Teorema $\mathbb{K}$ campo, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 1$. Allora:

- $rk(A) \geq r \iff \exists B$ sottomatrice $r\times r$ di A tale che $\det(B) \neq 0$

- $rk(A) \leq r \iff$ tutte le sottomatrici $(r+1)\times(r+1)$ di A hanno det uguale a zero
  (Vale anche, per gli sviluppi di Laplace, che $\forall s > r$ tutte le sottomatrici $s \times s$ di A hanno det uguale a zero)

- Criterio degli orlati:

  $rk(A) = r \iff \exists B$ sottomatrice $r\times r$ di A tale che:
  - $\det(B) \neq 0$
  - tutte le sottomatrici $(r+1)\times(r+1)$ di A ottenute orlando B (cioè aggiungendo una riga e una colonna a B) hanno det uguale a zero.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}} & 0 & \boxed{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}} & -1 \\ & 0 & & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

considero la sottomatrice 2×2 ottenuta prendendo le righe 1,2 e le colonne 1,3

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2-1 = 1 \neq 0$$

Quali sono gli orlati di questa sottomatrice?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det = 0$ $\qquad$ $\det = 0$

Per il criterio degli orlati $rk(A) = 2$.

Un'altra possibile scelta sarebbe potuta essere

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Def Una QUADRICA è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ definito da un'equazione polinomiale di grado 2:

$$\left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; F(x_1, \dots, x_n) = 0 \right\}$$

dove F è un polinomio di grado 2 in $x_1, \dots, x_n$

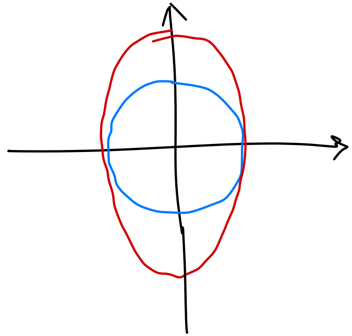
Se $n=2$ le quadriche di $\mathbb{R}^2$ vengono dette coniche

Esempi

$x^2+y^2-1=0$

$x^2+\frac{y^2}{4}-1=0$

ellissi

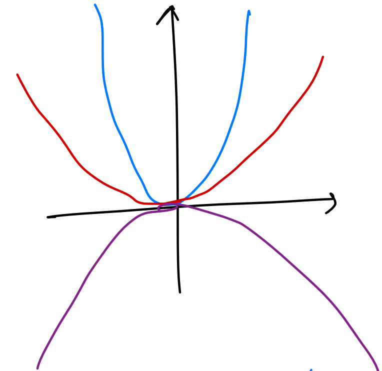


$y-3x^2=0$

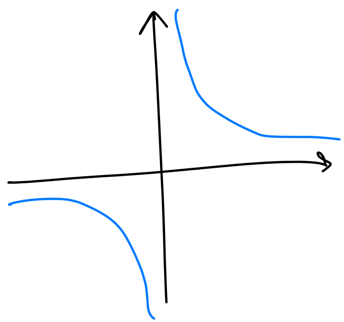
$y-x^2=0$

$y+x^2=0$

parabole

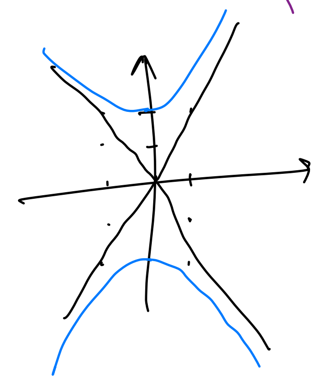


$xy-1=0$



$x^2-\frac{y^2}{4}-1=0$

iperbole



$x^2+10xy+3y^2-6x+4y-7=0$ cos'è?

<u>Nota</u> se $F(x_1, \dots, x_n)$ definisce una quadrica, allora anche $\lambda \cdot F$ definisce la stessa quadrica $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$

Quindi: una quadrica "è" un polinomio di grado 2 a meno di una costante moltiplicativa

Esempio $F(x,y) = \underbrace{x^2 + 10xy + 3y^2}_{\text{parte quadratica}} \underbrace{- 6x + 4y}_{\text{parte lineare}} \underbrace{- 7}_{\text{termine noto}}$

La matrice incompleta associata a F è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

è il coeff. di x^2

è simmetrica

è il coeff. di y^2

è la metà del coefficiente di xy

$$b = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

è la metà del coeff. di x

è la metà del coeff. di y

$c = -7$ è il termine noto.

La matrice completa associata a F è

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline {}^t b & c \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & -3 \\ 5 & 3 & 2 \\ \hline -3 & 2 & -7 \end{array}\right)$$

$$(x \quad y)\cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \quad y)\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \quad y)\begin{pmatrix} x+5y \\ 5x+3y \end{pmatrix} = x^2+5xy+5xy+$$

$$+3y^2 = x^2+10xy+3y^2$$ è la parte quadratica di F

$$(x \quad y \quad 1)\cdot \tilde{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (x \quad y \quad 1)\cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 5 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (x \quad y \quad 1)\begin{pmatrix} x+5y-3 \\ 5x+3y+2 \\ -3x+2y-7 \end{pmatrix} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per esercizio}}}{\dots} = F(x,y)$$ è tutto il polinomio!

Matrici associate a una quadrica:

$$F(x_1,\dots,x_n) = \underbrace{\sum_{1\le i<j\le n} \alpha_{ij}\, x_i x_j}_{\text{parte quadratica}} + \underbrace{(\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n)}_{\text{parte lineare}} + \underbrace{c}_{\text{termine noto}}$$

La matrice incompleta è $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$:
- sulla diagonale al posto (i,i) ci metto il coefficiente di x_i^2
- fuori dalla diagonale al posto (i,j), con $i\neq j$, ci metto la metà del coefficiente di $x_i x_j$

Proprietà:
- A è simmetrica
- se $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ allora ${}^t x A x$ è la parte quadratica di F

se la parte lineare di F è $\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n$, considero il vettore

$$b = \begin{pmatrix} \beta_1/2 \\ \vdots \\ \beta_n/2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

La matrice completa associata a F è:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline {}^t b & c \end{array}\right) \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{R})$$

Nel libro di Franco Viola questa matrice è denotata con M

- $\tilde{A}$ è simmetrica

Prop Se $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ allora ${}^t\tilde{x} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{x}$ è il polinomio F.

Dim $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad \tilde{x} = \left(\begin{array}{c} x \\ \hline 1 \end{array}\right)$ $\quad {}^t\tilde{x} = ({}^t x \mid 1)$

la parte lineare di F è $2\,{}^t b \cdot x = {}^t b \cdot x + {}^t x \cdot b$

perché ${}^t b \cdot x = {}^t({}^t b \cdot x) = {}^t x \cdot b$

${}^t b \cdot x$ è un numero reale

la parte quadratica di F è ${}^t x A x$

$${}^t\tilde{x} \cdot \tilde{A} \cdot \tilde{x} = ({}^t x \mid 1) \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline {}^t b & c \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x \\ \hline 1 \end{array}\right) = ({}^t x \mid 1) \cdot \left(\begin{array}{c} Ax + b \\ \hline {}^t b \cdot x + c \end{array}\right) =$$

$$= {}^t x (Ax + b) + {}^t b x + c$$

$$= \underbrace{{}^t x A x}_{\text{parte quadratica}} + \underbrace{{}^t x b + {}^t b x}_{\text{parte lineare}} + c = F. \qquad \square$$

<u>Def</u> Una quadrica

- è NON-DEGENERE se $\det(\tilde{A}) \neq 0$
  DEGENERE se $\det(\tilde{A}) = 0$

- HA CENTRO se $\det(A) \neq 0$.

Come cambiano le equazioni di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ (p.es. un iperpiano o una quadrica) dopo una trasformazione geometrica?

Supponiamo di avere $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione (p.es. un polinomio) e di avere una trasformazione bigettiva $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (p.es. un'affinità).

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ definito dall'annullarsi di F:

$S = \{ P \in \mathbb{R}^n \mid F(P) = 0 \}$, cioè $F = 0$ è un'equazione di S

(p.es. se F è un pol. di grado 1 allora S è un iperpiano affine
F . . . . . . 2 . . . S . . . quadrica)

Consideriamo $f(S)$: è l'insieme dei punti ottenuti applicando la trasformazione f ai punti di S

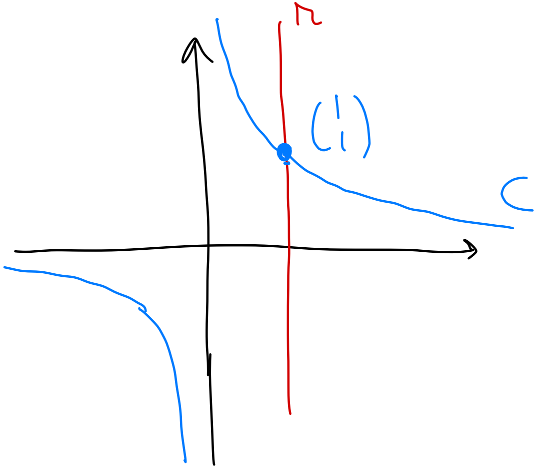
$f(S) = \{ f(P) \mid P \in S \}$

Qual è un'equazione di $f(S)$?

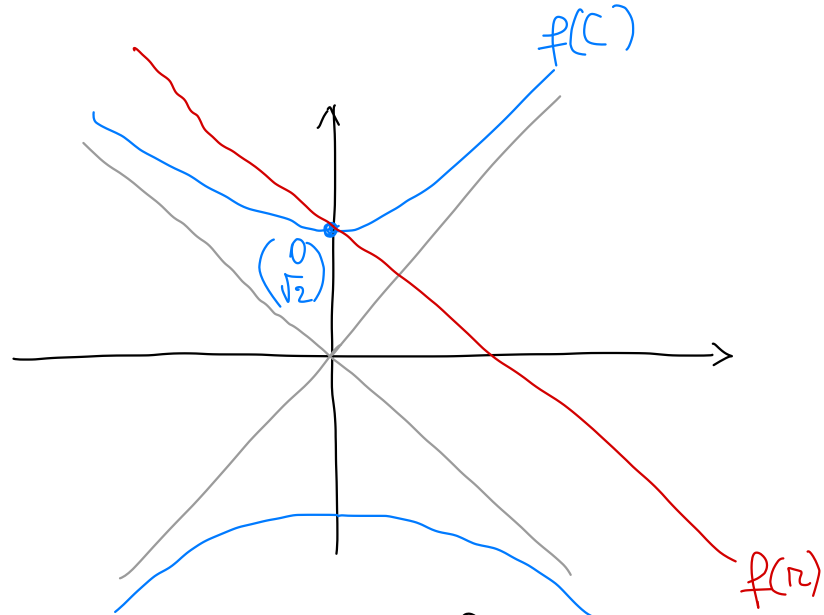
Esempio $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rotazione di $45°$ intorno all'origine in senso antiorario

$r = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x - 1 = 0 \right\}$

$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy - 1 = 0 \right\}$



$\xrightarrow{f}$



Quali sono le equazioni di $f(C)$ e di $f(r)$?

Tornando alla trattazione generale: voglio un'equazione di $f(S)$.
Sia Q un arbitrario punto di $\mathbb{R}^n$. Allora:

$$Q \in f(S) \iff \exists P \in S \text{ t.c. } Q = f(P) \iff f^{-1}(Q) \in S$$

se Q è il trasformato secondo f di un punto di S

siccome f è bigettiva, P deve essere $f^{-1}(Q)$ dove f^{-1} è la trasformazione inversa di f

uso che $F=0$ è l'eq. di S

$$\iff F(f^{-1}(Q))=0$$

Quindi

$$f(S) = \{Q \in \mathbb{R}^n \mid F(f^{-1}(Q))=0\}$$
$$= \{P \in \mathbb{R}^n \mid F(f^{-1}(P))=0\}$$

quindi $F \circ f^{-1} = 0$ è un'equazione di $f(S)$.

Morale: l'equazione di $f(S)$ è ottenuta prendendo l'equazione di S e mettendoci dentro l'inversa della trasformazione f.

Torniamo all'esempio

f rotazione di $45°$ è l'appl. lineare ass. a $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

f^{-1} è l'appl. lineare ass. a $M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$$f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{pmatrix}$$

se r è definita da $F(x,y) = x-1$, $f(r)$ è definita da

$F\left(f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - 1 = 0$, cioè $x+y=\sqrt{2}$

se C è definita da $F(x,y) = xy-1$, allora $f(C)$ è definita

da $F\left(f^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right) - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 1 = 0$

$$-x^2 + y^2 - 2 = 0.$$

Questo procedimento vi serve per determinare l'equazione di una quadrica ottenuta dopo una trasformazione affine da una quadrica di cui sapevate l'equazione.

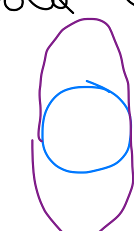
Due quadriche di $\mathbb{R}^n$ si dicono

- AFFINEMENTE EQUIVALENTI se esiste un'affinità che trasforma la prima nella seconda
- METRICAMENTE EQUIVALENTI se esiste un'isometria ...

<u>Esempio</u>

- una parabola e un'ellisse non sono aff. equiv
- $x^2+y^2-1=0$

  $x^2+\frac{y^2}{4}-1=0$



sono aff. equiv $\begin{pmatrix}1&0\\0&1/2\end{pmatrix}$

ma non metr. equiv.

Sia C una quadrica di equazione $F=0$ con matrici

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline {}^t b & c \end{array}\right)$$ e sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'affinità.

Allora $f(C)$ è una quadrica. Di quale equazione?

Supponiamo che l'inversa di f sia $x \longmapsto Mx+v$ con $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertibile, $v \in \mathbb{R}^n$.

L'eq. di $f(C)$ è $F(f^{-1}(x)) = F(Mx+v) = 0$. Quali sono le matrici associate a $f(C)$?

$\tilde{x}$ diventa, dopo f^{-1}, $$\left(\begin{array}{c} Mx+v \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} M & v \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ \hline 1 \end{array}\right)$$

quindi

$$F(Mx+v) = {}^t\left(\begin{array}{c} Mx+v \\ \hline 1 \end{array}\right) \cdot \tilde{A} \cdot \left(\begin{array}{c} Mx+v \\ \hline 1 \end{array}\right) =$$

$$= {}^t\left(\left(\begin{array}{c|c} M & v \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x \\ \hline 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \tilde{A} \cdot \left(\begin{array}{c|c} M & v \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x \\ \hline 1 \end{pmatrix}$$

$$= {}^t\begin{pmatrix} x \\ \hline 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{{}^t\left(\begin{array}{c|c} M & v \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \tilde{A} \cdot \left(\begin{array}{c|c} M & v \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \hline 1 \end{pmatrix}$$

questa è la nuova matrice completa, ed è congruente a $\tilde{A}$

Cos'è successo alla matrice incompleta?

$${}^t\left(\begin{array}{c|c} M & v \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline {}^tb & c \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} M & v \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} {}^tMAM & \cdots \\ \hline \cdots & \cdots \end{array}\right)$$

La nuova matrice incompleta è ${}^tMAM$, ed è congruente ad A.

Si potrebbe pensare che le segnature di A e di $\tilde{A}$ non cambiano dopo trasformazioni affini.
C'è un piccolo problema: l'equazione di una quadrica è ben definita solo a meno di una costante moltiplicativa

$$x^2+y^2-1 \qquad\qquad\qquad -5x^2-5y^2+5$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \qquad\qquad\qquad \left(\begin{array}{cc|c} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

segnatura di A : $(0,2,0)$ — segnatura di A : $(0,0,2)$
" " $\tilde{A}$: $(0,2,1)$ — " " $\tilde{A}$: $(0,1,2)$

- n_0 non cambia
- $\left.\begin{array}{l} n_+ \text{ è diventato } n_- \\ n_- \text{ " " } n_+ \end{array}\right\}$ perché è moltiplicato per un numero <0

<u>Morale</u> $\underset{rk}{n_0}$ non cambia, $|n_+ - n_-|$ non cambia

Se C è una quadrica di $\mathbb{R}^n$ con matrici associate A e $\tilde{A}$, allora i numeri

$n_0(A)$, $|n_+(A) - n_-(A)|$, $rk(A)$

$n_0(\tilde{A})$, $|n_+(\tilde{A}) - n_-(\tilde{A})|$, $rk(\tilde{A})$

non cambiano se C è rimpiazzata da una quadrica affinemente equivalente a lei.

Inoltre:

i) se n è pari, allora anche il segno di $\det(A)$ non cambia

ii) se n è dispari, " " " segno di $\det(\tilde{A})$ " " "

<u>Dim</u> i) se F diventa λF con $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$

A " " λA

quindi $\det(A)$ diventa $\det(\lambda A) = \underbrace{\lambda^n}_{\text{è positivo perché } n \text{ è pari}} \cdot \det(A)$

$\Rightarrow$ $\det(\lambda A)$ ha lo stesso segno di $\det(A)$.

Dopo una trasformazione affine: A diventa ${}^tMAM$ con M invertibile,

allora $\det(A)$ diventa $\det({}^tMAM) \overset{\text{Binet}}{=} \det({}^tM)\det(A)\det(M)$

$= \det(M)\det(A)\det(M) = \underbrace{(\det(M))^2}_{\text{è positiva}} \cdot \det(A)$

$\Rightarrow$ $\det({}^tMAM)$ ha lo stesso segno di $\det(A)$. $\square$

Ogni conica di $\mathbb{R}^2$ è affinemente equivalente a una e una sola delle seguenti

	conica	equazione	$\mathrm{rk}(\tilde{A})$	$\lvert n_+(\tilde{A}) - n_-(\tilde{A}) \rvert$	$\det(A)$	$\mathrm{rk}(A)$	$\lvert n_+(A) - n_-(A) \rvert$	
	ellisse reale	$x^2 + y^2 - 1$	3	1	$+$	2	2	NON-DEGENERI
	iperbole	$x^2 - y^2 - 1$	3	1	$-$	2	0	
	parabola	$x^2 - y$	3	1	0	1	1	
$\emptyset$	ellisse immaginaria	$x^2 + y^2 + 1$	3	3	$+$	2	2	
	rette reali incidenti	$x^2 - y^2$	2	0	$-$	2	0	DEGENERI
	rette reali parallele	$x^2 - 1$	2	0	0	1	1	
punto	rette immaginarie incidenti	$x^2 + y^2$	2	2	$+$	2	2	
$\emptyset$	rette immaginarie parallele	$x^2 + 1$	2	2	0	1	1	
	retta doppia	x^2	1	1	0	1	1	

Queste 9 coniche si chiamano forme canoniche affini

Una quadrica di $\mathbb{R}^3$ è affinemente equivalente a una e una sola delle seguenti

quadrica	equazione	$\mathrm{rk}(\tilde{A})$	$\det(\tilde{A})$	$\lvert n_+(\tilde{A}) - n_-(\tilde{A})\rvert$	$\mathrm{rk}(A)$	$\lvert n_+(A) - n_-(A)\rvert$
ellissoide immaginario	$x^2 + y^2 + z^2 + 1$	4	+	4	3	3
ellissoide reale	$x^2 + y^2 + z^2 - 1$	4	−	2	3	3
iperboloide ellittico (a due falde)	$x^2 + y^2 - z^2 + 1$	4	−	2	3	1
paraboloide ellittico	$x^2 + y^2 - z$	4	−	2	2	2
iperboloide iperbolico (a una falda)	$x^2 + y^2 - z^2 - 1$	4	+	0	3	1
paraboloide iperbolico	$x^2 - y^2 - z$	4	+	0	2	0
cono immaginario	$x^2 + y^2 + z^2$	3	0	3	3	3
cilindro immaginario	$x^2 + y^2 + 1$	3	0	3	2	2
cono reale	$x^2 + y^2 - z^2$	3	0	1	3	1
cilindro ellittico	$x^2 + y^2 - 1$	3	0	1	2	2
cilindro parabolico	$x^2 - y$	3	0	1	1	1
cilindro iperbolico	$x^2 - y^2 - 1$	3	0	1	2	0
piani immaginari incidenti	$x^2 + y^2$	2	0	2	2	2
piani immaginari paralleli	$x^2 + 1$	2	0	2	1	1
piani reali incidenti	$x^2 - y^2$	2	0	0	2	0
piani reali paralleli	$x^2 - 1$	2	0	0	1	1
piano doppio	x^2	1	0	1	1	1

Esempio $x^2 + 10xy + 3y^2 - 6x + 4y - 7$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & -3 \\ 5 & 3 & 2 \\ \hline -3 & 2 & -7 \end{array}\right)$$

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 25 < 0$$

$\Rightarrow$ C è un'iperbole o una coppia di rette reali incidenti

$$\det(\tilde{A}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & -22 & 17 \\ 0 & 17 & -16 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -22 & 17 \\ 17 & -16 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow$$ C è non degenere

2° riga $\rightsquigarrow$ 2° riga $- 5 \cdot$ (1° riga)

3° riga $\rightsquigarrow$ 3° riga $+ 3 \cdot$ (1° riga)

$\Rightarrow \operatorname{rk}(\tilde{A}) = 3$

$\Rightarrow$ C è un'iperbole

Come trovo la trasformazione affine che porta C in forma canonica?

- Sbarazzarsi del termine con xy

$$x^2 + 10xy + 3y^2 - 6x + 4y - 7 = 0$$

Pensate $10xy$ come un doppio prodotto: $2 \cdot x \cdot 5y$

$$x^2 + 10xy = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5y + (5y)^2 - (5y)^2$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad = (x+5y)^2 - (5y)^2$$

$$\begin{cases} x' = x + 5y \\ y' = y \end{cases}$$

è un cambio di coordinate affine

$$x = x' - 5y'$$

$$(x')^2 - (5y')^2 + 3(y')^2 - 6(x' - 5y') + 4y' - 7 =$$
$$= (x')^2 - 22(y')^2 - 6x' + 34y' - 7$$

$$(x')^2 - 6x' - \left(22(y')^2 - 34y'\right) - 7$$

- Interpreto i termini lineari come doppi prodotti per sbarazzarmene

$$(x')^2 - 2\cdot x'\cdot 3 - \left[\left(\sqrt{22}\,y'\right)^2 - 2\cdot\sqrt{22}\,y'\cdot\frac{17}{\sqrt{22}}\right] - 7 =$$

$$= (x'-3)^2 - 9 - \left[\left(\sqrt{22}\,y' - \frac{17}{\sqrt{22}}\right)^2 - \frac{17^2}{22}\right] - 7$$

$$\begin{cases} x'' = x' - 3 \\ y'' = \sqrt{22}\,y' - \dfrac{17}{\sqrt{22}} \end{cases}$$

$$(x'')^2 - 9 - (y'')^2 + \frac{289}{22} - 7$$

$$(x'')^2 - (y'')^2 - \frac{63}{22} = 0$$

$$\left(\frac{x''}{\sqrt{\frac{63}{22}}}\right)^2 - \left(\frac{y''}{\sqrt{\frac{63}{22}}}\right)^2 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} x''' = \dfrac{x''}{\sqrt{\frac{63}{22}}} \\ y''' = \dfrac{y''}{\sqrt{\frac{63}{22}}} \end{cases}$$

ottengo $(x''')^2 - (y''')^2 - 1 = 0$

forma canonica affine

Esercizio Considerare la conica C di equazione

$$7x^2 - 6\sqrt{3}\,xy + 13y^2 - 14x + 6\sqrt{3}\,y - 9 = 0$$

1) Scrivere le matrici associate a C
2) Determinare il tipo di C
3) Determinare un'affinità che porta C nella sua forma canonica affine
4) [FACOLTATIVO] Determinare un'isometria f di $\mathbb{R}^2$ tale che $f(C)$ ha centro nell'origine e assi paralleli agli assi coordinati.

Esercizio Scegliete una conica a caso o dal libro del Prof. Franconviglia e ripetete 1), 2), 3) dell'esercizio precedente.