$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & & \\ & & & \mu_1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \mu_s & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_r > 0$
$\mu_1, \dots, \mu_s < 0$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\mu_1}} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\mu_s}} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} = {}^tM$$

Cos'è ${}^tMAM$?

$n=2$: $r=1$, $s=1$

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix} \qquad M={}^tM=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{-\mu}}\end{pmatrix}$$

$${}^tMAM=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{-\mu}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{-\mu}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\lambda}{(\sqrt{\lambda})^2} & 0\\ 0 & \frac{\mu}{(\sqrt{-\mu})^2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

In generale nel caso precedente

$${}^tMAM=\begin{pmatrix}1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0\end{pmatrix}$$

r volte = indice di positività

s volte = indice di negatività

C, D matrici quadrate $n \times n$

$\Rightarrow \quad tr(C \cdot D) = tr(D \cdot C)$

Ma in generale $C \cdot D \neq D \cdot C$

Se λ è autovalore allora $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$

quindi $\dim V_\lambda \geq 1$.

$W \leq \mathbb{R}^n$ sottosp. vettoriale

Posso considerare

$$W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v, w) \longmapsto {}^t v \cdot w$$

è il prodotto scalare standard di v e w

È un prodotto scalare su W

Supponiamo di avere un polinomio non costante $P(t) \in \mathbb{K}[t]$ "P è un polinomio nella variabile t a coefficienti in $\mathbb{K}$"

$$P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_d t^d \quad \text{dove } a_0, \dots, a_d \in \mathbb{K}, \; a_d \neq 0$$

Per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$, $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_d\lambda^d$

- si ottiene sostituendo in $P(t)$ $t = \lambda$
- è un elemento di $\mathbb{K}$

λ si dice RADICE (o ZERO) di P se $P(\lambda) = 0$, cioè se $P(t)$ si annulla in $t = \lambda$.

λ è una radice di P, cioè $P(\lambda) = 0$ $\iff$ il polinomio $t - \lambda$ è un divisore di $P(t)$. Quindi possiamo scrivere $P(t) = (t - \lambda) \cdot Q(t)$ dove Q è un altro polinomio.

- Se λ non è radice di Q (cioè $Q(\lambda) \neq 0$), allora si dice che λ è una radice semplice di P, ovvero che la molteplicità di λ come radice di P è 1.

- Se λ è radice di Q (cioè $Q(\lambda) = 0$), allora $t-\lambda$ è divisore di Q, quindi $Q(t) = (t-\lambda) \cdot R(t)$ dove $R(t)$ è un nuovo polinomio.

  Allora $P(t) = (t-\lambda) \cdot Q(t) = (t-\lambda)^2 \cdot R(t)$

  La molteplicità di λ come radice di P è ≥ 2.

  Ed è $= 2 \iff R(\lambda) \neq 0$.

  $> 2 \iff R(\lambda) = 0$

e vado avanti ...

La molteplicità di λ come radice di P è il massimo numero m tale che $(t-\lambda)^m$ è un divisore di P.

<u>Esempio</u> Dire la molteplicità di 1 come radice dei seguenti polinomi

- t $\quad m=0$
- $t-1$ $\quad m=1$
- $t^2-1=(t-1)(t+1)$ $\quad m=1$ perché 1 non è radice di $t+1$
- $(t-1)^2(t+3)$ $\quad m=2$ perché 1 non è radice di $t+3$
- $(t-1)^2(t^3-t^2+t-1)=(t-1)^2\left[t^2(t-1)+t-1\right]=$

$$= (t-1)^2 \cdot (t^2+1)(t-1) = (t-1)^3 (t^2+1) \qquad m=3$$

perché 1 non è radice di t^2+1

$$\cdot (t-1)^5 \cdot (t^3 - t^2 - t + 1) = (t-1)^5 \cdot (t^2-1)(t-1) =$$

$$= (t-1)^5 (t-1)(t+1)(t-1) = (t-1)^7 (t+1) \qquad m=7$$

$w_1, \dots, w_k \in W$

$$W^\perp \subseteq \underbrace{\{v \in V \mid \langle w_1, v\rangle = 0, \dots, \langle w_k, v\rangle = 0\}}$$

è l'insieme dei vettori v che sono ortogonali a $w_1, \dots, w_k$

è l'insieme dei vettori v che sono ortogonali a <u>tutti</u> i vettori di W

Come si dimostra il contenimento $\subseteq$?

Sia $v \in W^\perp$ allora $\forall w \in W$ $\langle w, v\rangle = 0$.

In particolare $\langle w_1, v\rangle = 0, \dots, \langle w_k, v\rangle = 0$, poiché $w_1, \dots, w_k$ sono particolari vettori di W.

Ma allora v sta nell'insieme di destra.

Quindi ho dimostrato che ogni vettore di $W^\perp$ sta nell'insieme di destra.

$B \ (= A - \lambda I)$ quadrate! $n \times n$

$$\operatorname{Ker} B \neq \{0\} \iff \det B = 0 \iff \operatorname{rk} B < n$$

$W = \text{Span}(e_1, e_2)$ in $\mathbb{R}^3$

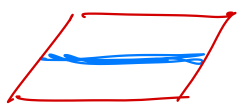
piano xy

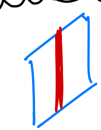
ovvero il piano di eq. $z = 0$

$e_1 \in W$, $e_2 \in W$

$W^\perp = \text{Span}(e_3)$ asse z

$e_1^\perp = \text{Span}(e_1)^\perp = \text{Span}(e_2, e_3)$ è il piano di equazione $x = 0$





$$\underbrace{\text{Span}(e_1) \subseteq \text{Span}(e_1, e_2)}_{} = W$$

$$\text{Span}(e_1)^\perp \supseteq \text{Span}(e_1, e_2)^\perp$$

$$\text{Span}(e_1)^\perp = \text{Span}(e_2, e_3) \qquad \text{Span}(e_1, e_2)^\perp = \text{Span}(e_3)$$

Morale: l'ortogonale rovescia le inclusioni

V sp. vett. su $\mathbb{R}$ con prodotto scalare $\langle \cdot ; \cdot \rangle$.

U e W sottosp. vett. sono ORTOGONALI se $\forall u \in U$, $\forall w \in W$, $\langle u, w \rangle = 0$.

$\iff U \subseteq W^\perp \iff W \subseteq U^\perp$

Prop Se U e W sono ortogonali, allora $U \cap W = \{0\}$

Dim Sia $v \in U \cap W$. Voglio dimostrare che $v = 0$.

$$\langle \underset{U}{v}, \underset{W}{v} \rangle = 0$$

sto prendendo la proprietà sopra e la sto considerando per $u = v$, $w = v$

$\langle \cdot ; \cdot \rangle$ definito positivo $\Rightarrow v = 0$. $\square$

Esercizio Quante sono $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineari tali che

$$f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$$

?

Prima idea: posso applicare il teorema di estensione lineare unica?

$$\det\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\2 & 5 & 8\\3 & 6 & 9\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\0 & -3 & -6\\0 & -6 & -12\end{pmatrix} = 0$$

quindi non posso perché

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$ non è una base di $\mathbb{R}^3$.

Sono linearmente dipendenti! Troviamo una relazione di dipendenza lineare!

$$\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \qquad (*)$$

Supponiamo che f esista. Applico f a $(*)$

$$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} \underset{\text{per ipotesi}}{=} f\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} \underset{\text{per la linearità di } f}{=} 2\cdot f\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$$

Non ho trovato l'assurdo.

Scarto il terzo vettore.

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ sono lin. indip perché $\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1 & 4\\2 & 5\end{matrix}}\\ \begin{matrix}3 & 6\end{matrix}\end{pmatrix}$ ha rango 2

Li completo a base di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Ora applico il teor. di estensione unica a questa base di $\mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \text{qualsiasi cosa}$$

Ora verifichiamo che $f\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$:

$$f\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} = f\left(2\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right) = 2\cdot f\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} \quad ✓$$