^{-1}A(MN)$

A simile a A' e A' simile a $A'' \Longrightarrow A$ simile a A''

se A e A' sono congruenti o simili allora hanno lo stesso rango.

Def Un'ISOMETRIA di $\mathbb{R}^n$ è un'affinità

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x \longmapsto Ax + b$$

dove la parte lineare A è una matrice ortogonale.

Esempi
- rotazioni rispetto $\begin{cases} \text{a punti in } \mathbb{R}^2 \\ \text{a rette in } \mathbb{R}^3 \end{cases}$
- riflessioni ortogonali
- se $A = I$ è la traslazione
- se $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ tutte le lunghezze sono raddoppiate, non è un'isometria.

ISOMETRIA =: TRASFORMAZIONE RIGIDA

Le isometrie preservano le distanze e le lunghezze.

Esercizio Scrivere nella forma $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+b$ la rotazione di angolo α rispetto a una retta affine r di $\mathbb{R}^3$.

- Suppongo r sia l'asse x:

$r = \text{Span}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

L'origine va nell'origine, quindi $b=0$.

Per scrivere A dovete capire dove vanno i vettori della base canonica:

$e_1 \longmapsto e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ perché sto su r e lì non faccio nulla

$e_2 \longmapsto \begin{pmatrix}0\\\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}$

$e_3 \longmapsto \begin{pmatrix}0\\-\sin\alpha\\\cos\alpha\end{pmatrix}$

quindi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- suppongo r sia una retta passante per l'origine

p.es. $r = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

scelgo base ortonormale di r: $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

calcolo il piano ortogonale a r

$$r^\perp = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, x+z=0 \right\} = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Fortuna! sono già ortogonali tra loro. Altrimenti avrei dovuto applicare Gram-Schmidt.

Una base ortonormale di $r^\perp$: $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{v_1}_{\text{base di } r}$ $\quad \underbrace{v_2 \quad v_3}_{\text{base di } r^\perp}$

base ortonormale di $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$

Cerco $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineare tale che

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Se $M = (v_1 | v_2 | v_3) = M^{can}_{\mathcal{B}}(id)$ (è ortogonale!)

e allora

$$A = M^{can}_{can}(f) = M^{can}_{\mathcal{B}}(id) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot M^{\mathcal{B}}_{can}(id)$$

$$= M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot {}^tM$$

- r affine non passa per l'origine

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} -2+t \\ 3 \\ t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

A è già stata calcolata.
Calcolare b.

Rifaccio l'ultimo esercizio con più calma e qualche disegno.

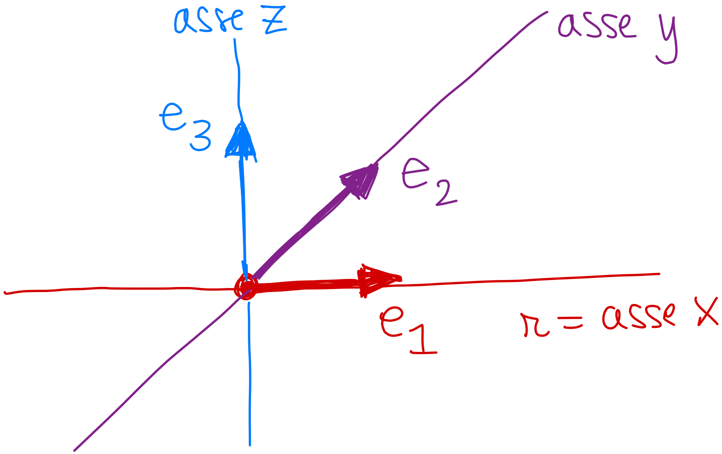
<u>Esercizio</u> Scrivere nella forma $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + b$, con $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathbb{R}^3$, l'isometria $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ data dalla rotazione di un generico angolo α rispetto a una retta r di $\mathbb{R}^3$

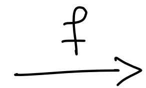
• 1° caso: suppongo che r sia l'asse x

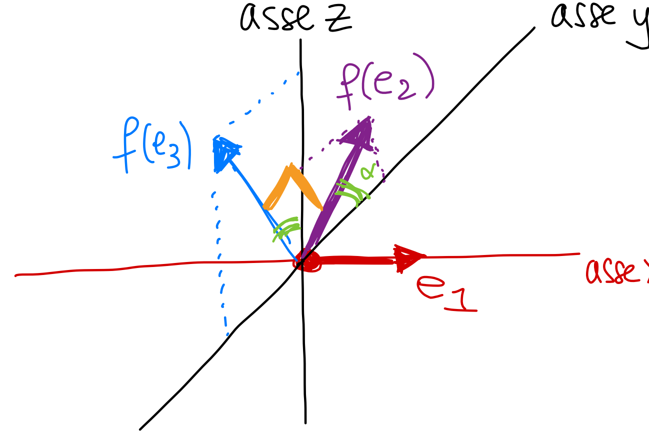
Allora si ha $r = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

E' evidente che l'origine non viene mossa, cioè $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b$. Quindi f è lineare

Ora cerco di capire dove vengono mandati i vettori della base canonica. Faccio un disegno:







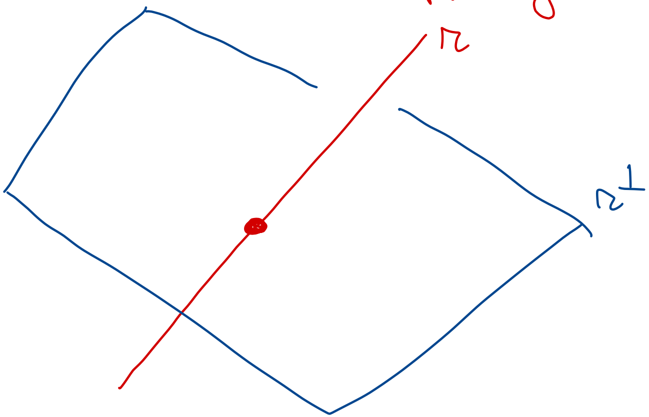
I vettori di r, cioè l'asse x, rimangono invariati; perciò $f(e_1) = e_1$.
I vettori di $r^\perp$, cioè il piano yz (ovvero il piano di equazione $x=0$) rimangono in questo piano, perciò la loro prima coordinata è 0.

Si vede che $f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ e $f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$

Quindi la matrice A è la matrice associata ad f nella base canonica. Ovvero A è la matrice che ha per colonne $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$. Si ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

• 2° caso: suppongo che r sia una retta passante per l'origine



Consideriamo $r^\perp$: è il piano ortogonale a r.
(r e $r^\perp$ passano per l'origine e quindi sono sottosp. vettoriali)
Siccome i punti di r sono fissati da f e l'origine è un un punto di r, l'origine è fissata da f, perciò $b=0$ e quindi f è lineare. Devo determinare la matrice $A = M^{can}_{can}(f)$.
Lo faccio in maniera "indiretta". Trovo una base "comoda" $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che capisco cosa fa la trasformazione f. In altre parole voglio trovare una base $\mathcal{B}$ rispetto alla quale è molto semplice scrivere la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ che rappresenta f.

Una tale base $\mathcal{B}$ ci viene "offerta" dalla geometria di f.

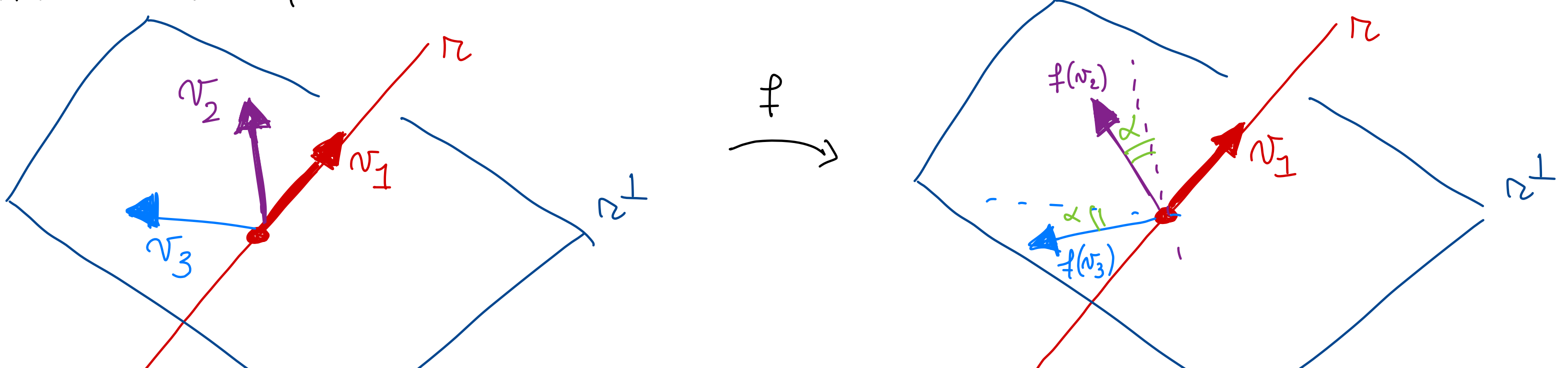
Infatti: tutti vettori della retta r vengono lasciati invariati, cioè $\forall v \in r \ \ f(v) = v$.

Mentre i vettori del piano $r^\perp$ rimangono in $r^\perp$, ma vengono ruotati di angolo α.

Supponiamo quindi di avere:

- v_1 base ortonormale di r
- v_2, v_3 base ortonormale di $r^\perp$

Allora $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$

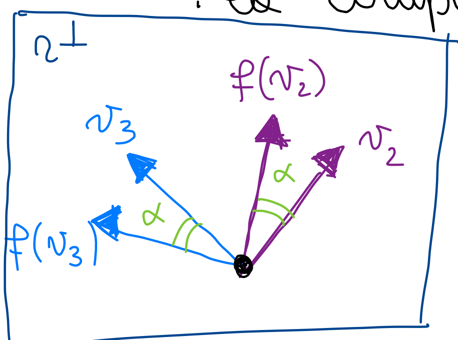


La trasformazione f lascia i vettori di r invariati, perciò $f(v_1) = v_1$. Quindi il vettore delle coordinate di questo vettore rispetto alla base $\mathcal{B}$ è $[f(v_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ora voglio capire cosa sono $f(v_2)$ e $f(v_3)$.

La trasformazione f ruota i vettori del piano $r^\perp$ lasciandoli sempre nel piano $r^\perp$.

In particolare $f(v_2)$, che è il ruotato di v_2 di angolo α, avrà
- la componente lungo v_2 lunga $\cos\alpha$
- la componente lungo v_3 lunga $\sin\alpha$



In altre parole $f(v_2) = \cos\alpha \cdot v_2 + \sin\alpha \cdot v_3$

In modo analogo $f(v_3) = -\sin\alpha \cdot v_3 + \cos\alpha \cdot v_3$

Questo si vede anche dal disegno qui a sx che raffigura cosa succede nel piano $r^\perp$.

Ricapitolando: $f(v_1) = v_1 \Longrightarrow [f(v_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(v_2) = \cos\alpha \cdot v_2 + \sin\alpha \cdot v_3 \Longrightarrow [f(v_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$

$f(v_3) = -\sin\alpha \cdot v_2 + \cos\alpha \, v_3 \Longrightarrow [f(v_3)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$

Quindi la matrice che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B}$ ha per colonne i vettori $[f(v_1)]_{\mathcal{B}}$, $[f(v_2)]_{\mathcal{B}}$, $[f(v_3)]_{\mathcal{B}}$, cioè è

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Questa è la matrice considerata nel caso 1° e ciò non deve sorprendere! Ma noi vogliamo $A = M_{can}^{can}(f)$. La determino facendo un cambio di base!

Sia M la matrice che ha per colonne gli elementi della base $\mathcal{B}$, ovvero $M = (v_1 \mid v_2 \mid v_3)$.

Vale: $M = M^{can}_{\mathcal{B}}(id)$ è la matrice di cambio-base da $\mathcal{B}$ a can.

Siccome $\mathcal{B}$ è una base ortonormale, si ha che M è una matrice ortogonale, quindi ${}^tM = M^{-1}$.

Inoltre ${}^tM = M^{-1} = \left(M^{can}_{\mathcal{B}}(id)\right)^{-1} = M^{\mathcal{B}}_{can}(id)$ è la matrice di cambio base da can a $\mathcal{B}$.

Come confronto $A = M^{can}_{can}(f)$ e $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$?

Considero il diagramma seguente:

$$\begin{tikzcd}
\overset{can}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "id"] \arrow[rrr, bend right, "f"'] & \overset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "f"] & \overset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "id"] & \overset{can}{\mathbb{R}^3}
\end{tikzcd}$$

$$A = M^{can}_{can}(f) = M^{can}_{\mathcal{B}}(id)\, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)\, M^{\mathcal{B}}_{can}(id) = M \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot {}^tM =$$

$$= \left(v_1 \,\middle|\, v_2 \,\middle|\, v_3\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^tv_1 \\ \hline {}^tv_2 \\ \hline {}^tv_3 \end{pmatrix}$$

questa è la matrice voluta!

Facciamo un esempio numerico:

supponiamo $r = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

Allora $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ forma una base di r, ma non è una base ortonormale perché questo vettore ha lunghezza $\sqrt{2}$. Allora lo devo moltiplicare per $\frac{1}{\sqrt{2}}$ per ottenere un vettore unitario:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$ Questa è una base ortonormale di r.

Ora voglio determinare una base ortonormale v_2, v_3 del piano $r^\perp$.

Da $r = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ segue che

$$r^\perp = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+z=0 \right\}$$

Si vede facilmente che una base di $r^\perp$ è $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ora devo applicare l'algoritmo di Gram-Schmidt a questa base per determinare una base ortonormale di $r^\perp$. In realtà in questo caso la situazione è più semplice perché questi due vettori sono ortogonali (infatti $\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = 0$) e quindi per ottenere una base ortonormale di $r^\perp$ basta riscalare questi due vettori per renderli unitari:

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \quad e \quad v_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

quindi $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^3$

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = (v_1 | v_2 | v_3) = M^{can}_{\mathcal{B}}(id)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 3° caso: r arbitraria, cioè non necessariamente passante per l'origine

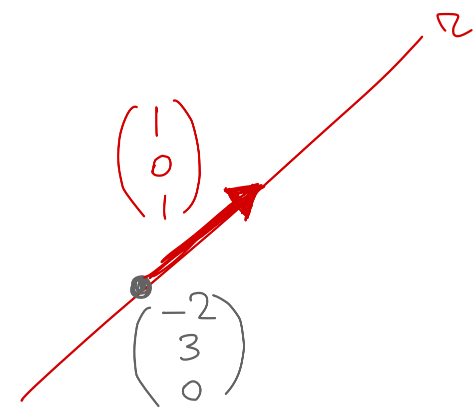
L'idea, come sempre in geometria affine, è di trovare un punto, traslare per portarlo nell'origine; fare lo studio della parte lineare e poi ritraslare di nuovo.

Facciamo l'esempio:

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} -2+t \\ 3 \\ t \end{pmatrix} \middle| \ t \in \mathbb{R} \right\}$$ è una retta data in forma parametrica

Posso scrivere

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \ t \in \mathbb{R} \right\}$$



La giacitura di r è

$\mathrm{giac}(r) = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ è la retta considerata nel 2° caso.

Perciò la parte lineare A dell'isometria f è la matrice che ho determinato nel 2° caso.

Per uno specifico α, si può determinare A esplicitamente.

Resta da determinare b: questo lo si fa imponendo che f lasci fisso un punto (qualsiasi!) di r, per esempio $\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$. Quindi

$$\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} + b \implies b = \begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} - A\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$$

<u>Osservazione</u> In realtà c'è un'ambiguità in quello che abbiamo fatto:

in quale verso stiamo ruotando? Orario o antiorario? (Ma in $\mathbb{R}^3$ <u>non</u> si può parlare di verso orario/antiorario)

Infatti se α non è un multiplo di $180°$ ci sono due rotazioni di angolo α rispetto a una retta fissata.

Quest'ambiguità diventa lampante in quello che abbiamo fatto nel seguente modo: cosa succede se avessi scelto la base v_1, v_3, v_2? (Ho scambiato v_2 e v_3)

La scelta di una delle due rotazioni è determinata dalla scelta di un'ORIENTAZIONE (regola della mano destra in fisica), ma non ci addentriamo in questa questione.

Esercizio per casa Consideriamo la retta

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 2+t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix} \middle| \ t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{in } \mathbb{R}^3.$$

Scrivere esplicitamente le due rotazioni di 90° intorno ad r e la rotazione di 180° intorno ad r.

Esercizio per casa Scrivere esplicitamente la rotazione di 30° intorno al punto $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$

Esercizio per casa Scrivere esplicitamente la riflessione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ rispetto al piano π di equazione $y+z=2$.

Esercizio per casa Le seguenti affermazioni sono vere o false?

1) se due matrici quadrate $n \times n$ hanno lo stesso polinomio caratteristico, allora sono simili.

2) ogni matrice quadrata è simile a una matrice diagonale

3) ogni matrice quadrata è congruente a una matrice diagonale

4) se A è una matrice invertibile, allora 0 non è un autovalore di A.

5) se A è una matrice $n \times n$ con autovalore 1 di molteplicità geometrica n, allora A è la matrice identità.
(Potete assumere $n=2$)