TEORIA DEGLI SCHEMI

Università di Bologna, Dipartimento di Matematica
Anno accademico 2021/22, Secondo Semestre

Andrea Petracci
a [dot] petracci (nospam) [at] unibo [dot] it
`https://www.dm.unibo.it/~andrea.petracci3/2022Schemi/`

Aggiornato il 18 maggio 2022

Prerequisiti

Oltre agli usuali corsi di algebra e geometria dei primi due anni della laurea triennale, si richiede che chi voglia seguire questo corso conosca gli argomenti di base dell'algebra commutativa (anelli, moduli, localizzazione, anelli e moduli noetheriani, estensioni intere, teoria della dimensione). Delle referenze per questi argomenti sono [AM69, Mat89, Eis95, Rei95].

Inoltre è richiesta la conoscenza (anche elementare) dello spazio proiettivo, in particolare si richiede di conoscere l'atlante standard delle carte affini di $\mathbb{P}^n$, il procedimento di omogeneizzazione e disomogeneizzazione dei polinomi e le proiettività; magari anche qualche informazione sulle curve algebriche piane può essere utile. Delle referenze utili per questi argomenti possono essere i capitoli 3 e 4 di [Ser00] e il compendio teorico all'inizio di [FFP16].

È auspicabile, ma non necessaria, la conoscenza dei rudimenti della geometria algebrica (varietà affini e quasi-proiettive su un campo algebricamente chiuso, Nullstellensatz, prodotti di varietà quasi-proiettive, dimensione, spazio tangente). Delle referenze per questi argomenti sono il capitolo I di [Har77] e i libri [Rei88, SKKT00, Sha13].

Programma preliminare

Il corso è un'introduzione alla teoria degli schemi, sviluppata da Alexander Grothendieck. Gli argomenti trattati includeranno: fasci, schemi, proprietà globali e locali degli schemi, coomologia dei fasci, fasci coerenti. A seconda delle tempistiche e degli interessi dell'uditorio, si potrà anche trattare di differenziali, liscezza, fibrati lineari, divisori e cenni alla teoria delle curve algebriche e delle superfici algebriche.

Ci baseremo sostanzialmente sui capitoli II e III di [Har77] e sui capitoli 2-5 di [Liu02]. Altre possibili referenze possono essere i libri [EH00, GW20, Mum99].

La referenza rigorosa e fondazionale della teoria degli schemi, scritta dallo stesso Grothendieck (con l'aiuto di Jean Dieudonné), è la serie di volumi *Éléments de géométrie algébrique*, comunemente nota con la sigla EGA. Questi volumi delle Publications Mathématiques de l'IHÉS possono essere scaricati liberamente al `http://www.numdam.org/search/elements%20geometrie%20algebrique-%22Grothendieck,%20Alexander%22-qn/`. Un'altra referenza rigorosa e onnicomprensiva della teoria degli schemi (e di tante altre cose) è il blog collaborativo `https://stacks.math.columbia.edu` mantenuto da Aise Johan de Jong. Sconsiglio a chi si approccia per la prima volta alla teoria degli schemi di studiare EGA e Stacks Project, perché queste due opere enciclopediche non forniscono intuito geometrico né esempi. D'altra parte queste due opere sono molto utili a chi ha già esperienza e fa ricerca.

Perché la teoria degli schemi?

La teoria degli schemi è il linguaggio rigoroso con cui si studia e si fa la geometria algebrica oggi. Esso unifica la geometria algebrica classica (cioè lo studio delle varietà proiettive) e la teoria algebrica dei numeri. Alcuni vantaggi della teoria degli schemi sono: poter considerare funzioni nilpotenti, poter considerare la stessa varietà su campi diversi, poter conserare oggetti "aritmetici" (ovvero definiti su $\mathbb{Z}$ o sull'anello degli interi di un campo di numeri).

Oltre alle introduzioni che potete leggere nei libri che ho menzionato sopra, potete dare uno sguardo a questo articoletto scritto da David Mumford `https://www.dam.brown.edu/people/mumford/blog/2014/Grothendieck.html`.

Riferimenti bibliografici

[AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[EH00] David Eisenbud and Joe Harris. *The geometry of schemes*, volume 197 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.

[Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.

[FFP16] Elisabetta Fortuna, Roberto Frigerio, and Rita Pardini. *Projective geometry*, volume 104 of *Unitext*. Springer, 2016. Solved problems and theory review.

[GW20] Ulrich Görtz and Torsten Wedhorn. *Algebraic geometry I. Schemes—with examples and exercises*. Springer Studium Mathematik—Master. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2020.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[Liu02] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2002. Translated from the French by Reinie Erné, Oxford Science Publications.

[Mat89] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1989. Translated from the Japanese by M. Reid.

[Mum99] David Mumford. *The red book of varieties and schemes*, volume 1358 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, expanded edition, 1999. Includes the Michigan lectures (1974) on curves and their Jacobians, With contributions by Enrico Arbarello.

[Rei88] Miles Reid. *Undergraduate algebraic geometry*, volume 12 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[Rei95] Miles Reid. *Undergraduate commutative algebra*, volume 29 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Ser00] Edoardo Sernesi. *Geometria 1*. Bollati Boringhieri, 2000.

[Sha13] Igor R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry. 1*. Springer, Heidelberg, third edition, 2013. Varieties in projective space.

[SKKT00] Karen E. Smith, Lauri Kahanpää, Pekka Kekäläinen, and William Traves. *An invitation to algebraic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2000.

Lezioni

(1) **21 Febbraio 2022.** Introduzione al corso. Richiami su algebre finite, intere e di tipo finito. Differenze tra la teoria classica delle varietà algebriche e la teoria degli schemi. Richiami sul Nullstellensatz e sui chiusi algebrici affini. Topologia di Zariski sullo spettro primo di un anello. Spec è un funtore dalla categoria degli anelli alla categoria degli spazi topologici. Spettro di un campo, di $\mathbb{Z}$ e di $\mathbb{C}[x]$. Chiusura di un sottoinsieme di $\operatorname{Spec} A$ (lasciato per esercizio). Un primo è un punto chiuso se e solo se è un massimale. Definizione di spazio topologico irriducibile. I chiusi irriducibili di $\operatorname{Spec} A$ sono in corrispondenza biunivoca con i punti di $\operatorname{Spec} A$, ovvero con gli ideali primi di A.

(2) **23 Febbraio 2022.** Lo spettro di un anello quoziente A/I è il chiuso $\mathrm{V}(I)$. Lo spettro di un anello di frazioni $S^{-1}A$ è un sottospazio topologico di $\operatorname{Spec} A$. Definizione di aperti principali. Gli aperti principali formano una base per la topologia di Zariski. Definizione di spazio topologico quasi-compatto. Lo spettro di un anello è quasi-compatto. Lo spettro del prodotto di due anelli è l'unione disgiunta.

Definizione di prefascio, di prefascio separato e di fascio. Un prefascio è un funtore controvariante dalla categoria degli aperti (con le frecce date dalle inclusioni) alla categoria dei gruppi abeliani. Esempi: prefascio costante, fascio delle funzioni continue a valori in $\mathbb{C}$, fascio delle funzioni continue a valori in $\mathbb{C}^*$, fascio costante, le funzioni continue limitate formano un prefascio separato che non è un fascio (in generale). Se P è un prefascio separato di gruppi abeliani, allora $P(\emptyset) = 0$. Definizione di omomorfismo iniettivo di fasci, definizione di omomorfismo suriettivo di fasci. Un omomorfismo di fasci è iniettivo e suriettivo se e solo se dà un isomorfismo su ogni aperto. Esempio dell'omomorfismo esponenziale dal fascio delle funzioni continue complesse al fascio delle funzioni continue complesse mai nulle: su qualche aperto di $\mathbb{C}$ (per esempio $\mathbb{C}^*$) non dà una suriezione, ma è un omomorfismo suriettivo di fasci perché dà suriezioni sugli aperti semplicemente connessi (che formano una base).

(3) **28 Febbraio 2022.** Spighe e germi di un prefascio. Una sezione è localmente nulla se e solo se induce germi nulli. Definizione di fascificazione, proprietà universale. Nucleo e immagine di omomorfismi di fasci. Esattezza di sequenze di fasci; l'esattezza si può controllare sulle spighe. La successione esatta esponenziale $0 \to \mathbb{Z}_X \to \mathcal{C}_X \to \mathcal{C}_X^* \to 0$: caratterizzazione dell'immagine di exp in termini dell'omomorfismo indotto sul gruppo fondamentale, costruzione dell'omomorfismo $\mathcal{C}_X^*(X) \to \mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z})$, cenni alla coomologia dei fasci. Pushforward di un fascio rispetto a un'applicazione continua.

(4) **2 Marzo 2022.** Richiami su moduli di frazioni. Se $g \in \sqrt{Af}$, cioè se $X_f \supseteq X_g$, allora $M_f \to M_g$ è un omomorfismo canonico ben definito. Se A è un anello e M è un A-modulo, allora c'è sullo spazio topologico $\operatorname{Spec} A$ un fascio $\widetilde{M}$ le cui spighe sono le localizzazioni di M nei primi. Le sezioni di $\widetilde{M}$ su un aperto principale X_f sono date dagli elementi di M_f. Definizione di supporto di un fascio. Esempio: fasci indotti da $\mathbb{Z}$ e da

$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ su $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$. Il funtore $M \mapsto \tilde{M}$ è un funtore esatto dalla categoria degli A-moduli alla categoria dei fasci su $\operatorname{Spec} A$.

(5) **7 Marzo 2022.** Definizione di omomorfismo locale di anelli locali. Non tutti gli omomorfismi di anelli locali sono locali. Definizione di spazio anellato e di spazio localmente anellato. Esempio di un spazio topologico X con il fascio costante $\mathbb{Z}_X$, esempio di uno spazio topologico con il fascio delle funzioni continue a valori complessi. Lo spettro primo di un anello dotato del fascio di struttura è uno spazio localmente anellato; esempi: anelli artiniani locali, $\mathbb{Z}$, $k[x, y]$ dove k è un campo algebricamente chiuso.

Il pull-back di una funzione continua complessa lungo un'applicazione continua. Definizione di morfismo di spazi anellati e di morfismo di spazi localmente anellati. Equivalenza tra omomorfismi di anelli e morfismi di spazi localmente anellati tra gli spettri primi.

Definizione di schema affine e di schema. Un aperto di uno schema è uno schema. Definizione di morfismo di schemi.

(6) **9 Marzo 2022.** Definizione di immersione aperta di schemi e di sottoschema aperto. La categoria degli schemi affini è equivalente all'opposto della categoria degli anelli. Costruzione di morfismi di schemi usando ricoprimenti aperti affini e omomorfismi di anelli. Dare un morfismo da uno schema X a uno schema affine Y equivale a dare un omomorfismo di anelli da $\mathcal{O}_Y(Y)$ a $\mathcal{O}_X(X)$. L'omomorfismo naturale da uno schema X a $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_X(X)$ è universale rispetto a morfismi da X a schemi affini.

Incollamento di schemi lungo sottoschemi aperti. Definizione di spazio affine $\mathbb{A}^n_A$. Due esempi di incollamento di schemi: la retta con due origini e la retta proiettiva $\mathbb{P}^1_A$, e le loro funzioni regolari globali.

Definizione di immersione chiusa di schemi e di sottoschema chiuso. Corrispondenza biunivoca tra ideali di A e sottoschemi chiusi di $\operatorname{Spec} A$ (senza dimostrazione).

(7) **14 Marzo 2022.** Definizione di schema quasi-compatto, connesso, irriducibile. Uno schema è quasi-compatto se e solo se è unione finita di schemi affini. Definizione di schema integro e di schema ridotto. Uno schema è integro se e solo se è ridotto e irriducibile.

Definizione di anello graduato, modulo graduato, ideale omogeneo. Esempio della graduazione standard sull'anello dei polinomi. Definizione di ideal irrilevante e di Proj di un anello $\mathbb{N}$-graduato. L'insieme $\operatorname{Proj} k[x_0, x_1]$, dove k è un campo algebricamente chiuso, coincide con l'unione disgiunta del singoletto dato dall'ideale nullo e dei punti della retta proiettiva $\mathbb{P}^1(k) = \mathbb{P}(k^2)$. Chiusi di $\operatorname{Proj} A$ definiti da ideali omogenei e loro proprietà. $\operatorname{Proj} A$ è vuoto se e solo se l'ideale irrilevante è contenuto nel nilradicale.

Dati un anello $\mathbb{N}$-graduato A e un A-modulo $\mathbb{Z}$-graduato M, definizione della localizzazione omogenea $M_{(\mathfrak{p})}$ di M in un primo omogeneo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} A$ e della localizzazione omogenea $M_{(f)} \subseteq M_f$ rispetto a un elemento omogeneo $f \in A_+$. Definizione di aperto principale di $\operatorname{Proj} A$. Gli aperti principali formano una base.

(8) **16 Marzo 2022 - I parte.** Risoluzione di alcuni esercizi del Foglio 1. Alcune proprietà delle spighe dei fasci di funzioni olomorfe e di funzioni C^∞.

Se A è un anello $\mathbb{N}$-graduato e M è un A-modulo $\mathbb{Z}$-graduato, costruzione e proprietà del fascio $\tilde{M}$ su $\operatorname{Proj} A$. Se A è un anello $\mathbb{N}$-graduato, allora $\operatorname{Proj} A$ è uno schema col suo fascio di struttura. Definizione dello spazio proiettivo su un anello R. Definizione di spazio proiettivo pesato. Esempio di $\mathbb{P}(1, 1, 2)_R$.

Categorie di frecce con target o source fissato. Definizione di S-schema.

(9) **16 Marzo 2022 - II parte.** Costruzione di morfismi tra Proj. Il Proj di un sottoanello di Veronese è isomorfo al Proj dell'anello originario. Una suriezione tra anelli $\mathbb{N}$-graduati induce un'immersione chiusa. Definizione di schema proiettivo su un anello. Immersione di Veronese di $\mathbb{P}^1_R$ in $\mathbb{P}^2_R$.

Definizione di schema localmente noetheriano. Se X è uno schema localmente noetheriano e U è un aperto affine di X, allora $\mathcal{O}_X(U)$ è un anello noetheriano. Definizione di schema noetheriano. Definizione di spazio topologico noetheriano. Lo spazio topologico soggiacente di uno schema noetheriano è noetheriano, ma il viceversa è falso.

Definizione di componente irriducibile di uno spazio topologico. Le componenti irriducibili sono chiuse e ricoprono (senza dimostrazione). Uno spazio topologico noetheriano ha un numero finito di componenti irriducibili (senza dimostrazione). Definizione di punto generico di uno schema. Se X è uno schema, bigezione tra punti generici di X e componenti irriducibili di X (senza dimostrazione).

Se X è uno schema integro, allora la spiga del punto generico di X è un campo, detto campo delle funzioni razionali, ed è il campo delle frazioni di qualsiasi aperto affine non vuoto.

(10) **21 Marzo 2022.** Dimensione di Krull di uno spazio topologico, codimensione di un chiuso irriducibile, collegamento con lo spettro di un anello.

Domini a valutazione discreta. Se R è un dominio a valutazione discreta con uniformizzante t allora il primo $\mathfrak{p} = (tx-1) \subset R[x] = A$ è tale che $\dim A/\mathfrak{p} + \dim A_{\mathfrak{p}} < \dim A$.

Prodotti, coprodotti, prodotti fibrati (pull-back), push-out in categorie. Esempi nelle categorie degli insiemi, degli spazi topologici, dei gruppi e dei gruppi abeliani.

Richiami su prodotti tensoriali di moduli. Estensione degli scalari. Il prodotto tensore di due R-algebre è il coprodotto nella categoria delle R-algebre. Esempi con algebre di polinomi, algebre di tipo finito. $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ è isomorfo a $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

(11) **23 Marzo 2022.** Prodotti tensoriali di algebre di tipo finito su un anello. Se R è un anello allora $R[x] \otimes_R R[\![y]\!]$ coincide $R[\![y]\!][x]$ che è strettamente contenuto in $R[x][\![y]\!]$, che a sua volta è strettamente contenuto in $R[\![x,y]\!]$. Se $\mathfrak{p}$ è un primo di un anello A, allora il campo residuo $\kappa(\mathfrak{p}) = \operatorname{Frac}(A/\mathfrak{p}) = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ coincide con $A/\mathfrak{p} \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$.

Esistenza dei prodotti fibrati nella categoria degli schemi. Il prodotto fibrato di due sottoschemi chiusi di uno schema affine ha come spazio topologico soggiacente l'intersezione dei due chiusi. Definizione di $\mathbb{A}^n_S$ e $\mathbb{P}^n_S$ per ogni schema S.

Se x è un punto di uno schema X, allora ci sono dei morfismi canonici $\operatorname{Spec} \kappa(x) \hookrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to X$. Dare un morfismo dallo spettro di un campo K a uno schema X equivale a scegliere un punto x e un omomorfismo di anelli $\kappa(x) \hookrightarrow K$. Definizione di fibra (schematica) di un morfismo tra schemi sopra un punto. Lo spazio topologico soggiacente della fibra schematica è la fibra. Calcolo delle fibre del morfismo $\mathbb{A}^1_k \to \mathbb{A}^1_k$ definito da $z \mapsto z^2$. Calcolo delle fibre del morfismo $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[i] \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ e collegamenti con la teoria algebrica dei numeri.

(12) **4 Aprile 2022.** Morfismi quasi-compatti. Essere un morfismo quasi-compatto è una proprietà locale sul codominio. Morfismi di tipo finito. Essere un morfismo di tipo finito è una proprietà locale sul codominio. Esempi e controesempi di morfismi quasi-compatti e/o di tipo finito.

Proprietà di morfismi stabili per cambio base. Definizione di morfismo proiettivo (secondo Hartshorne). Morfismi affini. Enunciato il fatto che essere un morfismo affine è una proprietà locale sul codominio (dimostrazione omessa).

Definizione di varietà algebrica su un campo come schema di tipo finito. Cambio base di una varietà algebrica a un'estensione del campo. Definizione di varietà algebrica geometricamente ridotta, irriducibile, connessa, integra.

(13) **6 Aprile 2022.** Definizione di sequenza regolare in un anello. Definizione di immersione chiusa regolare di schemi. L'immersione chiusa del luogo delle matrici 2×3 di rango al più 1 non è regolare. Se A è un anello locale noetheriano e $f_1, \ldots, f_r$ è una sequenza regolare contenuta nell'ideale massimale, allora $\dim A/(f_1, \ldots, f_r) = \dim A - r$. (enunciato senza dimostrazione)

Uno schema è non vuoto se e solo se esiste un morfismo dallo spettro di qualche campo in lui. Date due estensioni di campi dello stesso campo, esiste sempre un campo che le contiene entrambe. Un morfismo di schemi surgettivo è universalmente surgettivo.

Se k è un campo, allora una varietà algebrica X su k è geometricamente ridotta/integra/irriducibile/connessa se e solo se per ogni estensione di campi K/k lo schema X_K è ridotto/integro/irriducibile/connesso (dimostrazione data solo quando K è un'estensione algebrica di k). Se k è un campo, allora $\operatorname{Spec} k$, $\mathbb{A}^n_k$ e $\mathbb{P}^n_k$ sono varietà algebriche geometricamente integre su k. $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$ è geometricamente integro su $\mathbb{C}$ e geometricamente sconnesso su $\mathbb{R}$.

Se X e S' sono S-schemi, definizione di S'-punto di X. Funtore dei punti. Caso concreto delle varietà algebriche: se K/k è un'estensione di campi e $X = \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_n]/I$, allora $X(K)$ coincide con l'insieme delle n-uple $a \in K^n$ tali che $f(a) = 0$ per ogni $f \in I$.

Definizione di diagonale di un morfismo. Definizione di morfismo separato. La retta con due origini non è separata. Ogni morfismo tra schemi affini è separato. Immersioni aperte o chiuse sono separate, composizione di morfismi separati è separata, essere separato è stabile per cambio base (senza dimostrazione).

Struttura ridotta su un sottoinsieme chiuso di uno schema. Il ridotto di uno schema.

Due morfismi da uno schema ridotto a uno schema separato che coincidono su un aperto denso sono lo stesso morfismo.

(14) **11 Aprile 2022.** Risoluzione dell'esercizio 2.1(3): esempio di un anello $\mathbb{N}$-graduato A non-ridotto tale che $\operatorname{Proj} A$ è ridotto. Saturazione di ideali omogenei nell'anello dei polinomi con la graduazione standard. Due ideali omogenei nell'anello dei polinomi con la graduazione standard definiscono lo stesso sottoschema chiuso dello spazio proiettivo se e solo se hanno le stesse saturazioni.

Risoluzione dell'esercizio 2.4(3): calcolo della dimensione e dello spazio tangente di alcuni sottoschemi chiusi dello spazio affine e dello spazio proiettivo.

Definizione di morfismo universalmente chiuso. La proiezione $\mathbb{A}^1_k \to \operatorname{Spec} k$ è chiusa, ma non universalmente chiusa.

Definizione di morfismo proprio. Criterio valutativo per morfismi separati/propri: enunciato senza dimostrazione, intuizione geometrica (unicità del limite; compatto per successioni).

(15) **13 Aprile 2022.** Se k è un campo e B è una k-algebra $\mathbb{N}$-graduata standard, allora $\operatorname{Proj} B$ è vuoto se e solo se esiste $d \geq 1$ tale che $B_d = 0$. Se A è un anello, allora la proiezione $\mathbb{P}^n_A \to \operatorname{Spec} A$ è chiusa. I morfismi proiettivi sono propri.

Definizione di fasci fiacchi. Un fascio costante su uno spazio topologico irriducibile è fiacco. Coomologia dei fasci: un approccio assiomatico, senza dimostrazione. Definizione di fascio aciclico. Se X è uno spazio topologico paracompatto, allora il fascio $\mathcal{C}_X$ delle funzioni continue su X a valori reali o complessi è aciclico (senza dimostrazione). Se X è una varietà differenziabile, allora il fascio $\mathcal{C}^\infty_X$ delle funzioni C^∞ su X a valori reali o complessi è aciclico (senza dimostrazione). Se X è uno spazio topologico semi-localmente contraibile e G è un gruppo abeliano, allora la coomologia del fascio costante G_X coincide con la coomologia singolare di X a valori nel gruppo G (senza dimostrazione).

Complesso $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, F)$ delle cocatene di Čech e complesso $\check{D}^\bullet(\mathcal{U}, F)$ delle cocatene alternanti di Čech. Questi due complessi hanno la stessa coomologia $\check{\mathrm{H}}^\bullet(\mathcal{U}, F)$ (senza dimostrazione), detta coomologia di Čech. Esempi di complessi di Čech nel caso in cui il ricoprimento aperto è costituito da uno o due aperti. Se il ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ ha r elementi, allora $\check{\mathrm{H}}^p(\mathcal{U}, F) = 0$ per $p \geq r$. Vale $\check{\mathrm{H}}^0(\mathcal{U}, F) \simeq F(X)$.

(16) **20 Aprile 2022.** Definizione di risoluzione di un fascio. Una risoluzione aciclica di un fascio calcola la sua coomologia (dimostrazione quasi completa). Il complesso di de Rham su una varietà differenziabile X è una risoluzione aciclica del fascio costante $\mathbb{R}_X$. Cenni alla coomologia di Dolbeaut su una varietà complessa. Omomorfismo naturale dalla coomologia Čech alla coomologia (dimostrazione quasi completa). Teorema di Leray: la coomologia di Čech calcola la coomologia se il fascio è aciclico su qualsiasi intersezione finita di aperti del ricoprimento (senza dimostrazione). Esempio della sfera di dimensione $n \geq 1$, fascio costante e ricoprimento dato da due calotte aperte.

(Fasci di) $\mathcal{O}_X$-moduli su uno spazio anellato $(X, \mathcal{O}_X)$. Alcuni esempi. La categoria degli $\mathcal{O}_X$-moduli e operazioni tra loro.

(17) **27 Aprile 2022.** Definizione di fibrato. Esempio del nastro di Möbius. Definizione di fibrato vettoriale reale o complesso su uno spazio topologico, definizione di fibrato lineare (o in rette). Cenni a fibrati vettoriali C^∞ su una varietà C^∞ o a fibrati vettoriali olomorfi su una complex manifold. Esempi di fibrati vettoriali: banale, fibrato tangente e fibrato normale, il fibrato tautologico sullo spazio proiettivo reale o complesso.

Definizione di isomorfismo tra fibrati vettoriali. Operazioni tra fibrati vettoriali: somma diretta, prodotto tensore, Hom, duale, potenze esterne e simmetriche.

Definizione di sezione di un fibrato vettoriale su un aperto. Le sezioni formano un fascio di $\mathcal{C}_X$-moduli. Un fibrato lineare è banale se e solo se ammette una sezione globale mai nulla. Il fibrato tautologico sullo spazio proiettivo reale non è banale. Ogni sezione olomorfa globale del fibrato tautologico dello spazio proiettivo complesso è nulla (senza dimostrazione). Cenni alla prima classe di Stiefel–Whitney (risp. prima classe di Chern) per classificare i fibrati lineari reali (risp. complessi).

Definizione di fascio localmente libero e di fascio invertibile per uno spazio anellato. Il fascio delle sezioni di un fibrato vettoriale è localmente libero. Corrispondenza biunivoca tra fibrati vettoriali di rango r su uno spazio topologico e fasci localmente liberi di rango r rispetto al fascio delle funzioni continue. Differenza tra spiga e fibra di un fascio localmente libero.

(18) **2 Maggio 2022.** Definizione dei fasci Hom e proprietà. Proprietà dei fasci indotti da un modulo su uno schema affine. Definizione e proprietà equivalenti dei fasci quasi-coerenti su uno schema. La categoria dei fasci quasi-coerenti su uno schema affine è equivalente alla categoria dei moduli. Un esempio di fascio di moduli che non è quasi-coerente: l'intersezione dei fasci indotti dagli ideali (t^n) in $k[t]$. I fasci indotti dai moduli graduati sul Proj sono quasi-coerenti.

(19) **3 Maggio 2022.** Definizione del morfismo di Frobenius assoluto per uno schema su $\mathbb{F}_p$. Definizione dell'azione del gruppo di Galois di $\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p$ sui $\overline{\mathbb{F}_p}$-punti di un $\mathbb{F}_p$-schema.

Definizione e proprietà dei fasci coerenti su uno schema localmente noetheriano.

Definizione e proprietà dei moduli proiettivi su un anello. Libero $\Rightarrow$ proiettivo $\Rightarrow$ piatto. Un sottomodulo di un modulo libero su un PID è libero (senza dimostrazione). I moduli proiettivi su un PID sono liberi. $\mathbb{Q}$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo piatto non libero né proiettivo. Un modulo finito e piatto su un anello locale noetheriano è libero. Fibrati vettoriali su uno schema affine noetheriano: su un anello noetheriano, i moduli piatti finiti coincidono con i moduli localmente liberi di rango finito e coi moduli finiti proiettivi.

Proprietà necessarie e sufficienti affinché un fascio coerente su uno schema localmente noetheriano sia invertibile. Definizione del gruppo di Picard di uno schema. Il gruppo di Picard di un anello locale noetheriano o di un PID è banale. Il gruppo di Picard di un dominio di Dedekind coincide con il gruppo delle classi di ideali (senza dimostrazione). Il gruppo di Picard dell'anello degli interi di un campo di numeri è finito; inoltre è banale se e solo se l'anello è un PID (o un UFD) (senza dimostrazione).

(20) **3 Maggio 2022.** Se A è un anello $\mathbb{N}$-graduato e M è un A-modulo $\mathbb{Z}$-graduato, allora la fascificazione $\tilde{M}$ è un fascio quasi-coerente su $\operatorname{Proj} A$; inoltre questo dà un funtore esatto dalla categoria degli A-moduli $\mathbb{Z}$-graduati alla categoria dei fasci quasi-coerenti su $\operatorname{Proj} A$. Definizione del fascio invertibile $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(d)$ su $\mathbb{P}^n_R$. Coomologia di Čech di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(d)$ rispetto al ricoprimento affine standard di $\mathbb{P}^n_R$: dimostrazione solo nel caso $n = 1$.

La coomologia di Čech di un fascio quasi-coerente su uno schema affine rispetto a un ricoprimento aperto finito e affine è nulla in gradi positivi (dimostrazione completa). Una condizione sufficiente per avere la suriettività sulle sezioni globali nel caso di una successione esatta corta di fasci. Una successione esatta corta di fasci su uno schema affine in cui il primo è quasi-coerente induce una successione esatta corta sulle sezioni globali. In una successione esatta corta di fasci di moduli su uno schema, se due sono quasi-coerenti allora anche il terzo è quasi-coerente. Un fascio quasi-coerente su uno schema affine è aciclico (è stato dimostrato solo che il primo gruppo di coomologia è nullo).

Definizione di schema separato. In uno schema separato l'intersezione di aperti affini è affine. La coomologia di un fascio quasi-coerente su uno schema separato è calcolata dalla coomologia di Čech di qualsiasi ricoprimento aperto affine (dando per buono il teorema di Leray).

(21) **9 maggio 2022.** Push-forward di fasci di moduli. Condizioni sufficienti affinché il push-forward di un fascio (quasi-)coerente lungo un morfismo di schemi sia (quasi-)coerente (senza dimostrazione). Definizione di caratteristica di Eulero di un fascio coerente su uno schema proprio su un campo. Definizione di genere aritmetico di una curva propria.

Pull-back di fasci su uno spazio topologico. Aggiunzione con il push-forward (senza dimostrazione). Pull-back di fasci di moduli rispetto a un morfismo di spazi anellati. Il pull-back di un fascio quasi-coerente rispetto a un morfismo di schemi è quasi-coerente (senza dimostrazione).

Normalizzazione di un dominio e definizione di dominio normale. Proprietà locali della normalizzazione. Definizione di schema normale, di schema regolare e di schema regolare in codimensione 1. I domini a valutazione discreta sono gli anelli locali noetheriani di dimensione 1 regolari. Per uno schema noetheriano integro valgono le implicazioni: regolare $\Rightarrow$ localmente fattoriale $\Rightarrow$ normale $\Rightarrow$ regolare in codimensione 1. Definizione di divisore di Weil.

(22) **11 maggio 2022.** Divisore di una funzione razionale, equivalenza lineare tra divisori di Weil, gruppo delle classi. Esempi di divisori principali sul piano affine e sul piano proiettivo. La restrizione del gruppo delle classi da uno schema a un aperto è suriettiva e il suo nucleo è generato dalle classi del complementare.

Per uno schema normale, una funzione razionale è una funzione regolare se e solo se è regolare in un intorno di ciascun punto di codimensione 1 (omessa la dimostrazione del corrispondente risultato di algebra commutativa). Per un dominio normale noetheriano, essere UFD equivale ad avere gruppo delle classi nullo. Il gruppo delle classi dello spazio proiettivo su un campo è generato liberamente dalla classe dell'iperpiano.

Divisori di sezioni razionali non-nulle di fasci invertibili. Associare a un fascio invertibile la classe di equivalenza lineare di una sua qualsiasi sezione razionale non-nulla determina un omomorfismo di gruppi dal gruppo di Picard al gruppo delle classi.

(23) **16 maggio 2022.** Se X è uno schema integro normale noetheriano, allora l'omomorfismo dal gruppo di Picard di X al gruppo delle classi di X è iniettivo. Definizione di divisore di Cartier su uno schema integro normale noetheriano, come un divisore di Weil localmente principale. Fascio invertibile associato a un divisore di Cartier. Su uno schema integro noetheriano localmente fattoriale, ogni divisore di Weil è di Cartier e il gruppo di Picard è isomorfo al gruppo delle classi. Il fascio associato a un iperpiano nello spazio proiettivo è l'$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(1)$. Il gruppo di Picard dello spazio proiettivo è ciclico infinito.

Definizione di morfismo piatto. Definizione di varietà liscia su un campo. Criterio jacobiano per la liscezza. Una varietà liscia è regolare, ma esistono varietà regolari non lisce. Definizione di morfismo liscio tra schemi localmente noetheriani.

(24) **18 maggio 2022.** La successione esatta corta di fasci (quasi-)coerenti costituita da: fascio di ideali, fascio di struttura dell'ambiente, fascio di struttura di un sottoschema chiuso. Caso particolare di una ipersuperficie dello spazio proiettivo. Calcolo del genere di una curva piana. Definizione del polinomio di Hilbert. Calcolo del polinomio di Hilbert di una curva piana.

Grado di un fascio invertibile su una curva liscia e proiettiva (senza dimostrare che è ben definito). Cenni alla prima classe di Chern per un fibrato lineare olomorfo su una superficie di Riemann compatta e connessa. Teorema di Riemann–Roch per una curva liscia e proiettiva (senza dimostrazione).

Cenni alla teoria degli spazi dei moduli: curve piane di fissato grado, sottoschemi chiusi dello spazio proiettivo di fissato polinomio di Hilbert, curve lisce e proiettive di fissato genere, fasci invertibili su una curva liscia proiettiva fissata di grado 0; funtori rappresentabili.

Università di Bologna
Dipartimento di Matematica
A.A. 2021/22, Secondo Semestre

Andrea Petracci
a [dot] petracci (nospam) [at] unibo [dot] it
`https://www.dm.unibo.it/~andrea.petracci3/2022Schemi/`

Teoria degli Schemi — Foglio di esercizi 1
da consegnare entro lunedí 14 Marzo 2022

[Potete dare per buono, purché opportunamente citato, qualsiasi risultato che trovate nella parte teorica del libro di Atiyah e MacDonald o degli altri libri di algebra commutativa che vi ho suggerito.]

Esercizio 1.1. (1) Sia A un anello e sia E un sottoinsieme di $\operatorname{Spec} A$. Si dimostri che la chiusura di E in $\operatorname{Spec} A$ è $\mathrm{V}(\bigcap_{\mathfrak{p}\in E}\mathfrak{p})$.

(2) Siano A e B due anelli. Si dimostri che $\operatorname{Spec}(A\times B)$ è omeomorfo all'unione disgiunta $\operatorname{Spec} A \coprod \operatorname{Spec} B$.

Esercizio 1.2. Sia $\varphi\colon A \to B$ un omomorfismo di anelli e si consideri la mappa indotta $\varphi^\star\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$.

(1) Si dimostri che per ogni ideale $J \subseteq B$ vale $\varphi^\star(\mathrm{V}(J)) \subseteq \mathrm{V}(\varphi^{-1}J)$ e che la chiusura di $\varphi^\star(\mathrm{V}(J))$ in $\operatorname{Spec} A$ è $\mathrm{V}(\varphi^{-1}J)$.
(2) Si dimostri che se φ è intero e iniettivo allora la mappa indotta $\varphi^\star$ è suriettiva.
(3) Si dimostri che se φ è intero allora la mappa indotta $\varphi^\star$ è chiusa.
(4) Si dia un esempio di omomorfismo di anelli $\varphi\colon A \to B$ tale che la mappa indotta $\varphi^\star\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ non è aperta né chiusa.
(5) Si dia un esempio di omomorfismo non-suriettivo di anelli $\varphi\colon A \to B$ tale che la mappa indotta $\varphi^\star\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ è un omeomorfismo.

Esercizio 1.3. Sia k un anello, sia A una k-algebra e sia G un gruppo finito che agisce su A mediante omomorfismi di k-algebre. Per semplicità si può supporre che G sia un sottogruppo finito del gruppo degli automorfismi di A come k-algebra. Si consideri l'insieme degli elementi che sono G-invarianti:

$$A^G := \{a \in A \mid \forall g \in G,\ g(a) = a\}$$

che è evidentemente una k-sottoalgebra di A. Si consideri l'inclusione $\iota\colon A^G \hookrightarrow A$ e la mappa indotta $\iota^\star\colon \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} A^G$.

(1) Si dimostri che A è intero su A^G.
(2) Si dimostri che: se k è noetheriano e A è di tipo finito su k, allora A^G è di tipo finito su k.
(3) Si consideri l'azione sinistra di G sullo spazio topologico $\operatorname{Spec} A$ data da $g\cdot\mathfrak{q} = g(\mathfrak{q})$ per ogni $g \in G$ e $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$ e se ne consideri il quoziente $\pi\colon \operatorname{Spec} A \to (\operatorname{Spec} A)/G$ nella categoria degli spazi topologici (cioè $(\operatorname{Spec} A)/G$ è l'insieme quoziente dotato della topologia quoziente indotta da $\operatorname{Spec} A$.). Si dimostri che esiste un omeomorfismo $\Phi\colon (\operatorname{Spec} A)/G \to \operatorname{Spec} A^G$ che rende commutativo il seguente diagramma.

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Spec} A \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\iota^\star"] & \\ (\operatorname{Spec} A)/G \arrow[rr, "\Phi"] & & \operatorname{Spec} A^G \end{tikzcd}$$

[Per chiarezza e per aiutarmi nella correzione vi chiedo di indicare i primi di A con $\mathfrak{q}$ e i primi di A^G con $\mathfrak{p}$, eventualmente decorati da apici, pedici, ...]

(4) Si consideri il seguente esempio: k è un campo di caratteristica diversa da 2, $A = k[x,y]$ è l'anello dei polinomi in 2 variabili, G è il gruppo con 2 elementi, l'azione dell'elemento non banale $\sigma \in G$ su A è data da $\sigma\colon f(x,y) \mapsto f(-x,-y)$. Si determini un insieme di generatori di A^G come k-algebra e si presenti la k-algebra A^G come il quoziente di una k-algebra polinomiale modulo un ideale (Facoltativo: si dica se A^G è un anello regolare.)

Esercizio 1.4. Sia $0 \longrightarrow F' \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} F''$ una successione esatta di fasci su uno spazio topologico X. Si dimostri che la sequenza di gruppi abeliani $0 \longrightarrow F'(X) \xrightarrow{\varphi_X} F(X) \xrightarrow{\psi_X} F''(X)$ è esatta.

Esercizio 1.5. Sia $f\colon X \to Y$ una funzione continua di spazi topologici, sia F un fascio di gruppi abeliani su X e sia $p \in X$ un punto.

(a) Si costruisca un omomorfismo canonico $\alpha\colon (f_*F)_{f(p)} \to F_p$.
(b) Se X è un sottospazio di Y e f è l'inclusione, allora si dimostri che l'omomorfismo sopra è un isomorfismo.
(c) Si dia un esempio in cui l'omomorfismo sopra è iniettivo e non suriettivo.
(d) Si dia un esempio in cui l'omomorfismo sopra è non iniettivo e suriettivo.

Università di Bologna
Dipartimento di Matematica
A.A. 2021/22, Secondo Semestre

Andrea Petracci
a [dot] petracci (nospam) [at] unibo [dot] it
`https://www.dm.unibo.it/~andrea.petracci3/2022Schemi/`

Teoria degli Schemi — Foglio di esercizi 2
da consegnare entro lunedí 4 Aprile 2022

Esercizio 2.1. Sia $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i$ un anello $\mathbb{N}$-graduato. Si consideri lo schema $X = \operatorname{Proj} A$.

1. Se A è ridotto, si dimostri che X è ridotto.
2. Se A è un dominio, si dimostri che X è integro.
3. Si costruisca un esempio in cui A è non-ridotto e X è integro.
4. Se $d > 0$ e $f \in A_d$, si costruisca un omomorfismo suriettivo di A_0-algebre $A^{(d)} \to A_{(f)}$.
5. Se A è noetheriano, si dimostri che X è noetheriano.
6. Si costruisca un omomorfismo naturale di anelli $A_0 \to \mathcal{O}_X(X)$. Si dica se è iniettivo e/o suriettivo, fornendo prove e/o controesempi.

Esercizio 2.2. Sia R un anello e siano d_0, d_1 due numeri interi positivi. Si consideri

- lo spazio proiettivo pesato $\mathbb{P}_R(d_0, d_1) = \operatorname{Proj} R[y_0, y_1]$ dove $\deg y_i = d_i$ e
- la retta proiettiva standard $\mathbb{P}^1_R = \mathbb{P}_R(1,1) = \operatorname{Proj} R[x_0, x_1]$ dove $\deg x_i = 1$.

Si costruisca esplicitamente un isomorfismo di R-schemi tra $\mathbb{P}_R(d_0, d_1)$ e $\mathbb{P}^1_R$. [Si denoti con d il massimo comun divisore tra d_0 e d_1. Si ponga $a_i = d_i/d$.]

Esercizio 2.3. Sia X uno schema localmente noetheriano.

1. Si mostri che l'insieme dei punti $x \in X$ tali che $\mathcal{O}_{X,x}$ è ridotto è un sottoinsieme aperto di X.
2. Si mostri che l'insieme dei punti $x \in X$ tali che $\mathcal{O}_{X,x}$ è un dominio è un sottoinsieme aperto di X.

Definizione. Sia X uno schema e sia $x \in X$ un punto. Sia $\mathcal{O}_{X,x}$ l'anello locale in x, $\mathfrak{m}_x$ il suo ideale massimale e $\kappa(x) := \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ il suo campo residuo. Si definisce lo *spazio tangente di Zariski* $T_{X,x}$ a X in x come il duale del $\kappa(x)$-spazio vettoriale $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, cioè $T_{X,x} := \operatorname{Hom}_{\kappa(x)}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, \kappa(x))$.

Esercizio 2.4.

1. Sia A un anello, sia $\mathfrak{m}$ un ideale massimale di A, sia M un A-modulo. Si dimostri che se $\sqrt{\operatorname{ann}_A(M)} \supseteq \mathfrak{m}$ allora l'omomorfismo di localizzazione $M \to M_\mathfrak{m}$ è un isomorfismo di A-moduli.
2. Sia k un campo e si consideri il k-schema
$$X = \operatorname{Spec} k[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_r)$$
dove $f_1, \dots, f_r \in k[x_1, \dots, x_n]$ sono dei polinomi. Supponiamo che il punto $a = (a_1, \dots, a_n) \in k^n$ annulli tutti gli f_i. Si consideri il punto chiuso $p \in X$ dato dall'ideale massimale generato da $x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n$. Si osservi che il campo residuo di p è k. Sia $\mathfrak{m}_p$ l'ideale massimale dell'anello locale $\mathcal{O}_{X,p}$.
   (a) Si dimostri che $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ è naturalmente isomorfo, come $k[x_1, \dots, x_n]$-modulo, al quoziente di ideali di $k[x_1, \dots, x_n]$ dato da
   $$\frac{(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)}{(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)^2 + (f_1, \dots, f_r)}.$$
   (b) Si consideri la matrice jacobiana
   $$J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i,j} \in \mathcal{M}_{r,n}(k)$$
   e il suo nucleo $\ker J \subseteq k^n$. Si dimostri che $\ker J$ è naturalmente isomorfo allo spazio tangente $T_{X,p} = \operatorname{Hom}_k(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2, k)$. [Suggerimento: per ogni $f \in (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ si consideri $\mathrm{d}f \colon \ker J \to k$ definito da $v \mapsto \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$; si faccia vedere $\mathrm{d} \colon (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \to \operatorname{Hom}_k(\ker J, k)$ è un'applicazione k-lineare suriettiva e se ne calcoli il nucleo.]
3. Si supponga che k sia un campo algebricamente chiuso e si calcoli la dimensione dello spazio tangente e la dimensione di Krull dell'anello locale di ciascun punto chiuso di ciascuno dei seguenti schemi:
   (a) $X = \operatorname{Proj} k[x_0, x_1, x_2]/(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3)$,
   (b) $X = \operatorname{Spec} k[x, y]/(x^2, xy)$,
   (c) $X = \operatorname{Proj} k[x_0, x_1, x_2, x_3]/(x_1 x_3, x_2 x_3)$.

Definizione. Sia k un anello, sia A una k-algebra e sia M un A-modulo. Una *k-derivazione di A in M* è un omomorfismo k-lineare $\delta\colon A \to M$ che soddisfa la regola di Leibniz: $\forall a_1, a_2 \in A,\ \delta(a_1 a_2) = a_1\delta(a_2) + a_2\delta(a_1)$. (Si osservi che δ si annulla sugli elementi di A che provengono da k.) L'insieme delle k-derivazioni di A in M si denota con $\mathrm{Der}_k(A, M)$ (e ha una struttura naturale di A-modulo).

Esercizio 2.5. Sia k un campo fissato. Si consideri la k-algebra $k[t]/(t^2)$: si denoti con ε l'immagine di t, ovvero la classe $t + (t^2) \in k[t]/(t^2)$, e si denoti con $k[\varepsilon]$ questa k-algebra. Si denoti con β l'omomorfismo suriettivo di k-algebre $k[\varepsilon] \to k$ definito da $\varepsilon \mapsto 0$.

(1) Sia A una k-algebra locale e sia $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di A. Supponiamo che il campo residuo di A sia k, ovvero la composizione $k \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{m}$ sia un isomorfismo di anelli. (Non si dia un simbolo per l'omomorfismo iniettivo di anelli $k \hookrightarrow A$, cioè si pensi k come un sottoanello di A, ma si denoti con α la proiezione al quoziente $A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{m} = k$ e si denoti con π la proiezione al quoziente $\mathfrak{m} \twoheadrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.) Si costruiscano esplicitamente delle bigezioni naturali tra i seguenti tre insiemi:
   (a) $\mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k)$,
   (b) $\mathrm{Der}_k(A, k)$,
   (c) l'insieme degli omomorfismi $\varphi\colon A \to k[\varepsilon]$ di k-algebre tali che $\alpha = \beta \circ \varphi$.

(2) Sia X uno schema su k. È evidente che il campo residuo di ciascun punto di X è un'estensione di k. Si dimostri che dare un k-morfismo $\operatorname{Spec} k[\varepsilon] \to X$ è equivalente a dare un punto x di X razionale su k (cioè tale che $\kappa(x) = k$) ed un elemento dello spazio tangente $T_{X,x}$.

Università di Bologna
Dipartimento di Matematica
A.A. 2021/22, Secondo Semestre

Andrea Petracci
a [dot] petracci (nospam) [at] unibo [dot] it
`https://www.dm.unibo.it/~andrea.petracci3/2022Schemi/`

Teoria degli Schemi — Foglio di esercizi 3
da consegnare entro mercoledí 27 Aprile 2022

Esercizio 3.1. Sia k un anello fissato.

(i) Sia n un numero naturale. Per ciascun $i = 0, \ldots, n$, considerate il k-morfismo $\pi_i \colon (\mathbb{A}^{n+1}_k)_{x_i} \to (\mathbb{P}^n_k)_{x_i}$ dato dall'inclusione $k[x_0, \ldots, x_n]_{(x_i)} \subseteq k[x_0, \ldots, x_n]_{x_i}$. Dimostrate che questi morfismi si incollano e danno un morfismo di k-schemi $\pi \colon \mathbb{A}^{n+1}_k \smallsetminus Z \to \mathbb{P}^n_k$, dove Z è il chiuso di $\mathbb{A}^{n+1}_k$ dato dall'immagine dell'immersione chiusa $\operatorname{Spec} k \hookrightarrow \mathbb{A}^{n+1}_k$ corrispondente all'omomorfismo suriettivo di k-algebre $k[x_0, \ldots, x_n] \to k$ che manda ciascun x_i in 0.

(ii) Sia X uno schema su k e siano $f_0, \ldots, f_n$ degli elementi di $\mathcal{O}_X(X)$. Si consideri il k-morfismo $f \colon X \to \mathbb{A}^{n+1}_k$ associato all'omomorfismo di k-algebre $k[x_0, \ldots, x_n] \to \mathcal{O}_X(X)$ dato da $x_i \mapsto f_i$. Si dimostri che f ha valori in $\mathbb{A}^{n+1}_k \smallsetminus Z$ se e solo se per ogni punto $p \in X$ l'ideale generato dai germi $(f_0)_p, \ldots, (f_n)_p$ coincide con $\mathcal{O}_{X,p}$. In tal caso, si denoti con $(f_0 : \cdots : f_n)$ il k-morfismo $X \to \mathbb{P}^n_k$ ottenuto componendo $f \colon X \to \mathbb{A}^{n+1}_k \smallsetminus Z$ e $\pi \colon \mathbb{A}^{n+1}_k \smallsetminus Z \to \mathbb{P}^n_k$.

(iii) Descrivete tutte le fibre dell'$\mathbb{R}$-morfismo $(t : t^2 + 1) \colon \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$, dove $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[t]$. La descrizione deve essere completamente esplicita: ciascuna fibra deve essere identificata come l'unione disgiunta di schemi della forma $\operatorname{Spec} A$, dove A è un campo oppure un anello del tipo $F[x]/(x^2)$ dove F è un campo. Questo morfismo è di tipo finito/finito/separato/proprio?

(iv) Si consideri il morfismo $(t^2 : t^2+1) \colon \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_2} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$, dove $\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_2} = \operatorname{Spec} \mathbb{F}_2[t]$, e si descrivano le sue fibre sopra i seguenti punti di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[x_0, x_1]$: $(3, x_0)$, $(7, x_0^2 + x_1^2)$, $(2, x_0)$, $(2, x_1)$, $(2, x_0 + x_1)$, $(2, x_0^2 + x_0 x_1 + x_1^2)$. (Attenzione all'ultima fibra! Non penso si possa scrivere come $\operatorname{Spec} F[x]/(x^2)$ dove F è un campo.)

Esercizio 3.2. Per varietà algebrica su un campo k si intende uno schema di tipo finito su k.

(i) Si consideri il campo $k = \mathbb{F}_2(t)$ delle funzioni razionali nell'indeterminata t sul campo $\mathbb{F}_2$. Si consideri $K = k[x]/(x^2 - t)$. Convincetevi che K è un campo e, piú precisamente, che K/k è un estensione finita di campi di grado 2. Dimostrate che $\operatorname{Spec} K$ è una varietà algebrica ridotta su k non geometricamente ridotta.

(ii) Si fornisca un esempio della seguente situazione: k è un campo, X e Y sono due varietà algebriche integre su k, $X \times_k Y$ non è integro.

(iii) Sia k un campo algebricamente chiuso e siano A e B due domini di tipo finito su k. Si dimostri che $A \otimes_k B$ è un dominio.

(iv) Si dimostri la seguente affermazione: se k è un campo e X e Y sono due varietà algebriche su k geometricamente integre, allora $X \times_k Y$ è una varietà algebrica su k geometricamente integra. [Suggerimento: supponete dapprima che k sia algebricamente chiuso e poi considerate il caso generale facendo il cambio base alla chiusura algebrica.]

Esercizio 3.3. Si costruisca un esempio esplicito della seguente situazione: k è un campo, A è un dominio di tipo finito su k, $B = k[x, y]/(x^2, xy)$, f e g sono due morfismi di k-schemi $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ che coincidono su un aperto non-vuoto (e quindi denso) di $\operatorname{Spec} B$ ma che non sono lo stesso morfismo.

Definizione. Un morfismo di schemi $f \colon X \to Y$ si dice *finito* (risp. *intero*) se per ogni aperto affine $V \subseteq Y$ l'aperto $f^{-1}(V) \subseteq X$ è affine e l'omomorfismo di anelli $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$, indotto da $f^{-1}(V) \to V$, è finito (risp. intero).

Esercizio 3.4.

(i) Sia $A \to B$ un omomorfismo di anelli e sia $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di elementi di B tale che
- gli elementi $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ generano l'ideale (1) in B,
- la composizione $A \to B \to B_{f_\lambda}$ è un omomorfismo finito per ogni $\lambda \in \Lambda$.

Si dimostri allora che $A \to B$ è finito. [Questa era la formulazione originaria dell'esercizio. Ma per il punto (ii) sarebbe stato piú giusto risolvere il seguente esercizio:
Sia $A \to B$ un omomorfismo di anelli e sia $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di elementi di A tale che
- gli elementi $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ generano l'ideale (1) in A,
- $A_{f_\lambda} \to B_{f_\lambda}$ è un omomorfismo finito per ogni $\lambda \in \Lambda$;

Si dimostri allora che $A \to B$ è finito.]

(ii) Sia $f\colon X \to Y$ un morfismo di schemi e sia $\{V_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto affine di Y tale che, per ogni $i \in I$, $f^{-1}(V_i)$ è affine e l'omomorfismo di anelli $\mathcal{O}_Y(V_i) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V_i))$, indotto da $f^{-1}(V_i) \to V_i$, è finito. Si dimostri che f è finito. [Potete dare per buono che f è affine, cioè che la preimmagine di ogni aperto affine è affine.]

Esercizio 3.5.

(i) Si dimostri che un morfismo intero di schemi è universalmente chiuso.
(ii) Si dimostri che un morfismo finito di schemi è proprio.
(iii) Si esibisca un morfismo intero che non è proprio.
(iv) Sia A un anello e sia B una A-algebra finita che ammette un insieme di generatori, come A-modulo, di cardinalità n. Si dimostri che ciascuna fibra del morfismo $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ ha cardinalità al piú n.
(v) Sia $f\colon X \to Y$ un morfismo finito di schemi quasi-compatti. Si dimostri che esiste un intero n tale che ciascuna fibra di f ha cardinalità al piú n.
(vi) Siano X e Y schemi affini e sia $f\colon X \to Y$ un morfismo di tipo finito tale che esiste un intero n tale che ciascuna fibra di f ha cardinalità al piú n. È vero che f è un morfismo finito? Lo si dimostri oppure si fornisca un controesempio.
(vii) Si costruisca un esempio della seguente situazione: A è un anello locale, B è una A-algebra finita, n è la cardinalità di ogni insieme minimale di generatori di B come A-modulo, ciascuna fibra del morfismo $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ ha cardinalità strettamente minore di n.

Università di Bologna
Dipartimento di Matematica
A.A. 2021/22, Secondo Semestre

Andrea Petracci
a [dot] petracci (nospam) [at] unibo [dot] it
`https://www.dm.unibo.it/~andrea.petracci3/2022Schemi/`

Teoria degli Schemi — Foglio di esercizi 4
da consegnare entro mercoledí 18 Maggio 2022

Esercizio 4.1. Sia X uno spazio topologico, sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X. Come al solito, usiamo le abbreviazioni $U_{ij} = U_i \cap U_j$ e $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$.

(1) Vogliamo definire una generalizzazione della coomologia di Čech in grado 1 che funziona anche per fasci di gruppi non abeliani. Si fissi G un fascio di gruppi non necessariamente abeliani su X. Un 1-*cociclo* è una tupla $\{g_{ij}\}_{(i,j) \in I \times I}$ tale che:
- per ogni coppia di indici $(i,j) \in I \times I$, $g_{ij} \in G(U_{ij})$,
- per ogni terna di indici $(i,j,k) \in I \times I \times I$
$$g_{ik}|_{U_{ijk}} = g_{ij}|_{U_{ijk}}\ g_{jk}|_{U_{ijk}} \quad \text{in } G(U_{ijk}).$$

(Segue che $g_{ii} = 1$ in $G(U_i)$ e $g_{ji} = g_{ij}^{-1}$ in $G(U_{ij})$.) L'insieme degli 1-cocicli si indica con $\check{Z}^1(\mathcal{U}, G)$. Due 1-cocicli $\{g_{ij}\}$, $\{g'_{ij}\}$ in $\check{Z}^1(\mathcal{U}, G)$ si dicono *equivalenti* se esiste una tupla $\{a_i\}_{i \in I}$ di sezioni $a_i \in G(U_i)$ tale che
$$g_{ij} = a_i|_{U_{ij}}\ g'_{ij}\ a_j^{-1}|_{U_{ij}}$$
Si dimostri che essere equivalenti è una relazione di equivalenza sull'insieme dei cocicli $\check{Z}^1(\mathcal{U}, G)$. Si denoti con $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, G)$ l'insieme quoziente.

(2) Si dimostri che se G è un fascio di gruppi abeliani, allora l'insieme $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, G)$ sopra definito coincide con la coomologia di Čech del fascio G rispetto al ricoprimento $\mathcal{U}$ introdotta a lezione.

(3) Si fissi un intero $r \geq 1$ e si consideri il fascio $\mathcal{GL}_r$ su X costituito dalle funzioni continue dagli aperti di X al gruppo topologico $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$. Ovviamente $\mathcal{GL}_r$ è un fascio di gruppi (non-abeliani se $r \geq 2$).
   (a) Sia $\pi \colon E \to X$ un fibrato vettoriale complesso di rango r dotato di $\mathcal{U}$-trivializzazioni, ovvero si supponga di avere degli omeomorfismi $h_i \colon U_i \times \mathbb{C}^r \to \pi^{-1}(U_i)$ come nella definizione di fibrato vettoriale. Usando le composizioni $h_i^{-1} \circ h_j$ definite su U_{ij}, si costruisca un elemento di $\check{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{GL}_r)$.
   (b) Si dimostri che due scelte diverse di $\mathcal{U}$-trivializzazioni dello stesso fibrato producono, secondo la costruzione in (a), 1-cocicli equivalenti. In altre parole, si dimostri che un fibrato vettoriale complesso di rango r su X $\mathcal{U}$-trivializzabile determina un elemento di $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, \mathcal{GL}_r)$.
   (c) Si dimostri che la costruzione in (b) produce una bigezione naturale tra $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, \mathcal{GL}_r)$ e l'insieme delle classi di isomorfismo dei fibrati vettoriali complessi su X di rango r che sono trivializzabili dal ricoprimento aperto $\mathcal{U}$.

[Suggerimento: si legga §11.5 del libro "Algebraic Geometry I" di Görtz e Wedhorn, l'inizio di §6 del libro "Differential forms in algebraic topology" di Bott e Tu oppure §1-3 del capitolo 5 del libro "Fibre bundles" di Husemoller.]

Esercizio 4.2. Sia k un campo.

(i) Si consideri il k-schema
$$X = \operatorname{Proj} k[x_0, x_1, x_2]/(x_0 x_2^2 - x_1^3)$$
dotato dell'ovvia immersione chiusa $X \hookrightarrow \mathbb{P}^2_k$. Per $i = 0, 1, 2$, sia $D_+(x_i)$ la i-esima carta affine standard di $\mathbb{P}^2_k$ e sia $U_i = X \cap D_+(x_i)$. Si dimostri che $\mathcal{U} = \{U_0, U_2\}$ è un ricoprimento aperto affine di X. [Suggerimento: si determini $\mathbb{P}^2_k \smallsetminus (D_+(x_0) \cup D_+(x_2))$.]

(ii) Si determini esplicitamente il complesso alternante di Čech del fascio $\mathcal{O}_X$ rispetto al ricoprimento $\mathcal{U}$ e se ne calcoli la coomologia i-esima $\check{\mathrm{H}}^i(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$ per ogni intero $i \geq 0$, in particolare si calcoli la dimensione di $\check{\mathrm{H}}^i(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$ come k-spazio vettoriale. [Suggerimento: si scelgano coordinate affini $x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$ su $D_+(x_0)$ e $u = x_0/x_2$, $v = x_1/x_2$ su $D_+(x_2)$; si osservi che l'anello $\mathcal{O}_X(U_0)$ è isomorfo alla k-algebra $k[t^2, t^3] \subset k[t]$.]

(iii) Si dimostri che X è integro e il suo campo delle funzioni razionali è isomorfo a $k(t)$, cioè il campo delle funzioni razionali in una indeterminata su k.

(iv) Si supponga che k è algebricamente chiuso e si determinino i punti chiusi non regolari di X.

(v) Si consideri l'aperto $U = U_0 \smallsetminus \{p\}$ dove p è il punto k-razionale con coordinate omogenee $[1:1:1]$, ovvero il punto che corrisponde all'ideale primo $(x_0 - x_1, x_0 - x_2)$. Si dimostri che U non è un aperto principale di U_0. [Si può dimostrare che U è affine, ma non è richiesto farlo. Questo mostra che in uno schema affine possono esistere sottoschemi aperti affini che non sono principali.]

(vi) Per ciascun intero $d \geq 1$, si ripetano i punti (i), (ii) e (iii) con il seguente sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^2_k$:
$$X = \operatorname{Proj} k[x_0, x_1, x_2]/(x_0 x_2^{d-1} - x_1^d).$$
[Se non riuscite a trovare una formula per $\dim_k \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X)$ valida per ogni d, calcolate questa dimensione per $d \leq 5$.]

Esercizio 4.3. Sia X uno schema localmente noetheriano e sia F un fascio coerente di $\mathcal{O}_X$-moduli. Si consideri la funzione $\nu_F \colon X \to \mathbb{Z}$ definita da
$$\nu_F(x) = \dim_{\kappa(x)} F_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x)$$
per ogni punto $x \in X$.

(i) Si dimostri che ν_F è semicontinua superiormente, ovvero che per ogni $n \in \mathbb{Z}$ l'insieme $U_n := \{x \in X \mid \nu_F(x) \leq n\}$ è aperto in X.
(ii) Si dimostri che se F è localmente libero allora ν_F è localmente costante.
(iii) Si dimostri che se X è ridotto e ν_F è localmente costante allora F è localmente libero.
(iv) Si costruisca un esempio in cui F non è localmente libero e ν_F è costante.

Esercizio 4.4. Si considerino l'anello $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ e l'ideale $I = (2, 1 + \sqrt{-5})$ di A. Si dimostrino le seguenti affermazioni.

(1) I è un ideale massimale di A.
(2) I non è un ideale principale di A.
(3) I^2 coincide con l'ideale (2) di A.
(4) I è un addendo diretto di $A^{\oplus 2}$.
(5) Il fascio coerente $\widetilde{I}$ su $X = \operatorname{Spec} A$ è invertibile e non-isomorfo a $\mathcal{O}_X$.

Esercizio 4.5. Sia k un campo. Si considerino la k-algebra $A = k[t^2, t^3] \subset k[t]$ e il k-schema affine $X = \operatorname{Spec} A$.

(1) Per ogni $\lambda \in k$, si consideri
$$M_\lambda = \left\{ f = \sum_{i \geq 0} f_i t^i \in k[t] \;\middle|\; f_i \in k \text{ tali che } f_1 = \lambda f_0 \right\}$$
che è un k-sottospazio vettoriale di $k[t]$. Si dimostri che M_λ è un A-modulo finito.
(2) Per ogni $\lambda \in k$, si dimostri che il fascio coerente $L_\lambda := \widetilde{M_\lambda}$ su X è invertibile. [Suggerimento: considerare gli aperti principali dati da t^2 e $1 + \lambda^3 t^3$.]
(3) Si dimostri che se $\lambda \in k \setminus \{0\}$ allora M_λ non è un A-modulo ciclico e quindi il fascio invertibile L_λ è non banale. [Si potrebbe dimostrare che associare ad ogni scalare λ la classe di isomorfismo del fascio invertibile L_λ dà un omomorfismo iniettivo di gruppi abeliani $k \to \operatorname{Pic}(X)$.]
(4) Il gruppo di Picard dello spettro di $k[\![t^2, t^3]\!]$ è banale?

Università di Bologna
Dipartimento di Matematica
A.A. 2021/22, Secondo Semestre

Andrea Petracci
a [dot] petracci (nospam) [at] unibo [dot] it
`https://www.dm.unibo.it/~andrea.petracci3/2022Schemi/`

Teoria degli Schemi — Foglio di esercizi 5
da consegnare qualche giorno prima dell'esame orale

- Risolvete 3 dei seguenti 5 esercizi, a vostra scelta.
- Potete dare per buono, purché opportunamente citato, qualsiasi risultato di algebra commutativa che trovate nella parte teorica dei libri di Atiyah–MacDonald, Matsumura o Eisenbud.

Esercizio 5.1. Sia B un dominio a fattorizzazione unica con campo delle frazioni F. Sia $b \in B$ un elemento che non è un quadrato di alcun elemento di B. Si consideri l'anello $A = B[t]/(t^2 - b)$. Si denoti con x l'immagine dell'indeterminata t in A.

(1) Usando il lemma di Gauß, si dimostri che A è un dominio e che il suo campo delle frazioni, denotato con K, è un'estensione finita di F di grado 2.

(2) Ora, in aggiunta al fatto che b non è un quadrato in B, si supponga che b è libero da quadrati, cioè che ogni fattore primo di b compare con molteplicità 1.

  (a) Si dimostri che la chiusura integrale $\overline{A}$ di A in K è contenuta nell'insieme
$$\{f + gx \in K \mid f \in F,\ g \in F,\ 2f \in B,\ 2g \in B,\ f^2 - bg^2 \in B\}.$$
  [Suggerimento: si usi l'automorfismo $\sigma\colon K \to K$ di F-algebre che manda x in $-x$ e si osservi che $\sigma(\overline{A}) \subseteq \overline{A}$. Inoltre si usi che $\overline{A}$ è un anello, quindi in particolare chiuso per somma e per prodotto.]

  (b) Supponendo che 2 sia invertibile in B, si dimostri che A è un dominio normale.

(3) Sfruttando quanto fatto sopra per $B = \mathbb{Z}$ e $b = 3$, si dimostri che la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ è $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

(4) Sfruttando quanto fatto sopra per $B = \mathbb{Z}$ e $b = 5$, si dimostri che la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ è $\mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Esercizio 5.2. Sia k un campo di caratteristica diversa da 2. Si consideri la k-algebra $A = k[t_1, t_2, t_3]/(t_1t_2 - t_3^2)$ e si denoti con x (resp. y e z) l'immagine di t_1 (resp. t_2 e t_3) in A. Si consideri lo schema $X = \operatorname{Spec} A$. Si dimostrino le seguenti affermazioni.

(i) X è uno schema normale di dimensione 2.

(ii) L'ideale $\mathfrak{p} = Ay + Az$ di A è un primo di altezza 1.

(iii) Il divisore primo $\mathfrak{p}$ su X non è di Cartier. [Suggerimento: considerate l'ideale massimale $\mathfrak{m} = Ax + Ay + Az$ di A e fate vedere che $\mathfrak{p}A_\mathfrak{m}$ non è un ideale principale di $A_\mathfrak{m}$.]

(iv) La seconda potenza $\mathfrak{p}^2$ è strettamente contenuta nella seconda potenza simbolica $\mathfrak{p}^{(2)}$. [Vedete la definizione di potenza simbolica nell'Esercizio 13 del Capitolo 4 dell'Atiyah–MacDonald.]

(v) Il divisore di Weil $2 \cdot \mathfrak{p}$ su X è principale.

(vi) Il gruppo delle classi dei divisori di Weil di X è ciclico di ordine 2.

(vii) Il gruppo di Picard di X è banale.

Esercizio 5.3. Si consideri lo schema
$$X = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[x_0, x_1, x_2]/(x_0x_2^2 - x_1^3 - 2x_0^3)$$
su $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Per ogni numero primo p si denoti con X_p la fibra di $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ sul punto $p\mathbb{Z}$, ovvero il prodotto fibrato $X \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p$. Si denoti con X_0 la fibra generica di $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, ovvero il prodotto fibrato $X \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} \operatorname{Spec} \mathbb{Q}$.

(1) Per quali primi p la fibra X_p è (geometricamente) integra?

(2) Qual è la dimensione di X, di X_p e di X_0?

(3) Per quali primi p la fibra X_p è liscia su $\mathbb{F}_p$?

(4) X_0 è liscia su $\mathbb{Q}$? È (geometricamente) integra?

(5) Si determinino le cardinalità di $X(\mathbb{F}_2)$, di $X(\mathbb{F}_3)$ e di $X(\mathbb{F}_5)$.

Esercizio 5.4. Si fissi un campo k e si consideri l'anello $A = k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ dei polinomi in 4 variabili a coefficienti in k, con la graduazione standard.

(1) Per $i = 1, 2$, sia d_i un intero positivo e sia $F_i \in A_{d_i}$ un polinomio omogeneo di grado d_i. Sia $I \subseteq A$ l'ideale generato da F_1, F_2. Si consideri il k-schema

$$X = \operatorname{Proj} A/(F_1, F_2).$$

e si supponga che $\dim X = 1$.

Usando un po' di algebra commutativa, si può dimostrare che F_1, F_2 è una sequenza regolare in A e che il complesso di Koszul di F_1, F_2 dato da

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\binom{F_2}{-F_1}} A^{\oplus 2} \xrightarrow{(F_1\ F_2)} A$$

è esatto in gradi positivi – si dia questo per buono.

Si calcolino le dimensioni come k-spazi vettoriali dei gruppi di coomologia $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{O}_X)$ e si faccia vedere che dipendono solo da d_1 e da d_2. [Suggerimento: il complesso di Koszul citato sopra fornisce una successione esatta corta di A-moduli dove a destra c'è l'ideale I. Si faccia vedere come questo produca una successione esatta corta di fasci coerenti su $\mathbb{P}^3_k$ dove a destra c'è il fascio di ideali $\mathcal{I}_X$ dell'immersione chiusa $X \hookrightarrow \mathbb{P}^3_k$. Si calcolino le dimensioni di $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^3_k, \mathcal{I}_X)$.]

(2) Si supponga che la caratteristica di k sia diversa da 2. Siano $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in k \smallsetminus \{0\}$ distinti. Si dimostri che

$$X = \operatorname{Proj}\left(A \Bigg/ \left(\sum_{i=0}^{3} x_i^2, \sum_{i=0}^{3} \lambda_i x_i^2\right)\right)$$

è un k-schema geometricamente connesso e liscio, di dimensione 1 e di genere 1.

Esercizio 5.5.

(1) Sia k un anello. Sia X un k-schema e sia L un fascio invertibile su X. Per ogni punto $x \in X$, si consideri la spiga L_x, che è un $\mathcal{O}_{X,x}$-modulo libero di rango 1, e la fibra $L(x) = L_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x)$, che è un $\kappa(x)$-spazio vettoriale di dimensione 1. Ovviamente c'è una suriezione $L_x \twoheadrightarrow L(x)$. Per ogni sezione s di L, si denoti con $s(x)$ l'immagine in $L(x)$ del germe $s_x \in L_x$.

Siano $s_0, \ldots, s_n \in \mathrm{H}^0(X, L)$ delle sezioni globali di L su X.

(a) Ora si fissi un $i \in \{0, \ldots, n\}$ e si consideri il seguente sottoinsieme di X:

$$X_i = \{x \in X \mid s_i(x) \neq 0 \text{ in } L(x)\}.$$

(i) Si dimostri che X_i è aperto in X.

(ii) Si faccia vedere che $L|_{X_i}$ è triviale (cioè isomorfo a $\mathcal{O}_{X_i}$) e che esistono e sono uniche n funzioni regolari $f_{i0}, \ldots, \widehat{f_{ii}}, \ldots, f_{in} \in \mathcal{O}_X(X_i)$ tali che $s_j|_{X_i} = f_{ij} \cdot s_i|_{X_i}$ per ogni $j \neq i$. A questo punto si consideri il morfismo $\phi_i \colon X_i \to \mathbb{A}^n_k$ di k-schemi dato dalle funzioni $f_{i0}, \ldots, \widehat{f_{ii}}, \ldots, f_{in}$. [Per semplicità di notazione potete supporre $i = 0$.]

(b) Si consideri $B = \bigcap_{i=0}^n (X \smallsetminus X_i)$, che è un sottoinsieme chiuso di X – esso si chiama il *luogo base* delle sezioni $s_0, \ldots, s_n$, è il luogo dove si annullano tutte. Si consideri lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n_k$ con coordinate omogenee $x_0, \ldots, x_n$. Per ciascun $i \in \{0, \ldots, n\}$ si identifichi lo spazio affine $\mathbb{A}^n_k$ che compare in (ii) con la i-esima carta affine standard U_i di $\mathbb{P}^n_k$ usando $\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}$, dimodoché la costruzione in (ii) produca un k-morfismo $\phi_i \colon X_i \to U_i$. Si faccia vedere che i k-morfismi $\phi_i \colon X_i \to U_i \subseteq \mathbb{P}^n_k$ si incollano a un morfismo di k-schemi $\phi \colon X \smallsetminus B \to \mathbb{P}^n_k$ dove $X \smallsetminus B = \bigcup_{i=0}^n X_i$.

(2) Si supponga che k sia un campo algebricamente chiuso. Si consideri $\mathbb{P}^2_k$ con coordinate omogenee t_0, t_1, t_2. Si considerino le sezioni t_0, t_1 di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k}(1)$. Si studi il luogo base B e il k-morfismo $\phi \colon \mathbb{P}^2_k \smallsetminus B \to \mathbb{P}^1_k$ costruito in (1). In particolare, si determini la fibra tramite ϕ di ciascun punto di $\mathbb{P}^1_k$.

(3) Si considerino due copie di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$: una con coordinate omogenee t_0, t_1 e una con coordinate omogenee x_0, x_1. Si considerino le seguenti sezioni del fascio invertibile $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}}(2)$ sulla prima copia di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$: $t_0 t_1$ e $t_0^2 + t_1^2$. Si faccia vedere che il luogo base è vuoto e che queste due sezioni inducono (secondo la costruzione in (1)) un $\mathbb{R}$-morfismo $\varphi \colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$, dalla prima copia di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ con coordinate omogenee t_0, t_1 alla seconda copia di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ con coordinate omogenee x_0, x_1. Si descriva esplicitamente ciascuna fibra di φ.

(4) Sia k un anello, si considerino $\mathbb{P}^1_k$ con coordinate omogenee t_0, t_1 e $\mathbb{P}^2_k$ con coordinate omogenee x_0, x_1, x_2. Si considerino le sezioni globali di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(2)$ date dai monomi $t_0^2, t_0 t_1, t_1^2$. Si faccia vedere che il luogo base di queste sezioni è vuoto e che queste sezioni inducono (secondo la costruzione in (1)) un k-morfismo $\phi \colon \mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^2_k$ che è un'immersione chiusa. Sapreste trovare un ideale omogeneo $I \subseteq k[x_0, x_1, x_2]$ tale che l'immagine di ϕ è il chiuso di $\mathbb{P}^2_k$ determinato da I?