Esempio di calcolo di un'inversa tramite riduzione a scalini (usando mosse di Gauss). Voglio l'inversa di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vado a scrivere

pivot

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Metto a zero gli elementi sotto il pivot, usando la mossa 3:

2° riga $\rightsquigarrow$ 2° riga + 1° riga

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La 1° colonna è ok perché c'è 1 e sotto tutti zero.
Quindi mi sposto a destra e in basso:
cioè considero 2° riga e 2° colonna.

Ho trovato il 2° pivot. Voglio mettere zero sotto di lui

3° riga $\rightsquigarrow$ 3° riga + 2° riga

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

3° riga $\rightsquigarrow$ $\frac{1}{3} \cdot$ 3° riga

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

è a scalini!

Se mi interessa risolvere un sistema lineare avrei finito.

Ora però vorrei continuare ad applicare mosse di Gauss affinché nella parte di sinistra ci venga I.

I pivot non li sposto né li cambio!

Partiamo dall'ultimo pivot (quello in basso a destra):

voglio mettere 0 sopra di lui.

2° riga ⇝ 2° riga − 2 · 3° riga

1° riga ⇝ 1° riga − 3° riga

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

La situazione è migliorata; nella 3° colonna.

Ora mi sposto a sx, e in alto

1° riga $\rightsquigarrow$ 1° riga − 2° riga

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

→ è l'inversa della matrice data.

<u>In generale</u>: se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ con $\det(A) \neq 0$, allora l'inversa A^{-1} può essere calcolata applicando mosse di Gauss sulle righe della matrice

$$(A \mid I) \in \mathcal{M}_{n\times 2n}(\mathbb{K})$$

per arrivare a $(I \mid A^{-1})$

Se avete un sistema lineare quadrato con soluzione unica:

$Ax = b \qquad A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}),\ \det(A) \neq 0$

La soluzione è $x = A^{-1} \cdot b$

$(A \mid b) \in M_{n\times(n+1)}(\mathbb{K}) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & * & \cdots & * & * \\ & 1 & \ddots & \vdots & * \\ & 0 & \ddots & * & \vdots \\ & & & 1 & * \end{array}\right)$

applico mosse di Gauss riduzione e scala

Posso continuare ad applicare mosse di Gauss e avrò

$$\left(I \;\middle|\; \underbrace{A^{-1}b}_{\text{la soluzione}} \right)$$

$y = f(x) = Ax + b$. Voglio trovare f^{-1}

scrivo x in funzione di y : $Ax = y - b$

moltiplico per A^{-1}

$$A^{-1}y - A^{-1}b = A^{-1}(y-b) = A^{-1}Ax = Ix = x$$

quindi $f^{-1} : y \longmapsto A^{-1}y - A^{-1}b$

$$f^{-1} : \xi \longmapsto A^{-1}\xi - A^{-1}b$$

$$\forall \xi, \quad f^{-1}(\xi) = A^{-1}\xi - A^{-1}b$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 \qquad \sum_{j=1}^{n} j^2$$

$W = \mathrm{Span}_{\mathrm{aff}}\left(\underset{P_0}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}, \underset{P_1}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}, \underset{P_2}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}\right)$. Voglio eq. cartesiane di W.

$$ax + by + cz = d$$

per simmetria del problema

$$ax + ay + az = \,?$$

divido per a

$$x + y + z = \,?$$

<u>1° modo</u> $P_1 - P_0 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $P_2 - P_0 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in W \iff \exists\, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underset{P_0}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}} + t_1 \underset{P_1 - P_0}{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}} + t_2 \underset{P_2 - P_0}{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}$$

$\iff$ il sistema lin. nelle incognite t_1, t_2 $\begin{cases} x = 1 - t_1 - t_2 \\ y = t_1 \\ z = t_2 \end{cases}$ ha almeno una soluzione

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 1 - x \\ t_1 = y \\ t_2 = z \end{cases}$$

$z+y=1-x$ è abbastanza ovvio

$$\begin{cases} t_1 = y \\ t_2 = z \\ 0 = z+y+x-1 \end{cases}$$

$$rk\begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & z+y+x-1 \end{pmatrix} = 2$$

$$z+y+x-1 = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & z+y+x-1 \end{pmatrix} = 0$$

<u>2° modo</u> Uso la formula

1° riga ⇝ 1° riga + 3° riga

Laplace 3° colonna

$$0 = \det\begin{pmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x-1+z & -1 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\underbrace{}_{P-P_0} \quad \underbrace{}_{P_1-P_0} \quad \underbrace{}_{P_2-P_0}$$

$$= \det\begin{pmatrix} x-1+z & -1 \\ y & 1 \end{pmatrix}$$

$$= x-1+z+y = x+y+z-1$$

Inversa della matrici 2x2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \det(A) = ad - bc \neq 0$$

$$\operatorname{Cof}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot {}^t(\operatorname{Cof}(A)) = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

gli el. sulla diag. principale si scambiano posto

gli el. sulla diag. secondaria cambiano segno

Una matrice diagonale a blocchi è

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{A_3} \end{pmatrix}$$

A_1, A_2, A_3 sono quadrate e stanno sulla diagonale

p. es.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & 0 \\ 0 & \boxed{B_2} \end{pmatrix}$$

dello stesso tipo, cioè

$\#$ righe A_i = $\#$ righe di B_i

I blocchi sono quadrati!

$$\Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} \boxed{A_1 B_1} & 0 \\ 0 & \boxed{A_2 B_2} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det(A_1) \cdot \det(A_2)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{A_1^{-1}} & 0 \\ 0 & \boxed{A_2^{-1}} \end{pmatrix}$$