

Esempio di calcolo di un'inversa tramite riduzione a scalini (usando mosse di Gauss). Voglio l'inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vado a scrivere $(A | I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$

Metto a zero gli elementi sotto il pivot, usando la mossa ③:

$$2^{\circ} \text{ riga} \leadsto 2^{\circ} \text{ riga} + 1^{\circ} \text{ riga}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

La 1[°] colonna è ok perché c'è 1
e sotto tutti zero.

Quindi mi sposto a destra e in basso:

cioè considero 2[°] riga e 2[°] colonna.

Ho trovato il 2[°] pivot. Voglio mettere zero sotto di lui

$$3^{\circ} \text{ riga} \leadsto 3^{\circ} \text{ riga} + 2^{\circ} \text{ riga}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$3^{\circ} \text{ riga} \leadsto \frac{1}{3} \cdot 3^{\circ} \text{ riga}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array} \right)$$

è a scolini!

Se mi interessasse risolvere un sistema lineare avrei finito.

Orsù però vorrei continuare ad applicare mosse di Gauss affinché nella parte di sinistra ci venga I.

I pivot non li sposto né li cambio!
Portiamo dall'ultimo pivot (quello in basso a destra):
voglio mettere 0 sopra di lui.

$$2^{\circ} \text{ riga} \leadsto 2^{\circ} \text{ riga} - 2 \cdot 3^{\circ} \text{ riga}$$

$$1^{\circ} \text{ riga} \leadsto 1^{\circ} \text{ riga} - 3^{\circ} \text{ riga}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array} \right)$$

La situazione è migliorata;
nella 3° colonna.
Orsù mi sposto a sx, e
in alto

1° riga \leadsto 1° riga - 2° riga

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array} \right)$$

\rightarrow è l'inverso della matrice data.

In generale: se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ con $\det(A) \neq 0$, allora l'inversa A^{-1} può essere calcolata applicando mosse di Gauss sulle righe della matrice

$$(A \mid I) \in M_{n \times 2n}(\mathbb{K})$$

per arrivare a $(I \mid A^{-1})$

Se avete un sistema lineare quadrato con soluzione unica:

$$Ax = b \quad A \in M_{n \times n}(\mathbb{K}), \det(A) \neq 0$$

La soluzione è $x = A^{-1} \cdot b$

$$(A \mid b) \in M_{n \times (n+1)}(\mathbb{K}) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & * & \ddots & * & | & * \\ & 1 & & \ddots & & * \\ & & 0 & \ddots & * & \\ & & & 1 & * & \end{pmatrix}$$

applico
mosse di Gauss
riduzione a scala

Posso continuare ad applicare mosse di Gauss e avrò

$$\left(I \mid \underline{A^{-1}b} \right)$$

→ la soluzione

$y = f(x) = Ax + b$. Voglio trovare f^{-1}

scrivo x in funzione di y : $Ax = y - b$

moltiplico per A^{-1}

$$A^{-1}y - A^{-1}b = A^{-1}(y - b) = A^{-1}Ax = Ix = x$$

quindi $f^{-1}: y \mapsto A^{-1}y - A^{-1}b$

$$f^{-1}: \xi \mapsto A^{-1}\xi - A^{-1}b$$

~~$$\forall \xi, \quad f^{-1}(\xi) = A^{-1}\xi - A^{-1}b$$
$$\sum_{i=1}^n i^2 \qquad \sum_{j=1}^n j^2$$~~

$W = \text{Span off } \left(\underset{P_0}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{P_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{P_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right)$. Voglio eq. cartesiana di W .

$$ax + by + cz = d$$

$$ax + ay + az = ?$$

divido
per a

$$x + y + z = ?$$

per
simmetria
del problema

1° modo $P_1 - P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 - P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W \Leftrightarrow \exists t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underset{P_0}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + t_1 \underset{P_1 - P_0}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + t_2 \underset{P_2 - P_0}{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

\Leftrightarrow il sistema lin.
nelle incognite $\begin{cases} x = 1 - t_1 - t_2 \\ y = t_1 \\ z = t_2 \end{cases}$
 t_1, t_2
ha almeno una soluzione

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 1 - x \\ t_1 = y \\ t_2 = z \end{cases}$$

$$z + y = 1 - x \quad \text{e' abbastanza ovvio}$$

$$\begin{cases} t_1 = y \\ t_2 = z \\ 0 = z + y + x - 1 \end{cases}$$

$$\text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & z + y + x - 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$z + y + x - 1 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & z + y + x - 1 \end{pmatrix} = 0$$

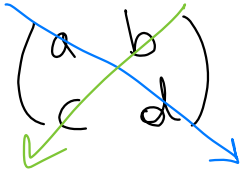
2° modo Uso la formula

$$0 = \det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x-1+z & -1 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x-1+z & -1 \\ y & 1 \end{pmatrix} = x-1+\frac{y}{z}+y = x+y+z-1$$

1° riga \rightarrow 1° riga + 3° riga
Laplace 3° colonna
✓

$\underbrace{x-1}_{P-P_0} \quad \underbrace{-1}_{P_1-P_0} \quad \underbrace{-1}_{P_2-P_0}$

Inversa delle matrici 2×2

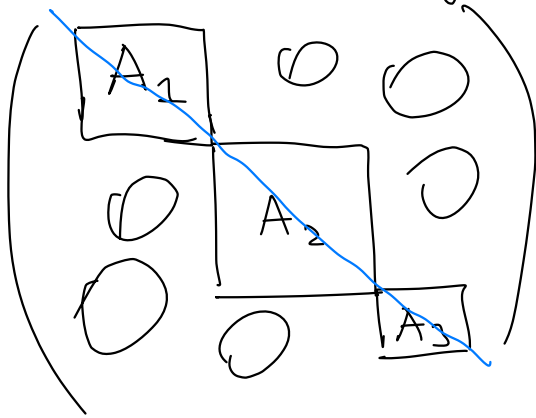
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A) = ad - bc \neq 0$$


$$\text{Cof}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot {}^t(\text{Cof}(A)) = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

gli el. sulla diag. principale si scambiano posto
gli el. sulla diag. secondaria cambiano segno

Una matrice diagonale a blocchi è



A_1, A_2, A_3 sono quadrate
e stanno sulla diagonale

p.es.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & 0 \\ 0 & \boxed{B_2} \end{pmatrix}$$

dello stesso tipo, cioè
 $\# \text{ righe } A_i = \# \text{ righe di } B_i$

I blocchi sono quadrati!

$$\det(A) = \det(A_1) \cdot \det(A_2)$$

$$\Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} \boxed{A_1 B_1} & 0 \\ 0 & \boxed{A_2 B_2} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{A_1^{-1}} & 0 \\ 0 & \boxed{A_2^{-1}} \end{pmatrix}$$