Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ (matrice quadrata), allora la molteplicità geometrica di 0 come autovalore di $A$ è

$$\dim \operatorname{Ker} A = n - rk(A)$$

per la formula del rango

Perciò se $A$ è invertibile (cioè $\det(A) \neq 0$), allora

$\operatorname{Ker} A = \{0\}$ (perché $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ è iniettiva)

$rk(A) = n$ ( " " " è suriettiva)

$\Rightarrow$ 0 non è un autovalore di $A$.

la molteplicità geometrica di un autovalore è sempre $\geq 1$

Sia $A$ una matrice $n \times n$ reale, simmetrica

$d_i$ definiti come nel criterio di Sylvester $i = 1, \dots, n$

$0 \neq d_n = \det(A) \Rightarrow A$ è invertibile $\Rightarrow 0$ non è un autovalore di $A$

$\Rightarrow n_0(A) = 0.$

**Prop** $A, A' \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$

$\left.\begin{array}{l} A \text{ e } A' \text{ sono congruenti} \\ A \text{ simmetrica} \end{array}\right\} \Rightarrow A' \text{ simmetrica}$

**Dim** Esiste $M \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertibile tale che $A' = {}^tM \cdot A \cdot M$.

Quindi

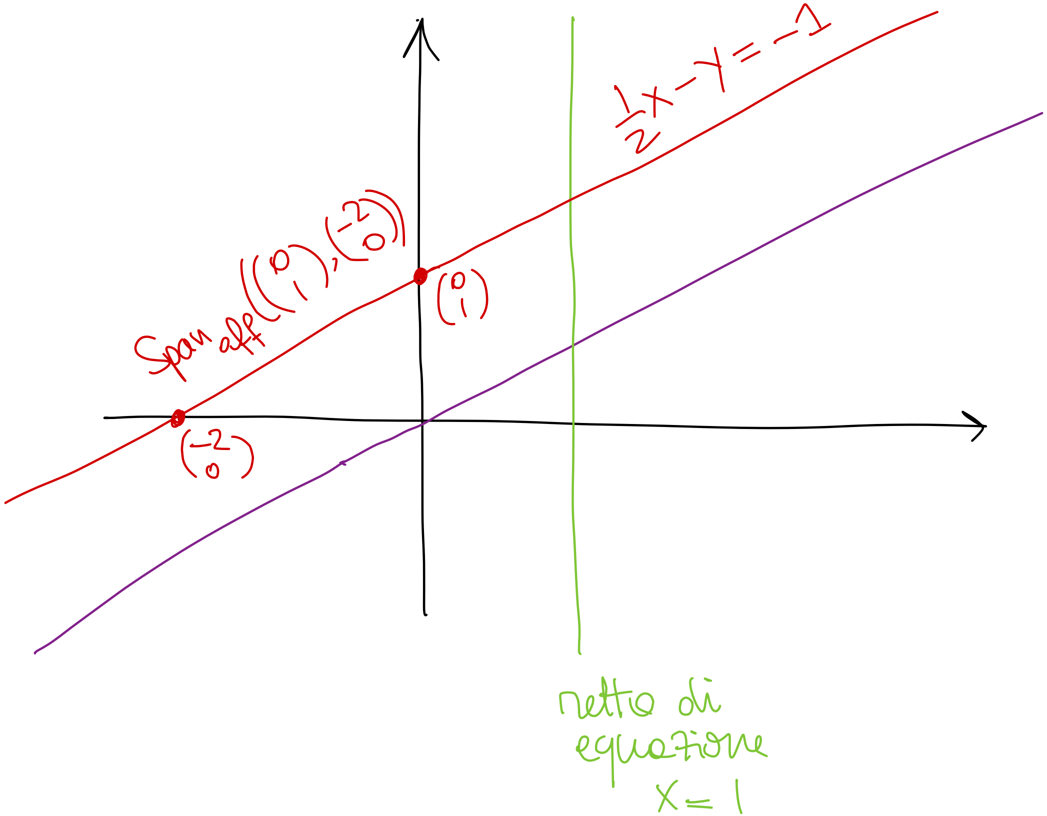
$${}^t(A') = {}^t({}^tM\, A\, M) = {}^tM \cdot {}^tA \cdot {}^t({}^tM) = {}^tM \cdot A \cdot M = A'$$

${}^t(C \cdot D) = {}^tD \cdot {}^tC$

A è simmetrica

$\Rightarrow A'$ è simmetrica. $\square$

**Oss** Tralasciamo completamente lo studio della congruenza delle matrici non simmetriche




retta di equazione $y = \frac{1}{2}x$

$$\frac{1}{2}x - y = 0$$

È la giacitura della retta rossa.

I sottospazi vettoriali (detti anche sottospazi lineari) sono esattamente i sottospazi affini che passano per l'origine. Questo succede se e solo se i termini noti delle equazioni sono tutti zero.

L'insieme costituito da un solo punto è un sottospazio affine di dimensione zero:

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è definito dal sistema lineare $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

L'insieme costituito da due punti distinti è un sottospazio affine? NO

Risolviamo l'esercizio lasciato alla fine della lezione 22 del 17/12/2021

<u>Esercizio</u> Scrivere esplicitamente la riflessione ortogonale $f$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto al piano $\pi$ di equazione $y+z=2$.

$\pi$ non è un sottospazio vettoriale.

giac($\pi$) ha equazione $y+z=0$.

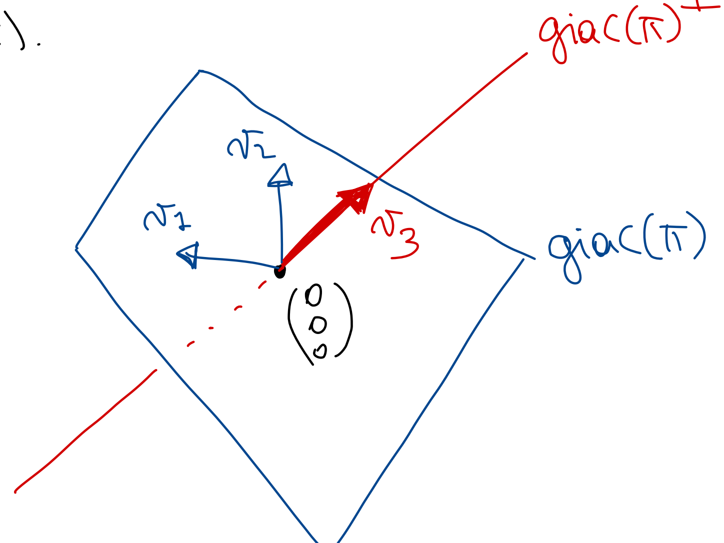
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è la riflessione ortogonale rispetto a $\pi$.

$f$ è un'isometria e un'affinità.

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{A}_{\substack{\text{parte} \\ \text{lineare} \\ \text{di } f}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + b \qquad \text{dove } A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad b \in \mathbb{R}^3$$

Intanto voglio determinare la parte lineare A di f :
per far questo lavoro solo con sottospazi vettoriali, ovvero
con $giac(\pi) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y+z=0 \right\}$

Cerco $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la riflessione ortogonale rispetto a $giac(\pi)$.




Voglio usare la geometria del problema e quindi mi fa comodo avere una base di $giac(\pi)$ e una base di $giac(\pi)^\perp$.

Trovo una base di giac($\pi$) risolvendo il sistema lineare

$y+z=0$ ;

$y=-z$

$$\begin{pmatrix} x \\ -z \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x=1$, $z=0$ $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x=0$, $z=1$ $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Una base di giac($\pi$) è $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Applico Gram-Schmidt a $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$w_1 = v_1$

$$w_2 = v_2 - \pi_{w_1}(v_2) = v_2 - \frac{\cancel{\langle v_2, w_1 \rangle}}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

perché $v_2$ e $w_1 = v_1$ sono ortogonali

$w_2 = v_2$

Dobbiamo riscalarli:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(Ho usato di nuovo le stesse lettere $v_1, v_2$. Attenzione!)

Voglio determinare $giac(\pi)^\perp$:

so che $giac(\pi) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Im}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$

$$giac(\pi)^\perp = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 1\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix}x=0\\-y+z=0\end{matrix}\right\} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Un modo più veloce era:

$$giac(\pi) = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y+z=0\right\} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow giac(\pi)^\perp = \mathrm{Im}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Una base ortonormale di $giac(\pi)^\perp$ è $v_3 = \begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$

Ho una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$

$$\underbrace{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\text{base ortonormale di giac}(\pi)}, \quad \underbrace{v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\text{base ortonormale di giac}(\pi)^\perp}$$

$$\left.\begin{aligned} A \cdot v_1 &= L_A(v_1) = v_1 \\ A \cdot v_2 &= L_A(v_2) = v_2 \end{aligned}\right\} \text{ ai vettori del piano giac}(\pi) \ A \text{ non fa nulla}$$

$A \cdot v_3 = -v_3$ perché i vettori della retta giac$(\pi)^\perp$ devono essere riflessi rispetto a giac$(\pi)$

Cerco l'unica matrice $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tale che

$A v_1 = v_1 \quad A v_2 = v_2 \quad A v_3 = -v_3$

$L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ base di $\mathbb{R}^3$

$$A \cdot v_1 = v_1 \implies [A v_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot v_2 = v_2 \implies [A v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A v_3 = -v_3 \implies [A v_3]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Queste sono le colonne di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L_A)$

$$\implies M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ma io voglio $A = M^{can}_{can}(L_A)$ !

$$\begin{tikzcd}
\overset{\text{can}}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "id"] \arrow[rrr, bend right, "L_A"'] & \overset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "L_A"] & \overset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^3} \arrow[r, "id"] & \overset{\text{can}}{\mathbb{R}^3}
\end{tikzcd}$$

$$id \circ L_A \circ id$$

$$A = M^{can}_{can}(L_A) = M^{can}_{\mathcal{B}}(id)\; M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L_A)\; M^{\mathcal{B}}_{can}(id)$$

$$= M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{M^{-1}}$$

è uguale a ${}^tM$ perché $M$ è ortogonale, visto che $\mathcal{B}$ è una base ortonormale

Notazione:

$$M = (v_1 | v_2 | v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Potevate anche usare il teorema di estensione lineare unica: voi cercate $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tale che (vedi Lezione 18)

$$Av_1 = v_1$$
$$Av_2 = v_2$$
$$Av_3 = -v_3$$

$$A = \left(v_1 \middle| v_2 \middle| -v_3\right) \cdot \left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_3\right)^{-1}$$

$$= \underbrace{\left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_3\right)}_{M} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \underbrace{\left(v_1 \middle| v_2 \middle| v_3\right)^{-1}}_{M^{-1}}$$

È lo stesso risultato di prima!

Abbiamo trovato $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Ora devo determinare il termine noto $b \in \mathbb{R}^3$

Scelgo un punto qualsiasi di $P \in \mathbb{R}^3$ di cui so cosa fa $f$ (= la riflessione ortogonale rispetto a $\pi$)

$\pi: y+z=2.$

Scelgo un punto di $\pi$: $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

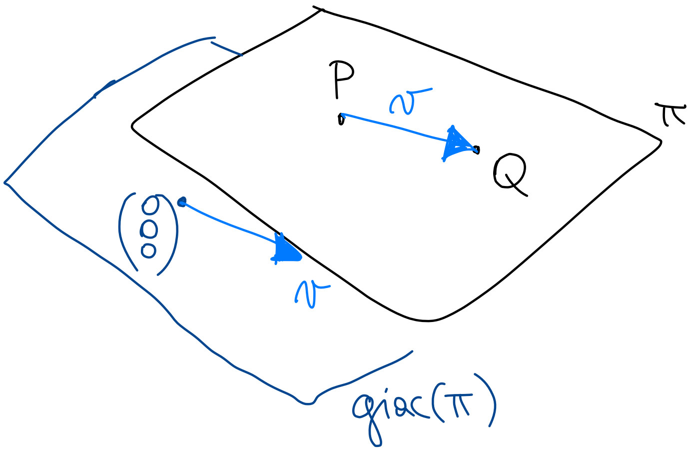
Tutti i punti di $\pi$ vengono fissati da $f$ $\Rightarrow$ $f(P) = P$

$A \cdot P + b = P$

$$\Rightarrow b = -A \cdot P + P = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Se avessi scelto un altro punto Q del piano $\pi$, il risultato non sarebbe cambiato:




considero il vettore $v$ che va da P a Q

$v = \overrightarrow{PQ} = Q - P$, $\quad Q = P + v$

$v$ sta in giac($\pi$)

quindi $A \cdot v = v$

$$b = -A\cdot Q + Q = -A\cdot(P+v) + P + v = -A\cdot P - A\cdot v + P + v$$

$$= -A\cdot P - \cancel{v} + P + \cancel{v} = -A\cdot P + P$$