TEORIA DEGLI SCHEMI

Università di Bologna, Dipartimento di Matematica
Anno accademico 2022/23, Secondo Semestre

Andrea Petracci
a [dot] petracci (nospam) [at] unibo [dot] it
`https://www.dm.unibo.it/~andrea.petracci3/2023Schemi/`

Aggiornato il 11 luglio 2023

Prerequisiti

Oltre agli usuali corsi di algebra e geometria dei primi due anni della laurea triennale, si richiede che chi voglia seguire questo corso conosca gli argomenti di base dell'algebra commutativa (anelli, moduli, localizzazione, anelli e moduli noetheriani, estensioni intere, teoria della dimensione). Delle referenze per questi argomenti sono [AM69, Mat89, Eis95, Rei95].

Inoltre è richiesta la conoscenza (anche elementare) dello spazio proiettivo, in particolare si richiede di conoscere l'atlante standard delle carte affini di $\mathbb{P}^n$, il procedimento di omogeneizzazione e disomogeneizzazione dei polinomi e le proiettività; magari anche qualche informazione sulle curve algebriche piane può essere utile. Delle referenze utili per questi argomenti possono essere i capitoli 3 e 4 di [Ser00] e il compendio teorico all'inizio di [FFP16].

È auspicabile, ma non strettamente necessaria, la conoscenza dei rudimenti della geometria algebrica (varietà affini e quasi-proiettive su un campo algebricamente chiuso, Nullstellensatz, prodotti di varietà quasi-proiettive, irriducibilità, dimensione, spazio tangente). Delle referenze per questi argomenti sono il capitolo I di [Har77] e i libri [Rei88, SKKT00, Sha13].

Programma preliminare

Il corso è un'introduzione alla teoria degli schemi, sviluppata da Alexander Grothendieck. Gli argomenti trattati includeranno: fasci, schemi, proprietà globali e locali degli schemi, coomologia dei fasci, fasci coerenti. A seconda delle tempistiche e degli interessi dell'uditorio, si potrà anche trattare di differenziali, liscezza, fibrati lineari, divisori e cenni alla teoria delle curve algebriche e delle superfici algebriche.

Ci baseremo sostanzialmente sui capitoli II e III di [Har77] e sui capitoli 2-5 di [Liu02]. Altre possibili referenze possono essere i libri [EH00, GW20, Mum99].

La referenza rigorosa e fondazionale della teoria degli schemi, scritta dallo stesso Grothendieck (con l'aiuto di Jean Dieudonné), è la serie di volumi *Éléments de géométrie algébrique*, comunemente nota con la sigla EGA. Questi volumi delle Publications Mathématiques de l'IHÉS possono essere scaricati liberamente al `http://www.numdam.org/search/elements%20geometrie%20algebrique-%22Grothendieck,%20Alexander%22-qn/`. Un'altra referenza rigorosa e onnicomprensiva della teoria degli schemi (e di tante altre cose) è il blog collaborativo `https://stacks.math.columbia.edu` mantenuto da Aise Johan de Jong. Sconsiglio a chi si approccia per la prima volta alla teoria degli schemi di studiare EGA e Stacks Project, perché queste due opere enciclopediche non forniscono intuito geometrico né esempi. D'altra parte queste due opere sono molto utili a chi ha già esperienza e fa ricerca.

Infine, per un'introduzione alla teoria delle categorie consiglio i primissimi capitoli di [KS06, Mac71].

Perché la teoria degli schemi?

La teoria degli schemi è il linguaggio rigoroso con cui si studia e si fa la geometria algebrica oggi. Esso unifica la geometria algebrica classica (cioè lo studio delle varietà proiettive) e la teoria algebrica dei numeri. Alcuni vantaggi della teoria degli schemi sono: poter considerare funzioni nilpotenti, poter considerare la stessa varietà su campi diversi, poter considerare oggetti "aritmetici" (ovvero definiti su $\mathbb{Z}$ o sull'anello degli interi di un campo di numeri).

Oltre alle introduzioni che potete leggere nei libri che ho menzionato sopra, potete dare uno sguardo a questo articoletto scritto da David Mumford `https://www.dam.brown.edu/people/mumford/blog/2014/Grothendieck.html`.

Riferimenti bibliografici

[AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[EH00] David Eisenbud and Joe Harris. *The geometry of schemes*, volume 197 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 2000.

[Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.

[FFP16] Elisabetta Fortuna, Roberto Frigerio, and Rita Pardini. *Projective geometry*, volume 104 of *Unitext.* Springer, 2016. Solved problems and theory review.

[GW20] Ulrich Görtz and Torsten Wedhorn. *Algebraic geometry I. Schemes—with examples and exercises.* Springer Studium Mathematik—Master. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2020.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[KS06] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Categories and sheaves*, volume 332 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[Liu02] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics.* Oxford University Press, Oxford, 2002. Translated from the French by Reinie Erné, Oxford Science Publications.

[Mac71] Saunders MacLane. *Categories for the working mathematician.* Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971.

[Mat89] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1989. Translated from the Japanese by M. Reid.

[Mum99] David Mumford. *The red book of varieties and schemes*, volume 1358 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, expanded edition, 1999. Includes the Michigan lectures (1974) on curves and their Jacobians, With contributions by Enrico Arbarello.

[Rei88] Miles Reid. *Undergraduate algebraic geometry*, volume 12 of *London Mathematical Society Student Texts.* Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[Rei95] Miles Reid. *Undergraduate commutative algebra*, volume 29 of *London Mathematical Society Student Texts.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Ser00] Edoardo Sernesi. *Geometria 1.* Bollati Boringhieri, 2000.

[Sha13] Igor R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry. 1.* Springer, Heidelberg, third edition, 2013. Varieties in projective space.

[SKKT00] Karen E. Smith, Lauri Kahanpää, Pekka Kekäläinen, and William Traves. *An invitation to algebraic geometry.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2000.

Lezioni

(1) **20 Febbraio 2023.** Introduzione al corso: varietà algebriche "classiche" affini o proiettive, necessità di avere una definizione intrinseca di varietà algebrica che esula dall'avere un'immersione chiusa in uno spazio affine o proiettivo, usando l'analogia della definizione di varietà differenziabile "astratta" (cioè non immersa) in geometria differenziale. Alcuni vantaggi della teoria degli schemi: schemi non-ridotti, varietà su campi non algebricamente chiusi, oggetti geometrici definiti su $\mathbb{Z}$ (teoria algebrica dei numeri e geometria aritmetica).

Ricapitolazione di alcune nozioni di algebra commutativa. $\mathbb{Z}$ è l'oggetto iniziale nella categoria degli anelli. 0 è l'oggetto terminale nella categoria degli anelli. Moduli finiti. Definizione di algebra su un anello. Categoria delle A-algebre, dove A è un anello fissato. Algebre finite, di tipo finito, intere. Teorema: se A è un anello, allora una A-algebra è finita se e solo se è intera e di tipo finito (senza dimostrazione). Esempi: $A \twoheadrightarrow A/I$, $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$, estensioni di campi (finita sse finita come spazio vettoriale; intera sse algebrica; di tipo finito sse finita: questo è il contenuto del Nullstellensatz algebrico), $A \hookrightarrow A[x]$, $A \hookrightarrow A[x]/(x^2)$, $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}[\![x]\!]$.

Definizione di $\operatorname{Spec} A$ e della topologia di Zariski. Lemma: se I è un ideale di A allora $\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(I)} \mathfrak{p}$ (senza dimostrazione). Corrispondenza biunivoca tra i chiusi di $\operatorname{Spec} A$ e gli ideali radicali di A. Spec è un funtore dalla categoria degli anelli alla categoria degli spazi topologici.

(2) **23 Febbraio 2023.** Spettro massimale di un anello. Lo spettro di un campo è un punto.

La chiusura di un sottoinsieme $E \subseteq \operatorname{Spec} A$ in $\operatorname{Spec} A$ è $\mathrm{V}(\bigcap_{\mathfrak{p} \in E} \mathfrak{p})$ (lasciato per esercizio). La chiusura di $\{\mathfrak{p}\}$ è $\mathrm{V}(\mathfrak{p})$. Un punto in $\operatorname{Spec} A$ è chiuso se e solo se è un ideale massimale. $\operatorname{Spec} A$ è T1 se e solo se ogni ideale primo di A è massimale, cioè se A ha dimensione di Krull zero.

Uno spazio topologico finito è T1 se e solo se è discreto. Se A è un anello artiniano (cioè noetheriano e di dimensione 0) allora $\operatorname{Spec} A$ è finito e discreto.

In $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ i numeri primi corrispondono ai punti chiusi e lo zero è il punto denso. I punti chiusi di $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x]$ sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $\mathbb{C}$; secondo questa corrispondenza, per $f \in \mathbb{C}[x] \smallsetminus \{0\}$, $\mathrm{V}(f)$ corrisponde al luogo degli zeri di f. Interpretazione: se A è un anello, $f \in A$ "è una funzione", $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ "è un punto", allora $\mathfrak{p} \ni f$ se e solo se $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(f)$ se e solo se "la funzione f si annulla nel punto $\mathfrak{p}$".

Definizione di spazio topologico irriducibile. Uno spazio topologico è irriducibile se e solo se è non vuoto e l'intersezione di due aperti non vuoti è non vuota. La chiusura di un insieme irriducibile è irriducibile. Definizione di componenti irriducibili. Le componenti irriducibili sono chiuse.

Se A è un anello e $I \subseteq A$ è un ideale, allora $\mathrm{V}(I)$ è irriducibile se e solo se $\sqrt{I}$ è un ideale primo di A. Se A è un anello valgono le seguenti corrispondenze biunivoche: tra punti chiusi di $\operatorname{Spec} A$ e ideali massimali di A, tra chiusi irriducibili di $\operatorname{Spec} A$ e ideali primi di A, tra chiusi di $\operatorname{Spec} A$ e ideali radicali di A. Si può estendere questa corrispondenza a qualcosa di geometrico che corrisponda in modo biunivoco agli ideali di A?

Se $I \subseteq A$ è un ideale, allora la proiezione al quoziente $A \twoheadrightarrow A/I$ induce $\operatorname{Spec} A/I \hookrightarrow \operatorname{Spec} A$ che è un'immersione topologica chiusa sul chiuso $\mathrm{V}(I)$. Se I è un ideale contenuto nel nilradicale di A, allora la proiezione $A \twoheadrightarrow A/I$ induce un omeomorfismo $\operatorname{Spec} A/I \hookrightarrow \operatorname{Spec} A$.

Se $S \subseteq A$ è una parte moltiplicativa, allora l'omomorfismo di localizzazione $A \to S^{-1}A$ induce $\operatorname{Spec} S^{-1}A \to \operatorname{Spec} A$ che è un'immersione topologica sul sottospazio $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$. Caso speciale in cui S è data dalle potenze di un elemento $f \in A$; definizione di aperti principali. L'intersezione di un numero finito di aperti principali è un aperto principale. Gli aperti principali formano una base della topologia. Non tutti gli aperti sono principali, p.es. $\operatorname{Spec} k[x,y] \smallsetminus \mathrm{V}(x,y)$. Se A è un PID, allora ogni aperto di $\operatorname{Spec} A$ è principale.

Se A è un anello e $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, allora $\operatorname{Spec} A_{\mathfrak{p}}$ è omeomorfo al sottospazio $\{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}$ di $\operatorname{Spec} A$; questo sottospazio può essere né aperto né chiuso.

Definizione di spazio topologico quasi-compatto. Lo spettro di un anello è quasi-compatto.

Se A e B sono due anelli, gli ideali di $A \times B$ sono del tipo $I \times J$ per ideali $I \subseteq A$ e $J \subseteq B$. Inoltre $(A \times B)/(I \times J)$ è isomorfo a $A/I \times B/J$. Quando $A \times B$ è un dominio? Quando $I \times J$ è un ideale primo?

(3) **6 Marzo 2023.** Localizzare rispetto a una parte moltiplicativa e quozientare rispetto a un ideale commutano (senza dimostrazione). Definizione di campo residuo di un ideale primo in un anello. $\operatorname{Spec} A$ è irriducibile se e solo se c'è un unico primo minimale. Le componenti irriducibili di $\operatorname{Spec} A$ sono in corrispondenza biunivoca con i primi minimali di A.

Studio dei punti di $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x]$ ($\operatorname{Spec} \mathbb{R}[x]$, $\operatorname{Spec} \mathbb{Q}[x]$) e dei loro campi residui.

Richiami sulla dimensione di Krull di un anello. Definizione di altezza di un ideale primo. Se $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ allora $\dim A/\mathfrak{p} + \operatorname{ht}\mathfrak{p} \leq \dim A$.

Definizione di elementi algebricamente indipendenti in un'estensione di campi. Definizione di grado di trascendenza di un'estensione di campi. Se k è un campo, A è un dominio di tipo finito su k, allora $\dim A = \operatorname{tr.deg}(\operatorname{Frac}(A)/k)$ e $\dim A/\mathfrak{p} + \operatorname{ht}\mathfrak{p} = \dim A$ (senza dimostrazione). Interpretazione come dimensione e codimensione di una sottovarietà chiusa.

Teorema dell'ideale principale di Krull: se A è un anello noetheriano, $f_1, \ldots, f_r \in A$ e $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ è minimale tra i primi di A che contengono $f_1, \ldots, f_r$, allora $\operatorname{ht}\mathfrak{p} \leq r$ (senza dimostrazione).

Se A è un dominio normale noetheriano, allora A è un UFD se e solo se ogni primo di A di altezza 1 è principale (senza dimostrazione).

Studio dei primi di $k[x,y]$, quando k è un campo algebricamente chiuso: (0) è denso e ha campo residuo $k(x,y)$; i primi di altezza 1 sono principali generati da elementi irriducibili; il primo generato da x ha campo residuo $k(y)$; il primo generato da $y^2 - x^3$ ha campo residuo $k(\frac{y}{x})$; i primi di altezza 2 sono massimali, sono del tipo $(x - \lambda, y - \mu)$ per $\lambda, \mu \in k$ e hanno campo residuo k.

Definizione di prefascio di gruppi abeliani su uno spazio topologico. Esempi: prefascio delle funzioni a valori in un gruppo abeliano fissato, prefascio $\mathcal{C}_{X,\mathbb{C}}$ delle funzioni continue a valori complessi, prefascio $\mathcal{C}^*_{X,\mathbb{C}}$ delle funzioni continue a valori complessi mai nulle, prefascio delle funzioni continue e limitate a valori complessi.

Definizione di prefascio su uno spazio topologico a valori in una categoria arbitraria. Se $\pi \colon E \to X$ è una funzione continua suriettiva di spazi topologici, costruzione del prefascio $\mathcal{E}$ delle sezioni (continue) di π; è un prefascio di insiemi. Se $\pi \colon E = \mathbb{R} \to X = S^1$ è dato da $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, allora $\mathcal{E}(X) = \emptyset$ e $\mathcal{E}(U) \neq \emptyset$ per ogni aperto non-vuoto $U \subsetneq X$. Se $\mathrm{pr}_1 \colon E = X \times \mathbb{C} \to X$ è la prima proiezione, allora il prefascio $\mathcal{E}$ delle sezioni di pr_1 coincide con il prefascio $\mathcal{C}_{X,\mathbb{C}}$ delle funzioni continue da(gli aperti di) X a $\mathbb{C}$.

(4) **9 Marzo 2023.** Definizione di dominio normale. Un UFD è un dominio normale. Se k è un campo di caratteristica diversa da 2 allora $k[x,y,z]/(xy - z^2)$ è un dominio, è normale (senza dimostrazione), ma non è un UFD; inoltre il primo generato da x e da z non è principale. Se M è un A-modulo generato da n elementi e $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, allora $\dim_{\kappa(\mathfrak{p})} M \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) \leq n$.

Definizione di omomorfismo di prefasci. Definizione di prefascio separato. Definizione di fascio. Se P è un prefascio separato, allora $P(\emptyset) = 0$. Esempi: fascio costante, le funzioni continue a valori in $\mathbb{C}$ o in $\mathbb{R}$ formano un fascio, le funzioni continue limitate a valori in $\mathbb{C}$ o in $\mathbb{R}$ formano un prefascio separato che in generale non è un fascio, fasci su uno spazio topologico discreto costituito da 2 punti. Relazione tra $F(U \cup V)$, $F(U)$, $F(V)$ e $F(U \cap V)$ quando F è un fascio e U, V sono aperti.

Se $X \subseteq \mathbb{C}$ è un aperto, definizione dell'omomorfismo esponenziale $\exp \colon \mathcal{C}_{X,\mathbb{C}} \to \mathcal{C}^*_{X,\mathbb{C}}$ dato da $f \mapsto \mathrm{e}^f$; il suo nucleo è isomorfo al fascio costante $\mathbb{Z}_X$. Richiamo sulla proprietà dei sollevamenti di applicazioni continue rispetto a un rivestimento. Se $U \subseteq X$ è un aperto connesso, allora una funzione continua $g \colon U \to \mathbb{C}^*$ sta nell'immagine di $\exp_U \colon \mathcal{C}_{X,\mathbb{C}}(U) \to \mathcal{C}^*_{X,\mathbb{C}}(U)$ se e solo se $\pi_1(g) = 0$.

(5) **13 Marzo 2023.** Gli aperti di $\operatorname{Spec} \mathbb{R}[x,y]$ dati dai complementari di $\mathrm{V}(x,y)$ e di $\mathrm{V}(x^2 + y^2)$ hanno gli stessi punti $\mathbb{R}$-razionali (cioè gli stessi punti con campo residuo $\mathbb{R}$), ma sono diversi: per esempio si consideri

l'ideale massimale $(x-1, y^2+1)$ che ha campo residuo $\mathbb{C}$.

Definizioni di germi e spighe di un prefascio. La spiga è un gruppo abeliano. La spiga del fascio delle funzioni C^∞ a valori in $\mathbb{R}$ su una varietà C^∞ è un anello locale (senza dimostrazione).

Una sezione di un prefascio è tale che i germi indotti da lei sono nulli se e solo se è localmente nulla; ovvero è nulla se si tratta di un fascio.

Un omomorfismo di prefasci induce un omomorfismo tra le spighe.

Definizione di fascificazione di un prefascio. La fascificazione di un prefascio è un fascio. Gli elementi del nucleo dell'omomorfismo da un prefascio P alla sua fascificazione sono esattamente le sezioni di P localmente nulle. Ogni sezione della fascificazione di un prefascio P proviene localmente da sezioni locali di P. Le spighe della fascificazione di un prefascio P sono esattamente le spighe di P. P è un prefascio separato se e solo se l'omomorfismo da P alla fascificazione è iniettivo. P è un fascio se e solo se l'omomorfismo da P alla fascificazione è bigettivo. Proprietà universale della fascificazione. La fascificazione è un funtore dalla categoria dei prefasci alla categoria dei fasci.

Definizione di nucleo di un omomorfismo di fasci. Il nucleo di un omomorfismo di fasci è un fascio (senza dimostrazione). Definizione del prefascio immagine di un omomorfismo di fasci. Definizione del fascio immagine di un omomorfismo di fasci come fascificazione del prefascio immagine. Se $\phi\colon F \to G$ è un omomorfismo di fasci, allora una sezione di G sta nell'immagine di ϕ se e solo se proviene locamente da sezioni locali di F.

Definizione di un omomorfismo iniettivo/suriettivo/bigettivo di fasci. Un omomorfismo $\varphi\colon F \to G$ di fasci è suriettivo se e solo se ogni sezione di G proviene localmente da sezioni di F. Caratterizzazione dell'iniettività/suriettività/biettività di un omomorfismo di fasci in termini degli omomorfismi indotti sulle spighe.

Definizione di complesso di fasci. Definizione di successione esatta di fasci. Caratterizzazioni in termini delle spighe.

Se $0 \to F' \to F \to F''$ è una successione esatta di fasci su uno spazio topologico X, allora $0 \to F'(X) \to F(X) \to F''(X)$ è una successione esatta di gruppi abeliani (lasciato come esercizio).

Se $X \subseteq \mathbb{C}$ è un aperto, definizione dell'omomorfismo esponenziale $\exp\colon \mathcal{C}_{X,\mathbb{C}} \to \mathcal{C}^*_{X,\mathbb{C}}$. Possono esistere aperti $U \subseteq X$ tali che $\exp_U\colon \mathcal{C}_{X,\mathbb{C}}(U) \to \mathcal{C}^*_{X,\mathbb{C}}(U)$ non è suriettivo (per esempio se $X = U = \mathbb{C}^*$ e collegamenti con l'esistenza del logaritmo complesso). Se U è semplicamente connesso allora $\exp_U\colon \mathcal{C}_{X,\mathbb{C}}(U) \to \mathcal{C}^*_{X,\mathbb{C}}(U)$ è suriettivo. L'omomorfismo esponenziale $\exp\colon \mathcal{C}_{X,\mathbb{C}} \to \mathcal{C}^*_{X,\mathbb{C}}$ è un omomorfismo suriettivo di fasci: si considerino le palle.

(6) **14 Marzo 2023.** Definizione del primo gruppo di coomologia singolare di uno spazio topologico X connesso per archi a coefficienti in un gruppo abeliano G, cioè di $\mathrm{H}^1(X, G)$, come il gruppo abeliano degli omomorfismi di gruppi dal gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$ a G.

Se X è una varietà topologica connessa per archi (basta in realtà che X sia uno spazio topologico connesso per archi in cui ogni punto abbia un sistema fondamentale di intorni aperti semplicemente connessi), allora la sequenza esponenziale $0 \to \mathbb{Z}_X \to \mathcal{C}_{X,\mathbb{C}} \to \mathcal{C}^*_{X,\mathbb{C}} \to 0$ è esatta. Inoltre induce una sequenza esatta $0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{C}_{X,\mathbb{C}}(X) \to \mathcal{C}^*_{X,\mathbb{C}} \to \mathrm{H}^1(X,\mathbb{Z})$, dove l'ultimo omomorfismo associa a una funzione continua $g\colon X \to \mathbb{C}^*$ l'omomorfismo $\pi_1(X, x_0) \to \mathbb{Z}$ dato da $\gamma \mapsto W(g \circ \gamma, 0)$, dove $W(g \circ \gamma, 0) \in \mathbb{Z}$ è l'indice di avvolgimento del laccio $g \circ \gamma$ intorno a 0. Breve anticipazione al fatto che questa successione esatta si allunga all'infinito con la coomologia dei fasci (sheaf cohomology).

Se X è un aperto conneso di $\mathbb{C}$ (basta in realtà che X sia una complex manifold) e se $\mathcal{O}_X$ (resp. $\mathcal{O}^*_X$) è il fascio delle funzioni olomorfe (mai nulle), allora si ha una sequenza esatta $0 \to \mathbb{Z}_X \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}^*_X \to 0$; essa induce una sequenza esatta $0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(X)^* \to \mathrm{H}^1(X,\mathbb{Z})$, dove l'ultimo omomorfismo associa a una funzione olomorfa $g\colon X \to \mathbb{C}^*$ l'omomorfismo $\pi_1(X, x_0) \to \mathbb{Z}$ dato da $\gamma \mapsto W(g \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} \mathrm{d}z$.

Breve cenno al legame tra la prima coomologia di de Rham di una varietà C^∞ e il primo gruppo di coomologia a coefficienti in $\mathbb{R}$: se X è una smooth manifold, allora integrare lungo i cammini chiusi dà un omomorfismo iniettivo $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(X) \hookrightarrow \mathrm{H}^1(X,\mathbb{R})$. In realtà è un isomorfismo ed è valido per p-forme e p-cicli per ogni p (senza dimostrazione).

Richiamo sugli aperti principali di $\operatorname{Spec} A$. Una collezione di elementi $\{f_i\}_i$ di A è tale che la famiglia di aperti principali $\{X_{f_i}\}_i$ è un ricoprimento di $X = \operatorname{Spec} A$ se e solo se $\sum_i A f_i = A$. Costruzione del fascio $\tilde{M}$ su $X = \operatorname{Spec} A$ associato a un A-modulo M: definizione per ogni aperto U di X, dimostrazione della proprietà di prefascio, omessa la dimostrazione che si tratta di un fascio. Enunciato (senza dimostrazione) il teorema che calcola le spighe del fascio $\tilde{M}$ e il gruppo delle sezioni del fascio $\tilde{M}$ su un aperto principale. Il fascio indotto su $\operatorname{Spec} A_f$ dall'A_f-modulo M_f coincide con la restrizione di $\tilde{M}$ all'aperto principale X_f.

(7) **16 Marzo 2023.** Dimostrazione del fatto che l'insieme delle sezioni globali del fascio $\tilde{M}$ su $\operatorname{Spec} A$ coincide con M. Gli omomorfismi di restrizione del fascio $\tilde{M}$ tra due aperti principali sono esattamente gli omomorfismi dell'esercizio 1.5. Se A è un anello e $X = \operatorname{Spec} A$, allora la fascificazione di un modulo dà un funtore additivo e esatto dalla categoria degli A-moduli alla categoria dei fasci di gruppi abeliani su X. Interpretazione delle

proprietà locali in algebra commutativa (Proposizioni 3.8 e 3.9 nell'Atiyah–Macdonald) mediante spighe di fasci. Supporto di un modulo e supporto di un fascio. Il supporto di A/I coincide con $\mathrm{V}(I)$.

Esempi: i fasci associati a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ su $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ (calcolo delle spighe e calcolo delle sezioni su alcuni aperti principali); il fascio associato a $k[x]$ su $\operatorname{Spec} k[x]$ (calcolo delle spighe e calcolo delle sezioni su alcuni aperti principali). Alcune interpretazioni geometriche dell'Esercizio 1.5.

La Proposizione 1.11(ii) diventa falsa se si considera un numero infinito di ideali. Se S è una parte moltiplicativa di A e S contiene un elemento nilpotente, allora $S^{-1}A = 0$. Soluzione dell'esercizio 1.4(3).

(8) **20 Marzo 2023.** Richiami di geometria algebrica "classica". Definizione del luogo di zeri di un insieme di polinomi. Proprietà dei chiusi algebrici in k^n. Topologia di Zariski su k^n. La topologia di Zariski su k^n è T1.

L'ideale dei polinomi che si annullano su un sottoinsieme di k^n e sue proprietà. Se $T \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ allora $I(Z(T)) \supseteq \sqrt{(T)}$. Se $S \subseteq k^n$ allora $Z(I(S))$ è la chiusura di S in k^n (senza dimostrazione).

Nullstellensatz "algebrico": se $E \supseteq k$ è un'estensione di campi tali che E è una k-algebra di tipo finito, allora E è un'estensione finita di k (senza dimostrazione). Corollario: se $E \supseteq k$ è un'estensione di campi tali che E è una k-algebra di tipo finito e k è algebricamente chiuso, allora $E = k$.

Nullstellensatz "geometrico": sono equivalenti 1) k è algebricamente chiuso, 2) ogni ideale massimale di $k[x_1, \dots, x_n]$ è del tipo $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$, 3) Nullstellensatz debole, 4) Nullstellensatz forte, cioè $I(V(J) = \sqrt{J}$.

Se $S \subseteq k^n$ è un chiuso, allora S è irriducibile se e solo se $I(S)$ è un ideale primo (senza dimostrazione).

Se k è algebricamente chiuso, corrispondenza biunivoca tra sottoinsiemi chiusi/sottoinsiemi chiusi irriducibili/punti di k^n e ideali radicali/primi/massimali di $k[x_1, \dots, x_n]$.

Definizione di applicazione polinomiale tra chiusi affini. Definizione di funzione regolare su un chiuso affine. Anello delle funzioni regolari su un chiuso affine; è una k-algebra di tipo finito e ridotta.

Nullstellensatz "relativo": se X è un chiuso affine e k è algebricamente chiuso, allora corrispondenza tra sottoinsiemi chiusi/sottoinsiemi chiusi irriducibili/punti di X e ideali radicali/primi/massimali di $k[X]$.

Equivalenza di categorie tra chiusi affini su k e k-algebre di tipo finito e ridotte.

(9) **23 Marzo 2023.** Restrizione di un fascio a un aperto. Push-forward di un fascio tramite un'applicazione continua. Relazione tra le spighe di un fascio e le spighe del push-forward.

Definizione di omomorfismo locale tra anelli locali. Non tutti gli omomorfismi tra anelli locali sono locali.

Definizione di spazio anellato e di spazio localmente anellato. Definizione di campo residuo in un punto di uno spazio localmente anellato. Esempi: 1) spazio topologico con fascio delle funzioni continue a valori in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$ con dimostrazione che le spighe sono anelli locali; 2) varietà differenziabile (cioè smooth manifold) con fascio delle funzioni C^∞ a valori in $\mathbb{R}$; 3) varietà complessa (cioè complex manifold) con fascio delle funzioni olomorfe; 4) spazio topologico X con fascio costante di anelli R_X, dove R è un anello fissato; 5) spettro $\operatorname{Spec} A$ di un anello A con il fascio di struttura $\tilde{A}$.

Se A un anello e $f \in A$, allora f si annulla in tutti i punti di $\operatorname{Spec} A$ (cioè $f(\mathfrak{p}) = 0$ in $\kappa(\mathfrak{p})$ per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$) se e solo se f è nilpotente in A. Quindi possono esistere "funzioni" non nulle che si annullano in tutti i punti. Se A è un anello e $\mathcal{N}(A)$ è il nilradicale di A, allora la proiezione al quoziente $A \twoheadrightarrow A/\mathcal{N}(A)$ induce un omeomorfismo tra $\operatorname{Spec} A/\mathcal{N}(A)$ e $\operatorname{Spec} A$, ma i fasci di struttura sono in generale diversi.

Definizione di morfismo di spazi anellati e definizione di morfismo di spazi localmente anellati. Se $f\colon X \to Y$ è una funzione continua e $\mathcal{C}_X$ (risp. $\mathcal{C}_Y$) è il fascio su X (risp. Y) delle funzioni continue a valori in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$, costruzione di un omomorfismo di fasci di anelli $f^\#\colon \mathcal{C}_Y \to f_*\mathcal{C}_X$ tale che la coppia $(f, f^\#)$ è un morfismo di spazi localmente anellati da $(X, \mathcal{C}_X)$ a $(Y, \mathcal{C}_Y)$.

Se $\varphi\colon A \to B$ è un omomorfismo di anelli, si hanno i) una funzione continua $f\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ data dal contrarre lungo φ, ii) costruzione degli omomorfismi di anelli $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{q}$ dove $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ e $\mathfrak{p} = f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in \operatorname{Spec} A$ tali che la composizione $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{q}$ è locale, iii) costruzione di un omomorfismo di fasci di anelli $f^\#\colon \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} = \tilde{A} \to f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}$ tale che $(f, f^\#)$ è un morfismo di spazi localmente anellati da $(\operatorname{Spec} B, \tilde{B})$ a $(\operatorname{Spec} A, \tilde{A})$.

(10) **27 Marzo 2023.** Un omomorfismo locale tra anelli locali induce un'estensione di campi tra i campi residui. Se $\varphi\colon A \to B$ è un omomorfismo di anelli, $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ e $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, allora si ha un omomorfismo locale $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{q}$ e un omomorfismo di campi $\kappa(\mathfrak{p}) \hookrightarrow \kappa(\mathfrak{q})$.

Composizione di due morfismi di spazi (localmente) anellati. Gli spazi (localmente) anellati formano una categoria.

Se A e B sono anelli, corrispondenza biunivoca tra gli omomorfismi di anelli $A \to B$ e i morfismi di spazi localmente anellati $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$.

Definizione di schema affine. Definizione di schema. Un aperto di uno schema è uno schema. Definizione di sottoschema aperto. I sottoschemi aperti affini di uno schema formano una base per la topologia.

Definizione di morfismo di schemi. Categoria degli schemi.

Se X e Y sono schemi affini, corrispondenza biunivoca tra i morfismi di schemi $X \to Y$ e gli omomorfismi di anelli $\mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$. La categoria degli schemi affini è equivalente all'opposto della categoria degli anelli.

Costruzione di morfismi di schemi: se X e Y sono schemi, $\{U_i\}_i$ è un ricoprimento aperto affine di X e per ogni i, j sia $\{V_{ijk}\}_k$ un ricoprimento aperto affine di $U_i \cap U_j$, allora dare un morfismo di schemi $X \to Y$ equivale a dare una collezione di morfismi di schemi $f_i \colon U_i \to Y$ tali che per ogni i, j, k le restrizioni di f_i e di f_j coincidono su V_{ijk}. Se in aggiunta Y è affine, allora dare un morfismo di schemi $X \to Y$ equivale a dare una collezione di omomorfismi di anelli $\varphi_i \colon \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(U_i)$ tali che per ogni i, j, k $\rho^{\mathcal{O}_X}_{U_i, V_{ijk}} \circ \varphi_i = \rho^{\mathcal{O}_X}_{U_j, V_{ijk}} \circ \varphi_j$.

Se X è uno schema e Y è uno schema affine, corrispondenza biunivoca tra i morfismi di schemi $X \to Y$ e gli omomorfismi di anelli $\mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$.

Incollamento di schemi lungo sottoschemi aperti (enunciato, senza dimostrazione).

Definizione dello spazio affine $\mathbb{A}^n_A$ di dimensione relativa n sull'anello A.

Esempio: incollamento di due copie di $\mathbb{A}^1_A$ lungo il complementare dell'origine tramite l'identità; immagine geometrica della retta con due origini. Questo incollamento X non è affine perché la restrizione del fascio di struttura da X a ciascuno dei due aperti che abbiamo incollato è un isomorfismo.

(11) **30 Marzo 2023.** Definizione di immersione aperta/chiusa di schemi. Definizione di sottoschema chiuso. Il sottoschema chiuso di $\operatorname{Spec} A$ dato da un ideale di A. Esempio dei sottoschemi chiusi di $\mathbb{A}^2_k$ dati dagli ideali (x), (x^2, xy) e (x^2): essi danno tre schemi distinti con lo stesso spazio topologico soggiacente. Corrispondenza biunivoca tra sottoschemi chiusi di $\operatorname{Spec} A$ e ideali di A (senza dimostrazione).

Se $X \subseteq k^n$ è un chiuso affine 'classico' su un campo algebricamente chiuso k e $\mathcal{O}^{\mathrm{reg}}_X$ è il fascio delle funzioni regolari su X, costruzione del morfismo di spazi anellati $(i, i^\#) \colon (X, \mathcal{O}^{\mathrm{reg}}_X) \to (\operatorname{Spec} k[X], k[X]^\sim)$ tale che i è l'immersione topologica sull'insieme dei punti chiusi.

Definizione di schema quasi-compatto, connesso, irriducibile, integro. Uno schema è ridotto (cioè le sezioni su ciascun aperto formano un anello ridotto) se e solo se questo vale per gli elementi di un ricoprimento aperto affine se e solo se tutte le spighe del fascio di struttura sono ridotte.

Uno schema ridotto e irriducibile è integro.

Uno schema è quasi-compatto se e solo se è unione finita di schemi affini.

(12) **3 Aprile 2023.** Uno spazio topologico è irriducibile se e solo se è non vuoto e ogni suo aperto è connesso. Uno schema integro è ridotto e irriducibile. Uno schema integro si dice normale se le spighe del fascio di struttura sono domini normali.

Se $\mathcal{C}$ è una categoria e S è un oggetto, costruzione della categoria $\mathcal{C}/S$ (i cui oggetti sono le frecce di $\mathcal{C}$ con target S) e della categoria $S\backslash\mathcal{C}$ (i cui oggetti sono le frecce di $\mathcal{C}$ con source S). Esempio della categoria delle A-algebre, dove A è un anello fissato. Costruzione del funtore $\mathcal{C}/S \to \mathcal{C}$ (risp. $S\backslash\mathcal{C} \to \mathcal{C}$) che è un'equivalenza se S è un oggetto terminale (risp. iniziale) di $\mathcal{C}$. Se $S \to S'$ è una freccia in $\mathcal{C}$, costruzione del funtore $\mathcal{C}/S \to \mathcal{C}/S'$.

Definizione di S-schema o di schema su S, dove S è uno schema. $(\mathrm{Sch}\,/S)$ categoria degli S-schemi. Se R è un anello, un R-schema è uno schema su $\operatorname{Spec} R$. Se R è un anello, la categoria degli R-schemi affini è quivalente all'opposto della categoria delle R-algebre.

Definizione di schema localmente noetheriano. Essere localmente noetheriano è una condizione locale. Se X è uno schema localmente noetheriano e $U \subseteq X$ è un aperto affine, allora $\mathcal{O}_X(U)$ è un anello noetheriano. Se A è un anello, allora $\operatorname{Spec} A$ è uno schema localmente noetheriano se e solo se A è un anello noetheriano. Uno schema si dice noetheriano se è localmente noetheriano e quasi-compatto. Uno schema X è noetheriano se e solo se è unione finita di aperti affini $U_1, \ldots, U_n$ tali che $\mathcal{O}_X(U_i)$ è un anello noetheriano per ogni i. L'unione disgiunta di una famiglia infinita di schemi affini non-vuoti è uno schema non quasi-compatto; l'unione disgiunta di una famiglia di schemi affini noetheriani è uno schema localmente noetheriano. Se k è un campo e I è un insieme infinito, allora l'unione disgiunta di copie di $\operatorname{Spec} k$ indicizzate da I è uno schema localmente noetheriano e non quasi-compatto, mentre lo spettro di $\prod_{i \in I} k$ è uno schema affine (quindi quasi-compatto) e non localmente noetheriano (perché $\prod_{i \in I} k$ non è un anello noetheriano).

Uno spazio topologico si dice noetheriano se vale una delle seguenti condizioni equivalenti: soddisfa d.c.c. sui sottoinsiemi chiusi, soddisfa a.c.c. sui sottoinsiemi aperti, ogni famiglia non vuota di aperti ha elementi massimali, ogni aperto è quasi-compatto, ogni sottospazio è quasi-compatto. Unione finita di spazi topologici noetheriani è uno spazio topologico noetheriano. Se A è un anello noetheriano allora $\operatorname{Spec} A$ è uno spazio topologico noetheriano. Se k è un campo, allora $A = k[x_1, x_2, \ldots]/(x_1^2, x_2^2, \ldots)$ non è un anello noetheriano, ma A è locale di dimensione 0, quindi $\operatorname{Spec} A$ non è uno schema noetheriano, ma è uno spazio topologico noetheriano. Lo spazio topologico soggiacente di uno schema noetheriano è noetheriano.

Uno spazio topologico noetheriano ha un numero finito di componenti irriducibili (senza dimostrazione). In un anello noetheriano ci sono un numero finito di primi minimali.

Definizione di specializzazione tra due punti di uno spazio topologico. Definizione di punto generico di uno spazio topologico. Se A è un anello, allora $\mathfrak{p}$ è una specializzazione di $\mathfrak{q}$ in $\operatorname{Spec} A$ se e solo se $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{q}$. Se A è un anello, allora $\mathfrak{p}$ è un punto generico di $\operatorname{Spec} A$ se e solo se $\mathfrak{p}$ è un primo minimale.

Se X è uno schema, corrispondenza biunivoca tra punti generici di X e componenti irriducibili di X (senza dimostrazione).

(13) **4 Aprile 2023.** Se X è uno schema integro, la spiga di $\mathcal{O}_X$ nel punto generico è un campo e si chiama campo delle funzioni razionali. Esso è il campo delle frazioni di qualsiasi aperto affine non vuoto.

Definizione di dimensione di Krull di uno spazio topologico. La dimensione di Krull dello spettro primo di un anello coincide con la dimensione di Krull. Comportamento della dimensione di Krull rispetto ai sottospazi, rispetto ai chiusi irriducibili e rispetto a un ricoprimento aperto (senza dimostrazione). Definizione di codimensione di un chiuso irriducibile di uno spazio topologico. Nel caso dello spettro di un anello la codimensione è l'altezza.

Disuguaglianza $\dim X \geq \dim Y + \operatorname{codim}(Y, X)$, se Y è un chiuso irriducibile. Esempio in cui X è riducibile e vale la disuguaglianza stretta (basta scegliere Y contenuto in una componente irriducibile di dimensione strettamente minore della dimensione di X). Esempio in cui X è irriducibile e vale la disuguaglianza stretta: k campo, $R = k[\![t]\!][x]$, $\mathfrak{p} = (tx - 1) \in \operatorname{Spec} R$.

Definizione di dominio a valutazione discreta (DVR) come di un PID locale che non è un campo. Esempi: $k[t]_{(t)}$, $k[\![t]\!]$, $\mathbb{Z}_{(p)}$, $\mathbb{Z}_p$.

Definizione di dimensione di immersione di un anello locale noetheriano. Definizione di anello locale noetheriano. Definizione di schema localmente noetheriano regolare. Enunciato del teorema di Auslander–Buchsbaum: un anello locale noetheriano regolare è un dominio a fattorizzazione unica (UFD). Significato geometrico del teorema di Auslander–Buchsbaum: per un punto regolare passa un'unica componente irriducibile, ogni chiuso di codimensione 1 è localmente il luogo di zeri di una funzione.

Definizione di prodotti e coprodotti in una categoria. Esempi: insiemi, spazi topologici, gruppi, gruppi abeliani, moduli su un anello.

Definizione di prodotti fibrati (pull-back) e di push-out di due oggetti in una categoria. Esempi: insiemi, spazi topologici. Cenno al fatto che nella categoria delle manifold C^∞ i prodotti fibrati non esistono sempre; definizione di trasversalità tra due submanifold chiuse.

Richiamo sui prodotti tensoriali tra due moduli su un anello. Estensione degli scalari: prodotto tensoriale tra un algebra e un modulo. Costruzione della moltiplicazione sul prodotto tensoriale tra due algebre.

(14) **13 Aprile 2023.** Il prodotto tensoriale di due algebre su un anello R è il coprodotto nella categoria delle R-algebre. Esempi di prodotti tensoriali tra algebre: algebre polinomiali, algebre quozienti, anelli di frazioni, algebre di serie di potenze. $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ è isomorfo come anello a $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Il campo residuo di un primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ è il prodotto tensore tra $A/\mathfrak{p}$ e $A_{\mathfrak{p}}$ su A.

Se S è un insieme (risp. uno spazio topologico) e X e Y sono dei sottoinsiemi (risp. sottospazi) di S, allora il prodotto fibrato $X \times_S Y$ esiste nella categoria degli insiemi (risp. spazi topologici) e coincide con l'intersezione $X \cap Y$ (munita della topologia di sottospazio di S).

La categoria degli schemi ha i prodotti fibrati: con dimostrazione.

Se R è un anello e I, J sono ideali di R, allora $\operatorname{Spec} R/(I + J)$ è il prodotto fibrato di $\operatorname{Spec} R/I$ e $\operatorname{Spec} R/J$ su $\operatorname{Spec} R$; intuizione geometrica: $\mathrm{V}(I + J) = \mathrm{V}(I) \cap \mathrm{V}(J)$. Il prodotto fibrato tra la parabola $\operatorname{Spec} k[x, y]/(y - x^2)$ e l'asse x $\operatorname{Spec} k[x, y]/(x)$ sullo spazio affine $\mathbb{A}^2_k$ è uno schema non ridotto.

Definizione della molteplicità di intersezione di due curve C e D (senza componenti in comune) in $\mathbb{A}^2_k$ in un punto, come dimensione dello spazio vettoriale dato dalla spiga del fascio di struttura del prodotto fibrato $C \times_{\mathbb{A}^2_k} D$.

(15) **17 Aprile 2023.** Definizione di fibra (schematica). Lo spazio topologico soggiacente della fibra (schematica) è la fibra: dimostrazione data solo nel caso di morfismo tra schemi affini. Lo spazio topologico soggiacente di un prodotto fibrato di schemi può essere diverso dal prodotto fibrato (nella categoria degli spazi topologici) degli spazi topologici soggiacenti: $\operatorname{Spec} \mathbb{C} \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{R}} \operatorname{Spec} \mathbb{C}$.

Calcolo esplicito di tutte le fibre del morfismo di k-schemi $\mathbb{A}^1_k \to \mathbb{A}^1_k$ corrispondente all'inclusione di k-algebre $k[t] \to k[x]$ data da $t \mapsto x^2$. Spiegazione schematica del punto con molteplicità 2.

Calcolo esplicito di tutte le fibre del morfismo di schemi $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[i] \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$; collegamenti con la teoria algebrica dei numeri.

Commenti sull'Esercizio 2.3(1). La spiga $\mathcal{O}_{z_0}$ del fascio delle funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$ si inietta, tramite lo sviluppo di Taylor, nell'algebra $\mathbb{C}[\![T]\!]$ delle serie formali in una variabile; l'immagine coincide con le serie formali con raggio di convergenza positivo. Se $0 < r \leq +\infty$ e $z_0 \in \mathbb{C}$, $\mathcal{O}(B(z_0, r))$ coincide con le serie formali con raggio di convergenza $\geq r$.

Commenti sull'Esercizio 2.3(2). Lo sviluppo in serie di Taylor dà un omomorfismo di $\mathbb{R}$-algebre dalla spiga $\mathcal{C}^\infty_{x_0}$ del fascio delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$ su $\mathbb{R}$ all'algebra $\mathbb{R}[\![T]\!]$ delle serie formali in una variabile; questo omomorfismo è non iniettivo e suriettivo (Teorema di Borel, enunciato senza dimostrazione).

Soluzione dell'Esercizio 2.2(4): se k è un campo, $X = \mathbb{A}^2_k$, $U = X \smallsetminus \mathrm{V}(x, y)$, allora la restrizione $\mathcal{O}_X(X) \to$

$\mathcal{O}_X(U)$ è un isomorfismo.

Definizione di anello graduato rispetto a un monoide commutativo. Esempio della $\mathbb{N}$-graduazione standard sull'algebra dei polinomi. Esempio della graduazione piú fine sull'algebra dei polinomi, in modo tale che gli unici polinomi omogenei sono i monomi.

Definizione di modulo graduato. Definizione di uno shift di una graduazione di un modulo: se A è un anello $\mathbb{Z}$-graduato, M è un A-modulo $\mathbb{Z}$-graduato, $d \in \mathbb{Z}$, allora $M(d)$ è l'A-modulo M con graduazione data da $M(d)_i = M_{i+d}$.

Definizioni di ideale omogeneo. Un ideale I di un anello graduato è omogeneo se e solo se è generato da elementi omogenei se e solo se le componenti omogenee di ciascun elemento di I stanno in I. Definizione di omogeneizzazione di un ideale. L'omogeneizzazione di un ideale I è il piú grande ideale omogeneo contenuto in I.

(16) **20 Aprile 2023.** Se M è un A-modulo finito, allora il supporto del fascio $\tilde{M}$ è chiuso in $\operatorname{Spec} A$ e coincide con $\mathrm{V}(\operatorname{ann}_A M)$. Il supporto dello $\mathbb{Z}$-modulo $\oplus_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ coincide con lo spettro massimale di $\mathbb{Z}$, quindi non è chiuso.

Definizione di Proj di un anello $\mathbb{N}$-graduato. Topologia di Zariski sul Proj. Definizione di aperti principali nel Proj. La omogeneizzazione di un ideale primo è un ideale primo. Condizione necessaria e sufficiente per il contenimento tra due chiusi del Proj. Il Proj è vuoto se e solo se ogni elemento omogeneo di grado positivo è nilpotente.

Localizzazioni omogenee: se A è un anello $\mathbb{N}$-graduato, $S \subseteq A$ è una parte moltiplicativa costuita da elementi omogenei e M è un A-modulo $\mathbb{Z}$-graduato, allora $S^{-1}A$ è un anello $\mathbb{Z}$-graduato e $S^{-1}M$ è un $S^{-1}A$-modulo $\mathbb{Z}$-graduato. Se f è un elemento omogeneo di grado positivo, allora A_f è un anello $\mathbb{Z}$-graduato e $A_{(f)}$ denota la sua parte di grado zero. Esempio: se R è un anello e $A = R[x_0, \dots, x_n]$ è la R-algebra polinomiale con graduazione standard, allora la localizzazione omogenea $A_{(x_0)}$ è la R-algebra polinomiale nelle variabili $x_1/x_0, \dots, x_n/x_0$. Se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo omogeneo, $A_{(\mathfrak{p})}$ è la parte di grado zero dell'anello delle frazioni ottenuto invertendo gli elementi omogenei in $A \smallsetminus \mathfrak{p}$.

Costruzione del fascio $\tilde{M}$ su $\operatorname{Proj} A$, se A è un anello $\mathbb{N}$-graduato e M è un A-modulo $\mathbb{Z}$-graduato. Alcune proprietà di questo fascio: sezioni sugli aperti principali e spighe (senza dimostrazione).

Fascio di struttura sul Proj. Il Proj col suo fascio di struttura è uno schema. Gli aperti principali $D_+(f)$ sono affini e sono isomorfi allo spettro della localizzazione omogenea $A_{(f)}$ (senza dimostrazione).

Definizione dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n_R$ su R di dimensione relativa n. Carte affini standard di $\mathbb{P}^n_R$. Definizione di spazio proiettivo pesato.

Un omomorfismo suriettivo $\varphi\colon A \to B$ di anelli $\mathbb{N}$-graduati induce un'immersione chiusa $\operatorname{Proj} B \to \operatorname{Proj} A$ di schemi sul chiuso $V_+(\ker \varphi)$. Esempio: sottoschemi chiusi di $\mathbb{P}^n_k$.

(17) **24 Aprile 2023.** Se A è un anello $\mathbb{N}$-graduato, allora 1 è omogeneo di grado zero. Se I e J sono ideali omogenei in un anello A $\mathbb{N}$-graduato, allora i sottoinsiemi chiusi $V_+(I)$ e $V_+(J)$ di $\operatorname{Proj} A$ coincidono se e solo se $I \cap A_+ \subseteq \sqrt{J}$ e $J \cap A_+ \subseteq \sqrt{I}$.

In $\mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n]$ con graduazione standard, gli ideali (2) e $(2x_0, \dots, 2x_n)$ sono ideali radicali diversi, ma definiscono lo stesso sottoinsieme chiuso di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$. Se A è un anello $\mathbb{N}$-graduato con A_0 campo, allora ogni ideale omogeneo diverso da $A = (1)$ è contenuto in A_+. Se A è un anello $\mathbb{N}$-graduato con A_0 campo e I e J sono ideali omogenei diversi da A, allora i sottoinsiemi chiusi $V_+(I)$ e $V_+(J)$ di $\operatorname{Proj} A$ coincidono se e solo se $\sqrt{I} = \sqrt{J}$. Se A è un anello $\mathbb{N}$-graduato con A_0 campo, corrispondenza biunivoca tra sottoinsiemi chiusi di $\operatorname{Proj} A$ e ideali omogenei radicali di A diversi da A.

Definizione di colon ideal e dell'ideale $(I : x^\infty)$, quando I è un ideale in un anello e x è un elemento dell'anello.

Definizione di saturazione di un ideale omogeneo in $S = R[x_0, \dots, x_n]$ con graduazione standard. Quando due ideali omogenei di S danno lo stesso sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^n_R$? Se I e J sono ideali omogenei di S, allora $U_0 \cap \operatorname{Proj} S/J$ è un sottoschema chiuso di $U_0 \cap \operatorname{Proj} S/I$ se e solo se $I \subseteq (J : x_0^\infty)$. Se I e J sono ideali omogenei di S, allora $\operatorname{Proj} S/J$ è un sottoschema chiuso di $\operatorname{Proj} S/I$ se e solo se I è contenuto nella saturazione di J. Se I e J sono ideali omogenei di S, allora $\operatorname{Proj} S/J$ e $\operatorname{Proj} S/I$ sono lo stesso sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^n_R$ se e solo se I e J hanno la stessa saturazione. Corrispondenza biunivoca tra ideali omogenei saturi di S e sottoschemi chiusi di $\mathbb{P}^n_R$ (la suriettività non è stata dimostrata).

Sottoanello di Veronese $A^{(d)}$ di indice di d di un anello $\mathbb{N}$-graduato. Il Proj di un sottoanello di Veronese è isomorfo al Proj dell'anello originario. Il sottoanello di Veronese di $R[x_0, \dots, x_n]$ (con graduazione standard) di indice d è la R-algebra generata dai monomi nelle x_i di grado d. d-esima immersione di Veronese di $\mathbb{P}^n_R$. Esempi: d-esima immersione di Veronese di $\mathbb{P}^1$ e caratterizzazione dell'ideale, definizione di curva razionale normale, seconda immersione di Veronese di $\mathbb{P}^2$ e caratterizzazione dell'ideale.

(18) **27 Aprile 2023.** Dare un morfismo di schemi dallo spettro di un campo a uno schema equivale a scegliere un punto dello spazio topologico soggiacente e un'estensione del campo residuo. Se S è uno schema

e X e S' sono S-schemi, definizione di S'-punto di X. L'insieme degli S'-punti di X è in corrispondenza biunivoca naturale con gli S'-punti di $X \times_S S'$. Esempio: il $\mathbb{Q}$-schema $\operatorname{Spec}\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ha un solo punto (nello spazio topologico), ha 0 $\mathbb{Q}$-punti, ha 2 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-punti; il $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-schema $\operatorname{Spec}\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ha 1 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-punto. Se A è un anello, $X = \operatorname{Spec} A[x_1, \dots, x_n]/I$ e R è una A-algebra, allora $X(R)$ è in bigezione con l'insieme degli zeri di I in R^n. In particolare, $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}(R)$ è in bigezione con R^n. Se L è un campo, allora $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}(L)$ è in bigezione con lo spazio proiettivo classico $(L^{n+1} \smallsetminus \{0\})/L^* =: \mathbb{P}^n(L)$ (senza dimostrazione). Se S è uno schema e $f\colon X \to Y$ è un morfismo di S-schemi, costruzione della funzione $X(S) \to Y(S)$. Se S è uno schema, X è un S-schema e $S' \to S''$ è un morfismo di S-schemi, costruzione della funzione $X(S'') \to X(S')$. Cenni al lemma di Yoneda.

Definizione di morfismo di tipo finito, di morfismo affine, di morfismo finito. Essere un morfismo di tipo finito / affine / finito è una proprietà locale sul codominio (senza dimostrazione). I morfismi finiti sono di tipo finito e affini. Esempi: ogni morfismo tra schemi affini è affine, $\operatorname{Spec}\mathbb{Q} \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ è affine e non è di tipo finito, $\mathbb{A}^n_A \to \operatorname{Spec} A$ è affine e di tipo finito, $\operatorname{Spec} A/I \to \operatorname{Spec} A$ è finito, le immersioni chiuse sono morfismi finiti, $\mathbb{P}^n_A \to \operatorname{Spec} A$ è di tipo finito e non affine (se $A \neq 0$ e $n \geq 1$), $\operatorname{Spec} A_f \to \operatorname{Spec} A$ è affine e di tipo finito. Composizione di due morfismi di tipo finito / affini / finiti è di tipo finito / affine / finita. Teorema della base di Hilbert: se $f\colon X \to Y$ è un morfismo di tipo finito e Y è uno schema noetheriano, allora X è uno schema noetheriano.

Definizione di proprietà stabile per cambio base. Le proprietà di essere di tipo finito / affine / finito è una proprietà stabile per cambio base (cenno di dimostrazione).

Definizione di morfismo che soddisfa una proprietà universalmente. Osservazione: se $\mathcal{P}$ è una proprietà stabile per cambio base, se un morfismo soddisfa $\mathcal{P}$ allora soddisfa $\mathcal{P}$ universalmente. $\operatorname{Spec}\mathbb{C} \to \operatorname{Spec}\mathbb{R}$ è un morfismo iniettivo, ma non universalmente iniettivo. $\mathbb{A}^1_k \to \operatorname{Spec} k$ è un morfismo chiuso, ma non universalmente chiuso.

Definizione di varietà algebrica su un campo k come di uno k-schema di tipo finito finito.

(19) **5 Maggio 2023.** Definizione di cambio base di una varietà algebrica a un'estensione del campo base. Definizione di varietà algebriche geometricamente connesse/integre/irriducibili/regolari. $\operatorname{Spec}\mathbb{Q}[x,y]/(x^2 - 2y^2)$ è una varietà algebrica su $\mathbb{Q}$ integra e non geometricamente irriducibile. $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$ è una varietà algebrica su $\mathbb{R}$ integra e non geometricamente integra; $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$ è una varietà algebrica su $\mathbb{C}$ geometricamente integra. Se X è una varietà algebrica geometricamente ridotta sul campo k, allora per ogni estensione algebrica $K \supseteq k$ si ha che X_K è uno schema ridotto.

Rilevazione delle valutazioni della didattica.

Definizione di diagonale di un morfismo. Definizione di morfismo separato. Un morfismo tra schemi affini è separato.

Definizione di morfismo proprio. Per ogni anello A, $\mathbb{P}^n_A$ è proprio su A (enunciato senza dimostrazione). I morfismi finiti sono propri.

Definizione di morfismo proiettivo. Un morfismo proiettivo è proprio.

Fasci di $\mathcal{O}_X$-moduli. Se X è localmente connesso, allora i fasci di gruppi abeliani su X sono la stessa cosa dei fasci di $\mathbb{Z}_X$-moduli. Se X varietà C^∞, allora il fascio dei campi vettoriali T_X e il fascio delle p-forme Ω^p_X sono fasci di $\mathcal{C}^\infty_X$-moduli. Se A è un anello, $X = \operatorname{Spec} A$ e M è un A-modulo, allora $\tilde{M}$ è un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli. Se A è un anello $\mathbb{N}$-graduato, $X = \operatorname{Proj} A$ e M è un A-modulo $\mathbb{Z}$-graduato, allora $\tilde{M}$ è un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli. Se $x \in X$ e F è un $\mathcal{O}_X$-modulo, allora la spiga F_x ha una struttura naturale di $\mathcal{O}_{X,x}$-modulo.

(20) **8 Maggio 2023.** Definizione di fibrato con fibra uno spazio topologico F fissato. Esempi: fibrati banali, i fibrati con fibra discreta sono la stessa cosa dei rivestimenti, il cilindro e il nastro di Möbius sono fibrati su S^1.

Definizione di fibrato vettoriale reale o complesso su uno spazio topologico. Definizione di fibrato vettoriale reale o complesso C^∞ su una varietà C^∞. Definizione di fibrato vettoriale olomorfo su una complex manifold. Se X è una complex manifold e r è un numero naturale, alora la funzione dalle insieme delle classi di isomorfismo di fibrati vettoriali olomorfi su X di rango r all'insieme delle classi di isomorfismo di fibrati vettoriali complessi su X di rango r può essere né iniettiva né bigettiva (senza dimostrazione).

Definizione di fibrato in rette (line bundle). Se X è uno spazio topologico omotopicamente equivalente a un CW complesso finito, allora l'insieme delle classi di isomorfismo di line bundle reali (risp. complessi) su X è in bigezione con $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ (risp. $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$) (senza dimostrazione).

Esempi: fibrato vettoriale banale, il nastro di Möbius aperto è un line bundle reale su S^1, fibrato (co)tangente di una varietà C^∞, fibrato normale di una sottovarietà C^∞ di $\mathbb{R}^n$, fibrato tautologico su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (con esplicita descrizione delle trivializzazioni sulle carte affini standard), fibrato tautologico su $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Definizione di isomorfismo tra fibrati vettoriali. Definizione di sezione di un fibrato vettoriale su un aperto. Le sezioni di un fibrato vettoriale complesso su uno spazio topologico X formano un fascio di $\mathcal{C}_{X,\mathbb{C}}$-moduli, dove $\mathcal{C}_{X,\mathbb{C}}$ è il fascio delle funzioni continue da X a $\mathbb{C}$.

Un line bundle è banale se e solo se esiste una sezione mai nulla. Il line bundle tautologico $\gamma^1_n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ non è banale. Ogni sezione continua del fibrato tautologico su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ si annulla in qualche punto. Ogni sezione continua del fibrato tautologico su $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ si annulla in qualche punto (senza dimostrazione). Ogni sezione olomorfa del fibrato tautologico su $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ si annulla ovunque (senza dimostrazione).

(21) **11 Maggio 2023.** Basi/riferimenti locali per un fibrato vettoriale rispetto a una trivializzazione su un aperto. Matrici di transizione tra due trivializzazioni di un fibrato vettoriale. Esempio del fibrato tangente e del fibrato delle p-forme su una varietà C^∞.

Definizione di fascio localmente libero su uno spazio anellato e definizione di base locale. Definizione di fascio invertibile su uno spazio anellato. Definizione di fibra di un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli, nel caso in cui $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio localmente anellato.

Se X è uno spazio topologico e $\mathcal{C}_{X,\mathbb{C}}$ (risp. $\mathcal{C}_{X,\mathbb{R}}$) è il fascio delle funzioni continue da X a $\mathbb{C}$ (risp. $\mathbb{R}$), c'è una bigezione naturale tra l'insieme delle classi di isomorfismo di fibrati vettoriali complessi (risp. reali) su X di rango r e l'insieme delle classi di isomorfismo di fasci localmente liberi sullo spazio anellato $(X, \mathcal{C}_{X,\mathbb{C}})$ (risp. $(X, \mathcal{C}_{X,\mathbb{R}})$) di rango r. Se X è una C^∞ manifold e $\mathcal{C}^\infty_{X,\mathbb{C}}$ (risp. $\mathcal{C}^\infty_{X,\mathbb{R}}$) è il fascio delle funzioni C^∞ da X a $\mathbb{C}$ (risp. $\mathbb{R}$), c'è una bigezione naturale tra l'insieme delle classi di isomorfismo di fibrati vettoriali complessi (risp. reali) C^∞ su X di rango r e l'insieme delle classi di isomorfismo di fasci localmente liberi sullo spazio anellato $(X, \mathcal{C}^\infty_{X,\mathbb{C}})$ (risp. $(X, \mathcal{C}^\infty_{X,\mathbb{R}})$) di rango r. Se X è una complex manifold e $\mathcal{O}_X$ è il fascio delle funzioni olomorfe da X a $\mathbb{C}$, c'è una bigezione naturale tra l'insieme delle classi di isomorfismo di fibrati vettoriali olomorfi su X di rango r e l'insieme delle classi di isomorfismo di fasci localmente liberi sullo spazio anellato $(X, \mathcal{O}_X)$ di rango r.

Se X è uno schema, allora un fascio F di $\mathcal{O}_X$-moduli è localmente libero di rango r se e solo se esiste un ricoprimento aperto affine $\{U_i\}_i$ di X tale che l'$\mathcal{O}_{U_i}$-modulo $F|_{U_i}$ è isomorfo a $\mathcal{O}_{U_i}^{\oplus r}$. Definizione di fascio quasi-coerente su uno schema. Se A è un anello e $X = \operatorname{Spec} A$, allora la fascificazione di un modulo dà un funtore esatto dalla categoria degli A-moduli alla categoria dei fasci quasi-coerenti su X.

Se A è un anello $\mathbb{N}$-graduato e M è un A-modulo $\mathbb{Z}$-graduato, allora $\tilde{M}$ è un fascio quasi-coerente su $\operatorname{Proj} A$. Definizione del fascio $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(d)$ su $\mathbb{P}^n_R$ per ogni $d \in \mathbb{Z}$ e ogni anello R. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(d)$ è un fascio invertibile su $\mathbb{P}^n_R$: una base locale di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(d)$ su $U_0 = D_+(x_0)$ è x_0^d. Calcolo della funzione di transizione tra le due trivializzazioni standard di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_R}(d)$ sulle due carte affini standard di $\mathbb{P}^1_R$ e confronto con l'Esercizio 3.2.

(22) **15 Maggio 2023.** Se $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio anellato e F e G sono $\mathcal{O}_X$-moduli, definizione dell'$\mathcal{O}_X(X)$-modulo $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F, G)$ e definizione degli $\mathcal{O}_X$-moduli $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F, G)$ e $F \otimes_{\mathcal{O}_X} G$. Proprietà di aggiunzione tra fascio Hom e prodotto tensore (senza dimostrazione).

Se A è un anello e $X = \operatorname{Spec} A$, proprietà del funtore $\tilde{\cdot}$ dalla categoria degli A-moduli alla categoria degli $\mathcal{O}_X$-moduli: è additivo, è esatto, è pienamente fedele, è compatibile con kernel, cokernel e immagine, manda Hom e prodotti tensori in Hom e prodotti tensori.

Caratterizzazione dei fasci quasi-coerenti su uno schema (dimostrazione quasi completa). Se A è un anello, allora la categoria degli A-moduli è equivalente alla categoria dei fasci quasi-coerenti su $\operatorname{Spec} A$.

Definizione di fascio coerente su uno schema localmente noetheriano. Caratterizzazione dei fasci coerenti su uno schema localmente noetheriano.

(23) **18 Maggio 2023.** Se A è un anello $\mathbb{N}$-graduato e M è un A-modulo $\mathbb{Z}$-graduato, allora $\tilde{M}$ è un fascio quasi-coerente su $\operatorname{Proj} A$. Inoltre, in aggiunta, se A è noetheriano e M è finito, allora $\tilde{M}$ è un fascio coerente. Il funtore dalla categoria degli A-moduli $\mathbb{Z}$-graduati alla categoria dei fasci quasi-coerenti su $\operatorname{Proj} A$ è additivo ed esatto, ma non è pienamente fedele. Esempio di due ideali diversi di $R[x_0, \dots, x_n]$ che inducono lo stesso sottoschema chiuso.

Definizione di fascio di ideali di un'immersione chiusa di schemi. Sequenza esatta fascio di ideali, fascio di struttura dell'ambiente, fascio di struttura del sottoschema chiuso. Il fascio di ideali di un'ipersuperficie di $\mathbb{P}^n_k$ di grado d è $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-d)$.

Definizione di fascio invertibile su uno schema. Funzioni di transizione di fasci invertibili. Funzioni di transizione di $L \otimes M$ e di $L^\vee$. Definizione di gruppo di Picard di uno schema.

Ogni fascio localmente libero sullo spettro di un anello locale è libero. Il gruppo di Picard dello spettro di un anello locale è banale. Ogni fascio localmente libero sullo spettro di un PID è libero. Il gruppo di Picard dello spettro di un PID è banale. Il gruppo di Picard di $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ è ciclico di ordine 2 (senza dimostrazione). Se R è un UFD e n è un intero positivo, il gruppo di Picard di $\mathbb{P}^n_R$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$ (senza dimostrazione). Se $X \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ è un'ipersuperficie liscia di grado almeno 3, allora $\operatorname{Pic}(X)$ non è un gruppo abeliano finitamente generato (senza dimostrazione).

Definizione e caratterizzazione dei moduli proiettivi su un anello (esattezza del funtore $\operatorname{Hom}_A(P, \cdot)$, ogni successione esatta corta con P al terzo posto spacca, addendo diretto di libero). Ogni modulo libero è proiettivo. Ogni modulo proiettivo è piatto. $\mathbb{Q}$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo piatto non proiettivo.

Se A è un anello noetheriano locale e M è un A-modulo finito, allora M è libero se e solo se M è proiettivo se e solo se M è piatto.

(24) **22 Maggio 2023.** Se A è un anello noetheriano e M è un A-modulo finito, allora sono equivalenti: per ogni primo $\mathfrak{p}$ di A $M_{\mathfrak{p}}$ è un $A_{\mathfrak{p}}$-modulo libero, M è un A-modulo proiettivo, M è un A-modulo piatto, esistono $f_1, \ldots, f_n \in A$ tali che $A = Af_1 + \cdots + Af_n$ e M_{f_i} è un A_{f_i}-modulo libero, il fascio $\tilde{M}$ è localmente libero su $\operatorname{Spec} A$ di rango finito.

Se A è un anello, $\mathfrak{p}$ è un primo di A e M è un A-modulo finito tale che $M_{\mathfrak{p}} = 0$, allora esiste $f \in A \smallsetminus \mathfrak{p}$ tale che $M_f = 0$ (lasciato come esercizio).

Costruzione di un omomorfismo naturale $\operatorname{Hom}_A(M, N) \otimes_A B \to \operatorname{Hom}_B(M \otimes_A B, N \otimes_A B)$ quando M e N sono A-moduli e B è una A-algebra; è un isomorfismo quando M è un A-modulo libero finito; è iniettivo quando M è un A-modulo finito e B è piatto su A; è un isomorfismo quando M è un A-modulo finito, A è un anello noetheriano e B è piatto su A (vedi Eisenbud, Proposition 2.10).

Definizione e caratterizzazione di fascio quasi-coerente piatto su uno schema.

Se X è uno schema localmente noetheriano e F è un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli, allora: F è localmente libero di rango finito se e solo se F è coerente e piatto.

Cenni alla coomologia dei fasci. Cenni agli spazi di moduli di curve e di fibrati vettoriali.

Università di Bologna
Dipartimento di Matematica
A.A. 2022/23, Secondo Semestre

Andrea Petracci
a [dot] petracci (nospam) [at] unibo [dot] it
`https://www.dm.unibo.it/~andrea.petracci3/2023Schemi/`

Teoria degli Schemi — Foglio di esercizi 1
da consegnare entro giovedí 9 Marzo 2023

Potete dare per buono, purché opportunamente citato, qualsiasi risultato che trovate nella parte teorica del libro di Atiyah e MacDonald o degli altri libri di algebra commutativa che vi ho suggerito.

Esercizio 1.1. Qui non si usa il linguaggio della teoria degli schemi, bensí quello delle varietà algebriche "classiche". Sia k un campo algebricamente chiuso di caratteristica zero. Leggete la definizione di spazio proiettivo e di ipersuperficie affine o proiettiva su k nel compendio teorico all'inizio del libro *Geometria proiettiva* di Fortuna, Frigerio e Pardini; in particolare, leggete §1.1, §1.2.1, §1.3.8, §1.3.9, §1.7.1-8, §1.9.1 e la soluzione dell'Esercizio 3.16. Per completezza, potete consultare il libro *Geometria 1* di Sernesi. Inoltre, ciò che vi suggerisco maggiormente è di farvi aiutare da chi ha seguito il corso di *Geometria proiettiva*.

Sia $\mathbb{P}^2(k)$ il piano proiettivo su k. Siano x_0, x_1, x_2 le coordinate omogenee di $\mathbb{P}^2(k)$ e siano $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$, $U_1 = \{x_1 \neq 0\}$ e $U_2 = \{x_2 \neq 0\}$ le sue carte affini standard. Siano x, y le coordinate affini standard su $U_0 \simeq \mathbb{A}^2(k)$, cioè $x = \frac{x_1}{x_0}$ e $y = \frac{x_2}{x_0}$.

Si consideri la curva piana affine $C \subset U_0$ di equazione $x^2(1-x)^2 - y^2 - xy^2 = 0$. Si consideri la retta $r \subset U_0$ di equazione $x - 3 = 0$. Sia $\overline{C} \subset \mathbb{P}^2(k)$ la chiusura proiettiva di C. Sia $\overline{r} \subset \mathbb{P}^2(k)$ la chiusura proiettiva di r.

(1) Si determinino i punti di intersezione tra C e r. Per ciascun $p \in C \cap r$, si determini la molteplicità d'intersezione $I(C, r, p)$ tra C e r in p, si provi che p è un punto liscio di C e si determini la retta tangente T_pC alla curva C nel punto p.
(2) Si studino le singolarità di C, determinandone la molteplicità e le tangenti principali. Dire se sono punti singolari ordinari.
(3) Si determini l'equazione di $\overline{r}$ nelle coordinate omogenee x_0, x_1, x_2.
(4) Si determini l'equazione di $\overline{C}$ nelle coordinate omogenee x_0, x_1, x_2.
(5) Usando le coordinate affini $u = \frac{x_0}{x_1}$, $v = \frac{x_2}{x_1}$ su U_1, si determinino le equazioni di $\overline{C} \cap U_1$ e di $\overline{r} \cap U_1$.
(6) Usando le coordinate affini $w = \frac{x_0}{x_2}$, $z = \frac{x_1}{x_2}$ su U_2, si determinino le equazioni di $\overline{C} \cap U_2$ e di $\overline{r} \cap U_2$.
(7) Si provi che c'è un unico punto in $\overline{C} \cap H_0$. Lo si chiami q e lo si determini. Si dica se q sta in U_1 e/o in U_2. Si dica se q è singolare per $\overline{C}$, si determini la molteplicità di $\overline{C}$ in q e le tangenti principali a $\overline{C}$ in q.
(8) Si determinino i punti di intersezione tra $\overline{C}$ e $\overline{r}$. Per ciascun $p \in \overline{C} \cap \overline{r}$, si determini la molteplicità d'intersezione $I(\overline{C}, \overline{r}, p)$ tra $\overline{C}$ e $\overline{r}$ in p. Infine si calcoli la somma $\sum_{p \in \overline{C} \cap \overline{r}} I(\overline{C}, \overline{r}, p)$ e si colleghi questo risultato al teorema di Bézout.

Esercizio 1.2. (1) Sia A un anello e sia E un sottoinsieme di $\operatorname{Spec} A$. Si dimostri che la chiusura di E in $\operatorname{Spec} A$ è $\mathrm{V}(\bigcap_{\mathfrak{p} \in E} \mathfrak{p})$.

(2) Siano A e B due anelli. Si dimostri che $\operatorname{Spec}(A \times B)$ è omeomorfo all'unione disgiunta $\operatorname{Spec} A \coprod \operatorname{Spec} B$.

Esercizio 1.3.

(1) Si determini esplicitamente $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}/120\mathbb{Z}$ e la sua topologia.
(2) Sia $A = \mathbb{F}_2[x]/(x^7 + x^5 + x^3)$. Si determini esplicitamente $\operatorname{Spec} A$ e la sua topologia.
(3) Sia $A = \mathbb{F}_4[x]/(x^7 + x^5 + x^3)$. Si determini esplicitamente $\operatorname{Spec} A$ e la sua topologia.
(4) Sia p un numero primo e sia $A = \mathbb{Z}_{(p)}$ l'anello dei numeri razionali che hanno denominatore non divisibile per p. Si determini esplicitamente $\operatorname{Spec} A$ e la sua topologia.
(5) Sia k un campo e sia $A = k[\![x]\!]$ l'anello delle serie formali nell'indeterminata x a coefficienti in k. Si determini esplicitamente $\operatorname{Spec} A$ e la sua topologia.
(6) Sia k un campo algebricamente chiuso e sia $A = k[x, y]/(x^3y, xy^4)$. Si determinino esplicitamente tutti i punti di $\operatorname{Spec} A$. Per ciascuno di essi si dica se è chiuso o no. (Potete usare la caratterizzazione degli ideali massimali di $k[x_1, \dots, x_n]$ che segue dal Nullstellensatz.)
(7) Sia $A = \mathbb{Z}[x]/(2x^3, 16x)$. Si dica se $\operatorname{Spec} A$ è irriducibile. Si determini la cardinalità di $\operatorname{Spec} A$, cioè si dica se è finito, numerabile o piú che numerabile. Si determinino tutti i punti non chiusi di $\operatorname{Spec} A$. Si esibiscano almeno 4 punti chiusi di $\operatorname{Spec} A$.
(8) Si ripeta il punto precedente per $A = \mathbb{Z}[x]/(16x^2, 20)$.
(9) Per ogni numero primo p, si determini la cardinalità di $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[i]/(p)$, dove $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ è l'anello degli interi di Gauss, e la sua topologia. (Avete mai sentito parlare del simbolo di Legendre?)

Esercizio 1.4. Sia $\varphi \colon A \to B$ un omomorfismo di anelli e si consideri la mappa indotta $\varphi^\star \colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$.

(1) Si dimostri che per ogni ideale $J \subseteq B$ vale $\varphi^\star(\mathrm{V}(J)) \subseteq \mathrm{V}(\varphi^{-1}J)$ e che la chiusura di $\varphi^\star(\mathrm{V}(J))$ in $\operatorname{Spec} A$ è $\mathrm{V}(\varphi^{-1}J)$.
(2) Si dimostri che se φ è intero e iniettivo allora la mappa indotta $\varphi^\star$ è suriettiva.
(3) Si dimostri che se φ è intero allora la mappa indotta $\varphi^\star$ è chiusa.
(4) Si dia un esempio di omomorfismo di anelli $\varphi\colon A \to B$ tale che la mappa indotta $\varphi^\star\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ non è aperta né chiusa.
(5) Si dia un esempio di omomorfismo non-suriettivo di anelli $\varphi\colon A \to B$ tale che la mappa indotta $\varphi^\star\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ è un omeomorfismo.

Esercizio 1.5. Sia A un anello e sia M un A-modulo. Per ogni elemento $f \in A$, si denota con A_f (risp. $M_f = M \otimes_A A_f$) la localizzazione di A (risp. M) rispetto alla parte moltiplicativa $\{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e si denota con Af l'ideale di A generato da f.

(1) Si provi che esiste un isomorfismo di A-algebre tra A_f e $A[x]/(fx-1)$.
(2) Supponiamo di avere due elementi $f, g \in A$ tali che $g \in \sqrt{Af}$. Quindi sappiamo che esistono $k \in \mathbb{N}$ e $a \in A$ tali che $g^k = af$. Allora si provi che $\rho\colon M_f \to M_g$ dato da
$$\frac{x}{f^n} \mapsto \frac{a^n x}{g^{nk}},$$
per $n \in \mathbb{N}$ e $x \in M$, è un ben definito omomorfismo di A-moduli. Si provi inoltre che tale ρ non dipende dalla scrittura $g^k = af$; in altre parole, si dimostri che se $g^{k'} = a'f$ per $k' \in \mathbb{N}$ e $a' \in A$ allora ρ definito sopra è tale che
$$\rho\left(\frac{x}{f^n}\right) = \frac{(a')^n x}{g^{nk'}}$$
per ogni $x \in M$ e $n \in \mathbb{N}$.
(3) Supponiamo di avere due elementi $f, g \in A$ tali che $\sqrt{Ag} = \sqrt{Af}$. Si costruisca un isomorfismo canonico di A-moduli tra M_f e M_g.

Nel caso in cui $A = \mathbb{Z}$ e $f \in \mathbb{Z}$, per evitare confusione con i numeri p-adici, la localizzazione di $\mathbb{Z}$ rispetto alla parte moltiplicativa $\{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ si denota con $\mathbb{Z}[\frac{1}{f}]$. Inoltre se p è un numero primo si denota con $\mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}$ o con $\mathbb{Z}_{(p)}$ la localizzazione di $\mathbb{Z}$ rispetto alla parte moltiplicativa $\mathbb{Z} \smallsetminus p\mathbb{Z}$.

Per ogni elemento $f \in \{2, 3, 24, 16\} \subset \mathbb{Z}$ e per ogni $\mathbb{Z}$-modulo $M \in \{\mathbb{Z},\ 2\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/10\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/49\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}[\frac{1}{9}],\ \mathbb{Z}_{2\mathbb{Z}},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R}\}$ si determini la localizzazione $M_f = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\frac{1}{f}]$; inoltre, posto $\rho\colon M \to M_f$ l'omomorfismo di localizzazione dato da $x \mapsto \frac{x}{1}$, cioè l'omomorfismo definito sopra per 1 e f poiché $f \in \sqrt{A} = A$, si determini il nucleo di ρ e se ρ è iniettivo/suriettivo/bigettivo.

Università di Bologna
Dipartimento di Matematica
A.A. 2022/23, Secondo Semestre

Andrea Petracci
a [dot] petracci (nospam) [at] unibo [dot] it
`https://www.dm.unibo.it/~andrea.petracci3/2023Schemi/`

Teoria degli Schemi — Foglio di esercizi 2
da consegnare entro lunedí 3 aprile 2023

Potete dare per buono, purché opportunamente citato, qualsiasi risultato che trovate nella parte teorica dei seguenti libri: *Introduction to commutative algebra* di Atiyah e MacDonald, *Commutative ring theory* di Matsumura, *Commutative algebra* di Eisenbud, *Algebraic geometry* di Hartshorne, *Algebraic geometry and arithmetic curves* di Liu.

Esercizio 2.1. Sia $A = \mathbb{C}[x, y, z]/(y^2 z^3, z^5(x - z^2)^7)$.

(1) Si determini esplicitamente il nilradicale $\mathcal{N}(A)$ di A e l'anello ridotto $A_{\text{red}} := A/\mathcal{N}(A)$.
(2) Si faccia una figura del chiuso algebrico $\mathrm{Z}_{\mathbb{R}}(y^2 z^3, z^5(x - z^2)^7) \subseteq \mathbb{R}^3$.
(3) Si determinino tutti i chiusi irriducibili del chiuso algebrico $\mathrm{Z}_{\mathbb{C}}(y^2 z^3, z^5(x - z^2)^7) \subseteq \mathbb{C}^3$.
(4) Si usi il Nullstellensatz per determinare esplicitamente tutti i punti chiusi di $\operatorname{Spec} A$.
(5) Si usi la corrispondenza ideali-chiusi (che è conseguenza del Nullstellensatz) per determinare esplicitamente tutti i punti non-chiusi di $\operatorname{Spec} A$.
(6) Per ogni primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, si determinino i seguenti tre numeri: $\dim A/\mathfrak{p}$, l'altezza $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = \dim A_{\mathfrak{p}}$ e il grado di trascendenza $\operatorname{tr.deg}(\kappa(\mathfrak{p})/\mathbb{C})$ del campo residuo di $\mathfrak{p}$ su $\mathbb{C}$.

Esercizio 2.2.

(1) Sia A un dominio, sia $X = \operatorname{Spec} A$ e sia $\mathcal{O}_X$ il fascio di struttura di X, cioè il fascio associato all'A-modulo A. Si denoti con ξ il punto generico di X, cioè il punto che corrisponde all'ideale nullo.
   (a) Si provi che la spiga $\mathcal{O}_{X,\xi}$ del fascio $\mathcal{O}_X$ nel punto ξ è il campo delle frazioni di A, denotato con $\operatorname{Frac} A$.
   (b) Per ogni $f \in A \smallsetminus \{0\}$, si denoti con X_f l'aperto principale dato da f e si provi che l'omomorfismo naturale $\mathcal{O}_X(X_f) \to \mathcal{O}_{X,\xi}$, che manda una sezione di $\mathcal{O}_X$ su X_f nel corrispondente germe in ξ, è iniettivo.
   (c) Per ogni aperto $U \subseteq X$ non vuoto, si provi che l'omomorfismo naturale $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,\xi}$, che manda una sezione di $\mathcal{O}_X$ su U nel corrispondente germe in ξ, è iniettivo.
   (d) Siano $f, g \in A \smallsetminus \{0\}$ e siano X_f e X_g i corrispondenti aperti principali. Se $X_f \supseteq X_g$, si provi che l'omomorfismo di restrizione $\mathcal{O}_X(X_f) \to \mathcal{O}_X(X_g)$ è iniettivo.
   (e) Se U e V sono aperti di X tali che $U \supseteq V \neq \emptyset$, allora si provi che l'omomorfismo di restrizione $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ è iniettivo.
(2) Si faccia un esempio della seguente situazione: A è un anello, $X = \operatorname{Spec} A$, $\mathcal{O}_X = \tilde{A}$ è il fascio di struttura di X, U e V sono aperti non vuoti di X, $U \supseteq V$, l'omomorfismo di restrizione $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ è iniettivo ma non suriettivo.
(3) Si faccia un esempio della seguente situazione: A è un anello, $X = \operatorname{Spec} A$, $\mathcal{O}_X = \tilde{A}$ è il fascio di struttura di X, U e V sono aperti non vuoti di X, $U \supseteq V$, l'omomorfismo di restrizione $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ è suriettivo ma non iniettivo.
(4) Si faccia un esempio della seguente situazione: A è un dominio, $X = \operatorname{Spec} A$, $\mathcal{O}_X = \tilde{A}$ è il fascio di struttura di X, U e V sono aperti non vuoti di X, $U \supsetneq V$, l'omomorfismo di restrizione $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ è bigettivo.

Esercizio 2.3.

(1) Sia $\mathcal{O}$ il fascio delle funzioni olomorfe su $\mathbb{C}$.
   (a) Si provi che per ogni punto $z_0 \in \mathbb{C}$ la spiga $\mathcal{O}_{z_0}$ di $\mathcal{O}$ in z_0 è un dominio locale. (Se vi fa comodo, assumete $z_0 = 0$.)
   (b) Si provi che per ogni aperto connesso $U \subseteq \mathbb{C}$ e per ogni punto $z_0 \in U$, l'omomorfismo naturale $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}_{z_0}$, che manda una funzione olomorfa su U nel corrispondente germe in z_0, è iniettivo. Se ne deduca che $\mathcal{O}(U)$ è un dominio.
   (c) Se U e V sono aperti connessi di $\mathbb{C}$ tali che $U \supseteq V$, allora si provi che l'omomorfismo di restrizione $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ è iniettivo.
   (d) Si faccia un esempio della seguente situazione: U e V sono aperti connessi di $\mathbb{C}$, $U \supseteq V$, l'omomorfismo di restrizione $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ è iniettivo ma non bigettivo.
(2) Sia $\mathcal{C}^\infty$ il fascio delle funzioni C^∞ su $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$.

(a) Si fissi un punto $x_0 \in \mathbb{R}$; se vi fa comodo, assumete $x_0 = 0$. Si dica se la spiga $\mathcal{C}^\infty_{x_0}$ di $\mathcal{C}^\infty$ in x_0 è un anello locale e se è un dominio.
(b) Si provi che se $U \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo aperto e $x_0 \in U$ è un punto allora l'omomorfismo naturale $\mathcal{C}^\infty(U) \to \mathcal{C}^\infty_{x_0}$, che manda una funzione C^∞ su U nel corrispondente germe in x_0, è suriettivo. È anche iniettivo?
(c) Se U e V sono intervalli aperti tali che $U \supsetneqq V$, allora si dica se l'omomorfismo di restrizione $\mathcal{C}^\infty(U) \to \mathcal{C}^\infty(V)$ è iniettivo e/o suriettivo. Si forniscano prove o controesempi.

Esercizio 2.4. Sia k un anello, sia A una k-algebra e sia G un gruppo finito che agisce su A mediante omomorfismi di k-algebre. Per semplicità si può supporre che G sia un sottogruppo finito del gruppo degli automorfismi di A come k-algebra. Si consideri l'insieme degli elementi che sono G-invarianti:

$$A^G := \{a \in A \mid \forall g \in G,\ g(a) = a\}$$

che è evidentemente una k-sottoalgebra di A. Si consideri l'inclusione $\iota\colon A^G \hookrightarrow A$ e la mappa indotta $\iota^\star\colon \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} A^G$.

(1) Si dimostri che A è intero su A^G.
(2) Si dimostri che: se k è noetheriano e A è di tipo finito su k, allora A^G è di tipo finito su k.
(3) Si consideri l'azione sinistra di G sullo spazio topologico $\operatorname{Spec} A$ data da $g \cdot \mathfrak{q} = g(\mathfrak{q})$ per ogni $g \in G$ e $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$ e se ne consideri il quoziente $\pi\colon \operatorname{Spec} A \to (\operatorname{Spec} A)/G$ nella categoria degli spazi topologici (cioè $(\operatorname{Spec} A)/G$ è l'insieme quoziente dotato della topologia quoziente indotta da $\operatorname{Spec} A$.). Si dimostri che esiste un omeomorfismo $\Phi\colon (\operatorname{Spec} A)/G \to \operatorname{Spec} A^G$ che rende commutativo il seguente diagramma.

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Spec} A \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\iota^\star"] & \\ (\operatorname{Spec} A)/G \arrow[rr, "\Phi"] & & \operatorname{Spec} A^G \end{tikzcd}$$

[Per chiarezza e per aiutarmi nella correzione vi chiedo di indicare i primi di A con $\mathfrak{q}$ e i primi di A^G con $\mathfrak{p}$, eventualmente decorati da apici, pedici, ...]
(4) Si consideri il seguente esempio: k è un campo di caratteristica diversa da 2, $A = k[x, y]$ è l'anello dei polinomi in 2 variabili, G è il gruppo con 2 elementi, l'azione dell'elemento non banale $\sigma \in G$ su A è data da $\sigma\colon f(x, y) \mapsto f(-x, -y)$. Si determini un insieme di generatori di A^G come k-algebra e si presenti la k-algebra A^G come il quoziente di una k-algebra polinomiale modulo un ideale (Facoltativo: si dica se A^G è un anello regolare.)
(5) Si consideri il seguente esempio: $k = \mathbb{C}$, $A = \mathbb{C}[x, y]$ è l'anello dei polinomi in 2 variabili, $\zeta \in \mathbb{C}$ è una radice terza primitiva dell'unità, G è il gruppo con 3 elementi, l'azione di un generatore $\sigma \in G$ su A è data da $\sigma\colon f(x, y) \mapsto f(\zeta x, \zeta y)$. Si determini un insieme di generatori di A^G come k-algebra e si presenti la k-algebra A^G come il quoziente di una k-algebra polinomiale modulo un ideale (Facoltativo: si dica se A^G è un anello regolare.)

Esercizio 2.5.
(1) Sia $0 \longrightarrow F' \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} F''$ una successione esatta di fasci su uno spazio topologico X. Si dimostri che la sequenza di gruppi abeliani $0 \longrightarrow F'(X) \xrightarrow{\varphi_X} F(X) \xrightarrow{\psi_X} F''(X)$ è esatta.
(2) Sia $f\colon X \to Y$ una funzione continua di spazi topologici, sia F un fascio di gruppi abeliani su X. Per ogni $V \subseteq Y$ aperto si ponga $(f_*F)(V) := F(f^{-1}V)$, inoltre per ogni coppia di aperti V e V' di Y tali che $V \supseteq V'$ si consideri l'omomorfismo $(f_*F)(V) \to (f_*F)(V')$ dato dall'omomorfismo di restrizione $F(f^{-1}V) \to F(f^{-1}V')$ del fascio F. Ci si convinca (ma senza scrivere niente) che f_*F è un fascio su Y; in altre parole, non importa che scriviate la dimostrazione che f_*F è un fascio su Y.

Per ogni $p \in X$ un punto, si costruisca un omomorfismo naturale

$$\alpha\colon (f_*F)_{f(p)} \to F_p$$

tale che nel caso in cui X è un sottospazio di Y e f è l'inclusione α sia è un isomorfismo.

Università di Bologna
Dipartimento di Matematica
A.A. 2022/23, Secondo Semestre

Andrea Petracci
a [dot] petracci (nospam) [at] unibo [dot] it
`https://www.dm.unibo.it/~andrea.petracci3/2023Schemi/`

Teoria degli Schemi — Foglio di esercizi 3
da consegnare entro giovedí 27 Aprile 2023

Potete dare per buono, purché opportunamente citato, qualsiasi risultato che trovate nella parte teorica dei seguenti libri: *Introduction to commutative algebra* di Atiyah e MacDonald, *Commutative ring theory* di Matsumura, *Commutative algebra* di Eisenbud, *Algebraic geometry* di Hartshorne.

Osservazione 1. Sia A un anello. Se M è un A-modulo e $M^\sim$ è il fascio di gruppi abeliani su $\operatorname{Spec} A$ indotto da M, allora si vede che $M^\sim$ è in modo naturale un fascio di A-moduli su $\operatorname{Spec} A$.

Se A' è un altro anello e A è una A'-algebra, allora un A-modulo M è in modo naturale un A'-modulo e il fascio $M^\sim$ indotto da M su $\operatorname{Spec} A$ è in modo naturale un fascio di A'-moduli. (Si potrebbe anche considerare il fascio indotto da M su $\operatorname{Spec} A'$, che è un fascio di A'-moduli; esso è il pushforward del fascio indotto da M su $\operatorname{Spec} A$ tramite la funzione continua $\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} A'$ indotta dall'omomorfismo di anelli $A' \to A$ dato dalla struttura A'-algebra di A.)

Osservazione 2. Sia A un anello. Un omomorfismo di A-moduli $M \to N$ induce un omomorfismo di fasci di A-moduli $M^\sim \to N^\sim$ su $\operatorname{Spec} A$. Questa costruzione dà un funtore dalla categoria degli A-moduli alla categoria dei fasci di A-moduli su $\operatorname{Spec} A$.

Esercizio 3.1. In (1) costruiremo l'incollamento di fasci per un ricoprimento aperto fatto da due elementi – per la trattazione del caso generale si rimanda all'Esercizio 2.2.8 del libro di Liu. In (2) costruiremo l'incollamento di due schemi lungo un sottoschema aperto – per la trattazione del caso generale si rimanda al Lemma 2.3.33 del libro di Liu. In (3) si devono dimostrare con cura delle affermazioni fatte a lezione.

(1) Sia X uno spazio topologico e siano U_0 e U_1 due aperti di X tali che $X = U_0 \cup U_1$. Per brevità si ponga $U_{01} = U_0 \cap U_1$. Si consideri il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} U_{01} \arrow[r, hook, "i_0"] \arrow[d, hook, "i_1"] & U_0 \arrow[d, hook, "j_0"] \\ U_1 \arrow[r, hook, "j_1"] & X \end{tikzcd}$$

dato dalle inclusioni. Sia F_0 un fascio di gruppi abeliani su U_0 e sia F_1 un fascio di gruppi abeliani su U_1. Supponiamo di avere un isomorfismo di fasci $\phi\colon F_0|_{U_{01}} \to F_1|_{U_{01}}$. Si provi che esistono un fascio di gruppi abeliani F su X e degli isomorfismi di fasci $\psi_0\colon F|_{U_0} \to F_0$ e $\psi_1\colon F|_{U_1} \to F_1$ tali che $\phi \circ \psi_0|_{U_{01}} = \psi_1|_{U_{01}}$. Si provi che la terna (F, ψ_0, ψ_1) è unica a meno di isomorfismo. Perciò il fascio F si dice *incollamento* dei fasci F_0 e F_1 tramite ϕ. (Attenzione: dipende da ϕ!)

(2) Siano U_0, U_1, U_{01} tre schemi e siano $i_0\colon U_{01} \hookrightarrow U_0$ e $i_1\colon U_{01} \hookrightarrow U_0$ due immersioni aperte di schemi. Si costruisca con precisione lo schema X dato dall'incollamento di U_0 e U_1 lungo U_{01}. Dovete costruire prima lo spazio topologico X, poi il fascio di struttura $\mathcal{O}_X$ e infine dimostrare che valgono le proprietà di incollamento, che sono state enunciate a lezione (si veda anche il Lemma 2.3.33 del libro di Liu).

(3) Sia A un anello non nullo. Si considerino due copie di $\mathbb{A}^1_A$

$$U_0 = \operatorname{Spec} A[u] \qquad \text{e} \qquad U_1 = \operatorname{Spec} A[v]$$

e una copia del "complementare dell'origine" in $\mathbb{A}^1_A$

$$U_{01} = \operatorname{Spec} A[t, t^{-1}] = \operatorname{Spec} A[t] \smallsetminus \mathrm{V}(t).$$

Sia $i_0\colon U_{01} \hookrightarrow U_0$ l'immersione aperta indotta dall'omomorfismo di A-algebre $A[u] \to A[t, t^{-1}]$ dato da $u \mapsto t$. Sia $i_1\colon U_{01} \hookrightarrow U_1$ l'immersione aperta indotta dall'omomorfismo di A-algebre $A[v] \to A[t, t^{-1}]$ dato da $v \mapsto t$. Sia X lo schema ottenuto incollando U_0 e U_1 lungo U_{01}, seguendo la costruzione in (2). Si provi che c'è un omomorfismo naturale di anelli $A \to \mathcal{O}_X(X)$ e si provi che $\mathcal{O}_X(X)$ è isomorfo come A-algebra alla A-algebra dei polinomi in 1 indeterminata con coefficienti in A. Si dica se X è uno schema affine.

Esercizio 3.2. Sia A un anello non nullo. Si considerino due copie di $\mathbb{A}^1_A$

$$U_0 = \operatorname{Spec} A[u] \qquad \text{e} \qquad U_1 = \operatorname{Spec} A[v]$$

e una copia del "complementare dell'origine" in $\mathbb{A}^1_A$

$$U_{01} = \operatorname{Spec} A[t, t^{-1}] = \operatorname{Spec} A[t] \smallsetminus \mathrm{V}(t).$$

Sia $i_0\colon U_{01} \hookrightarrow U_0$ l'immersione aperta indotta dall'omomorfismo di A-algebre $A[u] \to A[t, t^{-1}]$ dato da $u \mapsto t$. Sia $i_1\colon U_{01} \hookrightarrow U_1$ l'immersione aperta indotta dall'omomorfismo di A-algebre $A[v] \to A[t, t^{-1}]$ dato da $v \mapsto t^{-1}$. Sia X lo schema ottenuto incollando U_0 e U_1 lungo U_{01}, seguendo la costruzione nell'Esercizio 3.1(2). (Nel caso in cui $A = \mathbb{C}$, se si ignorano i punti generici e si considerano solo i punti chiusi, si dovrebbe osservare che abbiamo costruito una versione "algebrica" della sfera di Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.)

(1) Si provi che c'è un omomorfismo naturale di anelli $A \to \mathcal{O}_X(X)$ e che esso è un isomorfismo.
(2) Si dica se X è uno schema affine.
(3) Con un lieve abuso di notazione, pensiamo che U_0 e U_1 siano sottoschemi aperti di X e che U_{01} sia un sottoschema aperto di U_0, di U_1 e di X. Si fissi un numero $d \in \mathbb{Z}$. Su U_0 si consideri il fascio $\mathcal{O}_{U_0}$, che è $A[u]^\sim$, lo si indichi con F_0 e lo si pensi come fascio di A-moduli (in realtà è anche un fascio di $A[u]$-algebre, ma scordiamocelo). Su U_1 si consideri il fascio $\mathcal{O}_{U_1}$ e lo si indichi con F_1 e lo si pensi come fascio di A-moduli. Perciò $F_0|_{U_{01}}$ e $F_1|_{U_{01}}$ sono entrambi isomorfi a $\mathcal{O}_{U_{01}}$, cioè $A[t, t^{-1}]^\sim$. Sia
$$\phi_d\colon F_0|_{U_{01}} = A[t, t^{-1}]^\sim \longrightarrow F_1|_{U_{01}} = A[t, t^{-1}]^\sim$$
l'isomorfismo di fasci di $A[t, t^{-1}]$-moduli (e quindi anche di A-moduli) indotto dall'isomorfismo di $A[t, t^{-1}]$-moduli
$$g_d\colon A[t, t^{-1}] \longrightarrow A[t, t^{-1}]$$
che è la moltiplicazione per t^d. Sia F il fascio di A-moduli su X ottenuto incollando F_0 e F_1 tramite ϕ_d, seguendo la costruzione nell'Esercizio 3.1(1). (Se $d = 0$ allora g_d è l'identità di $A[t, t^{-1}]$ e quindi F è $\mathcal{O}_X$.) Si provi che l'insieme $F(X)$ delle sezioni globali di F è un A-modulo libero e se ne calcoli il rango, al variare di $d \in \mathbb{Z}$.

Definizione. Sia X uno schema e sia $x \in X$ un punto. Sia $\mathcal{O}_{X,x}$ l'anello locale in x, $\mathfrak{m}_x$ il suo ideale massimale e $\kappa(x) := \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ il suo campo residuo. Si definisce lo *spazio tangente di Zariski* $T_{X,x}$ a X in x come il duale del $\kappa(x)$-spazio vettoriale $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, cioè $T_{X,x} := \mathrm{Hom}_{\kappa(x)}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, \kappa(x))$.

Esercizio 3.3.

(1) Sia A un anello, sia $\mathfrak{m}$ un ideale massimale di A, sia M un A-modulo. Si dimostri che se $\sqrt{\mathrm{ann}_A(M)} \supseteq \mathfrak{m}$ allora l'omomorfismo di localizzazione $M \to M_\mathfrak{m}$ è un isomorfismo di A-moduli.
(2) Sia k un campo e si consideri il k-schema
$$X = \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_r)$$
dove $f_1, \ldots, f_r \in k[x_1, \ldots, x_n]$ sono dei polinomi. Supponiamo che il punto $a = (a_1, \ldots, a_n) \in k^n$ annulli tutti gli f_i. Si consideri il punto chiuso $p \in X$ dato dall'ideale massimale generato da $x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n$. Si osservi che il campo residuo di p è k. Sia $\mathfrak{m}_p$ l'ideale massimale dell'anello locale $\mathcal{O}_{X,p}$.
 (a) Si dimostri che $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ è naturalmente isomorfo, come $k[x_1, \ldots, x_n]$-modulo, al quoziente di ideali di $k[x_1, \ldots, x_n]$ dato da
$$\frac{(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)}{(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)^2 + (f_1, \ldots, f_r)}.$$
 (b) Per ogni $f \in (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \subset k[x_1, \ldots, x_n]$, si consideri l'applicazione k-lineare
$$\mathrm{d}f\colon k^n \longrightarrow k$$
data da
$$v = (v_1, \ldots, v_n) \mapsto \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$
Si determino nucleo e immagine dell'applicazione k-lineare
$$\mathrm{d}\colon (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(k^n, k)$$
data da $f \mapsto \mathrm{d}f$.
 (c) Si considerino la matrice jacobiana
$$J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j} \in \mathcal{M}_{r,n}(k)$$
e il suo nucleo $\ker J \subseteq k^n$. Si consideri l'omomorfismo di restrizione
$$\rho\colon \mathrm{Hom}_k(k^n, k) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(\ker J, k),$$
cioè l'applicazione k-lineare che associa a un funzionale k-lineare su k^n la sua restrizione a $\ker J$. Si determinino nucleo e immagine dell'applicazione k-lineare
$$\rho \circ \mathrm{d}\colon (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(\ker J, k).$$
 (d) Si dimostri che $\ker J$ è isomorfo allo spazio tangente $T_{X,p} = \mathrm{Hom}_k(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2, k)$.

(3) Si supponga che k sia un campo algebricamente chiuso e si calcoli la dimensione dello spazio tangente e la dimensione di Krull dell'anello locale di ciascun punto chiuso di ciascuno dei seguenti schemi:
   (a) $X = \operatorname{Spec} k[x,y]/(x^2, xy)$,
   (b) $X = \operatorname{Spec} k[x,y]/(x^2(1-x)^2 - y^2 - xy^2)$,
   (c) $X = \operatorname{Spec} k[x,y,z]/(yz, z(x-z^2))$,
   (d) $X = \operatorname{Spec} k[x,y,z]/(y^2z^3, z^5(x-z^2)^7)$,
   (e) $X = \operatorname{Spec} k[x,y,z]/(x^3+y^3+1)$.

Definizione. Sia k un anello, sia A una k-algebra e sia M un A-modulo. Una *k-derivazione di A in M* è un omomorfismo k-lineare $\delta\colon A \to M$ che soddisfa la regola di Leibniz: $\forall a_1, a_2 \in A,\ \delta(a_1a_2) = a_1\delta(a_2) + a_2\delta(a_1)$. (Si osservi che δ si annulla sugli elementi di A che provengono da k.) L'insieme delle k-derivazioni di A in M si denota con $\operatorname{Der}_k(A, M)$ (e ha una struttura naturale di A-modulo).

Esercizio 3.4. Sia k un campo fissato. Si consideri la k-algebra $k[t]/(t^2)$: si denoti con ε l'immagine di t, ovvero la classe $t + (t^2) \in k[t]/(t^2)$, e si denoti con $k[\varepsilon]$ questa k-algebra. Si denoti con β l'omomorfismo suriettivo di k-algebre $k[\varepsilon] \to k$ definito da $\varepsilon \mapsto 0$.

(1) Sia A una k-algebra locale e sia $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di A. Supponiamo che il campo residuo di A sia k, ovvero la composizione $k \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{m}$ sia un isomorfismo di anelli. (Non si dia un simbolo per l'omomorfismo iniettivo di anelli $k \hookrightarrow A$, cioè si pensi k come un sottoanello di A, ma si denoti con α la proiezione al quoziente $A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{m} = k$ e si denoti con π la proiezione al quoziente $\mathfrak{m} \twoheadrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.) Si costruiscano esplicitamente delle bigezioni naturali tra i seguenti tre insiemi:
   (a) $\operatorname{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k)$,
   (b) $\operatorname{Der}_k(A, k)$,
   (c) l'insieme degli omomorfismi $\varphi\colon A \to k[\varepsilon]$ di k-algebre tali che $\alpha = \beta \circ \varphi$.

(2) Sia X uno schema su k. È evidente che il campo residuo di ciascun punto di X è un'estensione di k. Si costuisca una bigezione tra i seguenti due insiemi:
   (a) $\operatorname{Hom}_{(\mathrm{Sch}/k)}(\operatorname{Spec} k[\varepsilon], X)$, che è l'insieme dei morfismi di k-schemi da $\operatorname{Spec} k[\varepsilon]$ a X,
   (b) $\{(x, v) \mid x \in X \text{ tale che } \kappa(x) = k,\ v \in T_{X,x}\}$, che è l'insieme delle coppie (x, v), dove x è un punto k-razionale di X e v è un vettore tangente a X in x.

Esercizio 3.5.

(1) Si costruisca un esempio della seguente situazione: X, Y sono due schemi, $f\colon X \to Y$ e $g\colon X \to Y$ sono due morfismi di schemi diversi ma con la stessa funzione continua soggiacente.
(2) Si costruisca un esempio della seguente situazione: X e Y sono schemi omeomorfi ma non isomorfi.
(3) Si costruisca un esempio della seguente situazione: k è un campo algebricamente chiuso, X e Y sono schemi affini su k tali che $\mathcal{O}_X(X)$ e $\mathcal{O}_Y(Y)$ sono domini di tipo finito su k, $f\colon X \to Y$ è un morfismo di k-schemi che è un omeomorfismo ma non un isomorfismo.
(4) Si costruisca un esempio della seguente situazione: X è uno schema affine, X_0 è l'insieme dei punti chiusi di X, Z è un sottoinsieme chiuso di X, la chiusura di $Z \cap X_0$ in X è strettamente contenuta in Z.
(5) Si costruisca un esempio della seguente situazione: X, X_0, Z come in (4) e in aggiunta X_0 è denso in X.
(6) Sia k un campo. Dire se il morfismo di schemi $\mathbb{A}^2_k \to \mathbb{A}^1_k$ indotto dall'omomorfismo di k-algebre $k[x] \hookrightarrow k[x,y]$ è chiuso.

Università di Bologna
Dipartimento di Matematica
A.A. 2022/23, Secondo Semestre

Andrea Petracci
a [dot] petracci (nospam) [at] unibo [dot] it
`https://www.dm.unibo.it/~andrea.petracci3/2023Schemi/`

Teoria degli Schemi — Foglio di esercizi 4
da consegnare entro lunedí 15 Maggio 2023

Si rammenta che lo schema vuoto è quasi-compatto, sconnesso, riducibile, ridotto, non integro.

Esercizio 4.1. Sia $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i$ un anello $\mathbb{N}$-graduato. Si consideri lo schema $X = \operatorname{Proj} A$.

(1) Se A è ridotto, si dimostri che X è ridotto.
(2) Se A è un dominio, si dimostri che X è integro.
(3) Si costruisca un esempio in cui A è non-ridotto e X è integro.
(4) Se $d > 0$ e $f \in A_d$, si costruisca un omomorfismo suriettivo di A_0-algebre $A^{(d)} \to A_{(f)}$.
(5) Se A è noetheriano, si dimostri che X è uno schema noetheriano.
(6) Si costruisca un omomorfismo naturale di anelli $A_0 \to \mathcal{O}_X(X)$. Si dica se è iniettivo e/o suriettivo, fornendo prove e/o controesempi.

Esercizio 4.2. Sia R un anello e siano d_0, d_1 due numeri interi positivi. Si consideri

- lo spazio proiettivo pesato $\mathbb{P}_R(d_0, d_1) = \operatorname{Proj} R[y_0, y_1]$ dove $\deg y_i = d_i$ e
- la retta proiettiva standard $\mathbb{P}^1_R = \mathbb{P}_R(1,1) = \operatorname{Proj} R[x_0, x_1]$ dove $\deg x_i = 1$.

Si costruisca esplicitamente un isomorfismo di R-schemi tra $\mathbb{P}_R(d_0, d_1)$ e $\mathbb{P}^1_R$. [Si denoti con d il massimo comun divisore tra d_0 e d_1. Si ponga $a_i = d_i/d$.]

Esercizio 4.3. Sia k un campo. Nel seguito le variabili menzionate x_i hanno grado 1.

(1) Si provi che $\mathbb{P}^1_k$ e $\operatorname{Proj} k[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 - x_1 x_2)$ sono k-schemi isomorfi.
(2) Si provi che $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ e $\operatorname{Proj} \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)$ non sono $\mathbb{R}$-schemi isomorfi.
(3) Si provi che $\mathbb{P}_k(1,1,2)$ e $\operatorname{Proj} k[x_0, x_1, x_2, x_3]/(x_0^2 - x_1 x_2)$ sono k-schemi isomorfi.
(4) Si provi che $\mathbb{P}_k(1,1,2)$ e $\mathbb{P}^2_k$ non sono k-schemi isomorfi.
(5) Si provi che non esiste alcun polinomio omogeneo $f \in k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ tale che $\operatorname{Proj} k[x_0, x_1, x_2, x_3]/(f)$ e $\mathbb{P}_k(1,1,3)$ sono k-schemi isomorfi.
(6) Si provi che $\mathbb{P}^1_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{P}^1_k$ e $\operatorname{Proj} k[x_0, x_1, x_2, x_3]/(x_0 x_1 - x_2 x_3)$ sono k-schemi isomorfi.

[Suggerimento: aiutatevi con (o fatevi aiutare da) quanto visto nel corso di Geometria Proiettiva o di Curve e Superfici Algebriche. Per esempio, per (1) si usi (una versione schematica del)la proiezione da un punto di una conica su una retta, mentre per (6) si usi (una versione schematica del)l'immersione di Segre. Vi potrebbero essere utili il Lemma 2.3.43 e il Corollario 2.3.44 del libro di Liu, che potete dare per buoni.]

[Per aiutarmi nella correzione, vi chiedo di usare le seguenti notazioni: in (3) e (4) $\mathbb{P}_k(1,1,2) = \operatorname{Proj} k[y_0, y_1, z]$ dove $\deg y_0 = \deg y_1 = 1$ e $\deg z = 2$, mentre in (5) $\mathbb{P}_k(1,1,3) = \operatorname{Proj} k[y_0, y_1, z]$ dove $\deg y_0 = \deg y_1 = 1$ e $\deg z = 3$.]

Esercizio 4.4. Sia k un anello fissato.

(1) Sia n un numero naturale. Per ciascun $i = 0, \dots, n$, considerate il k-morfismo $\pi_i \colon (\mathbb{A}^{n+1}_k)_{x_i} \to (\mathbb{P}^n_k)_{x_i}$ dato dall'inclusione $k[x_0, \dots, x_n]_{(x_i)} \subseteq k[x_0, \dots, x_n]_{x_i}$. Dimostrate che questi morfismi si incollano e danno un morfismo di k-schemi $\pi \colon \mathbb{A}^{n+1}_k \setminus Z \to \mathbb{P}^n_k$, dove Z è il chiuso di $\mathbb{A}^{n+1}_k$ dato dall'immagine dell'immersione chiusa $\operatorname{Spec} k \hookrightarrow \mathbb{A}^{n+1}_k$ corrispondente all'omomorfismo suriettivo di k-algebre $k[x_0, \dots, x_n] \to k$ che manda ciascun x_i in 0.
(2) Sia X uno schema su k e siano $f_0, \dots, f_n$ degli elementi di $\mathcal{O}_X(X)$. Si consideri il k-morfismo $f \colon X \to \mathbb{A}^{n+1}_k$ associato all'omomorfismo di k-algebre $k[x_0, \dots, x_n] \to \mathcal{O}_X(X)$ dato da $x_i \mapsto f_i$. Si dimostri che f ha valori in $\mathbb{A}^{n+1}_k \setminus Z$ se e solo se per ogni punto $p \in X$ l'ideale generato dai germi $(f_0)_p, \dots, (f_n)_p$ coincide con $\mathcal{O}_{X,p}$. In tal caso, si denoti con $(f_0 : \cdots : f_n)$ il k-morfismo $X \to \mathbb{P}^n_k$ ottenuto componendo $f \colon X \to \mathbb{A}^{n+1}_k \setminus Z$ e $\pi \colon \mathbb{A}^{n+1}_k \setminus Z \to \mathbb{P}^n_k$.
(3) Ora si supponga $k = \mathbb{R}$ e $n = 1$. Si descrivano tutte le fibre dell'$\mathbb{R}$-morfismo $(t : t^2 + 1) \colon \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$, dove $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[t]$. La descrizione deve essere completamente esplicita: ciascuna fibra deve essere identificata come l'unione disgiunta di schemi della forma $\operatorname{Spec} A$, dove A è un campo oppure un anello del tipo $F[x]/(x^2)$ dove F è un campo.

Esercizio 4.5. Sia k un campo algebricamente chiuso. Si considerino i seguenti sottoschemi chiusi di $\mathbb{P}^2_k$:

$$X = \operatorname{Proj} k[x_0, x_1, x_2]/(x_1^2(x_0 - x_1)^2 - x_0^2 x_2^2 - x_0 x_1 x_2^2) \quad \text{e} \quad Y = \operatorname{Proj} k[x_0, x_1, x_2]/(x_1 - 3x_0).$$

(1) Si dica se X è integro/ridotto/irriducibile/connesso/regolare. Si determini la dimensione di X. Per ogni punto chiuso p di X, si stabilisca la dimensione dell'anello locale $\mathcal{O}_{X,p}$, se $\mathcal{O}_{X,p}$ è ridotto, se $\mathcal{O}_{X,p}$ è un dominio, se $\mathcal{O}_{X,p}$ è regolare. (Dovete dare per buono il Lemma 2.3.43 e il Corollario 2.3.44 del libro di Liu.)

(2) Si ponga $Z = X \times_{\mathbb{P}^2_k} Y$. Si studi la geometria di Z, in particolare per ciascuna componente connessa W di Z si dica se W è ridotta/integra/irriducibile/regolare e si provi a identificare W con un k-schema "noto".

(3) Z è affine?

(4) Si calcoli la dimensione del k-spazio vettoriale $\mathcal{O}_Z(Z)$.

(Non si dimentichi di considerare i vari casi al variare della caratteristica del campo k!)

Università di Bologna
Dipartimento di Matematica
A.A. 2022/23, Secondo Semestre

Andrea Petracci
a [dot] petracci (nospam) [at] unibo [dot] it
`https://www.dm.unibo.it/~andrea.petracci3/2023Schemi/`

Teoria degli Schemi — Foglio di esercizi 5
da consegnare almeno 3 giorni prima dell'esame orale

Potete dare per buono qualsiasi risultato di algebra commutativa che trovate nella parte teorica dei libri che vi ho consigliato.

Se A è un anello, allora diremo che una A-algebra B è *piatta* se B è un A-modulo piatto; in tal caso diremo che l'omomorfismo di anelli $A \to B$ è piatto. Un morfismo di schemi $f\colon X \to Y$ si dice *piatto* se per ogni punto $x \in X$ l'omomorfismo locale $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$, corrispondente a f, è un omomorfismo piatto di anelli. Il Teorema 7.1 del libro "Commutative ring theory" di Matsumura, applicato con $M = B$, dice che, nel caso in cui $A \to B$ è un omomorfismo di anelli, B è piatto su A se e solo se il morfismo di schemi $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ è piatto.

(La prossima definizione è leggermente sbagliata, ma sorvoliamo.) Un morfismo di schemi $f\colon X \to Y$ si dice *liscio (smooth)* se è di tipo finito, è piatto e per ogni punto $y \in Y$ la fibra X_y è geometricamente regolare sul campo $\kappa(y)$.

Esercizio 5.1. Per ciascuno dei seguenti morfismi di schemi si dica se è di tipo finito, finito, affine, proprio, proiettivo, un'immersione aperta, un'immersione chiusa, piatto, liscio, iniettivo, universalmente iniettivo, suriettivo, chiuso, universalmente chiuso, un omeomorfismo, universalmente un omeomorfismo.

(1) $\operatorname{Spec} \mathbb{Q} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$
(2) $\operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} R$, dove R è un dominio a valutazione discreta e K è il campo delle frazioni di R.
(3) $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ indotto dall'unico omomorfismo di anelli $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
(4) $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ indotto dall'unico omomorfismo di anelli $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
(5) $\operatorname{Proj} \mathbb{Z}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 + 3x_1^2 + 6x_2^2) \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ dove $\deg x_0 = \deg x_1 = \deg x_2 = 1$
(6) $\operatorname{Proj} \mathbb{Z}[x_0, x_1, x_2]/(x_0x_2^2 - x_1^3 - x_0^2x_1 - x_0^3) \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ dove $\deg x_0 = \deg x_1 = \deg x_2 = 1$
(7) $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x(x^2 - 1)) \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x]$
(8) $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_4 \to \operatorname{Spec} \mathbb{F}_2$
(9) $\operatorname{Spec} L \to \operatorname{Spec} K$, dove $L = \mathbb{F}_2(t)$ è il campo delle funzioni razionali nell'indeterminata t a coefficienti in $\mathbb{F}_2$ e K è il sottocampo di L costituito dalle funzioni razionali in cui compaiono solo potenze pari di t. [Probabilmente conviene osservare che K è un'estensione puramente trascendente di $\mathbb{F}_2$ generata da $u = t^2$ e che inoltre $L \supseteq K$ è un'estensione puramente inseparabile di grado 2.] [Se non avete approfondite conoscenze di teoria dei campi, evitate di chiedervi se questo morfismo di schemi è universalmente iniettivo o universalmente un omeomorfismo.]
(10) $\operatorname{Proj} A[x_0, x_1]/(x_0x_1, x_1^2) \to \operatorname{Spec} A$, dove $A = \mathbb{Q}[x, y]/(x^3y, x^2y^2)$, $\deg x_0 = 2$, $\deg x_1 = 3$.

[Suggerimento: per risparmiare spazio e tempo, vi conviene scrivere all'inizio quali sono le implicazioni sempre vere tra le 16 proprietà considerate. Queste implicazioni possono date per buone nell'analisi dei 10 casi.]

Esercizio 5.2. Sia X uno schema localmente noetheriano e sia F un fascio coerente su X.

(1) Se $x \in X$ è tale che la spiga F_x è nulla, allora esiste un intorno aperto U di x in X tale che il fascio $F|_U$ è nullo.
(2) Si dimostri che il supporto di F, cioè l'insieme $\operatorname{Supp} F := \{x \in X \mid F_x \neq 0\}$, è chiuso in X.
(3) Si consideri la funzione $\nu_F\colon X \to \mathbb{Z}$ definita da

$$\nu_F(x) = \dim_{\kappa(x)} F_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x)$$

per ogni punto $x \in X$.
  (i) Si dimostri che ν_F è semicontinua superiormente, ovvero che per ogni $n \in \mathbb{Z}$ l'insieme $U_n := \{x \in X \mid \nu_F(x) \leq n\}$ è aperto in X.
  (ii) Si dimostri che se F è piatto su X allora ν_F è localmente costante.
  (iii) Si dimostri che se X è ridotto e ν_F è localmente costante allora F è localmente libero.
  (iv) Si costruisca un esempio in cui F non è localmente libero e ν_F è costante.

Esercizio 5.3. Leggete le sezioni 11.5 e 11.6 del libro *Algebraic Geometry I: Schemes* di Görtz e Wedhorn.

(1) Sia X uno spazio topologico, sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X. Usiamo le abbreviazioni $U_{ij} = U_i \cap U_j$ e $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$ per ogni $i, j, k \in I$. Si fissi G un fascio di gruppi non necessariamente abeliani su X. Un 1-*cociclo* è una tupla $\{g_{ij}\}_{(i,j) \in I \times I}$ tale che:
  - per ogni coppia di indici $(i, j) \in I \times I$, $g_{ij} \in G(U_{ij})$,

- per ogni terna di indici $(i,j,k) \in I \times I \times I$

$$g_{ki}|_{U_{ijk}} = g_{kj}|_{U_{ijk}} \cdot g_{ji}|_{U_{ijk}} \quad \text{in } G(U_{ijk}).$$

(Segue che $g_{ii} = 1$ in $G(U_i)$ e $g_{ji} = g_{ij}^{-1}$ in $G(U_{ij})$.) L'insieme degli 1-cocicli si indica con $\check{Z}^1(\mathcal{U}, G)$. Due 1-cocicli $\{g_{ij}\}$, $\{g'_{ij}\}$ in $\check{Z}^1(\mathcal{U}, G)$ si dicono *equivalenti* se esiste una tupla $\{a_i\}_{i \in I}$ di sezioni $a_i \in G(U_i)$ tale che

$$a_i|_{U_{ij}} \cdot g_{ij} = g'_{ij} \cdot a_j|_{U_{ij}}$$

per ogni $i,j \in I$. Si dimostri che essere equivalenti è una relazione di equivalenza sull'insieme dei cocicli $\check{Z}^1(\mathcal{U}, G)$. Si denoti con $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, G)$ l'insieme quoziente; esso è un insieme puntato, nel senso che è un insieme in cui c'è un elemento speciale, dato dalla classe del cociclo costituito dalla tupla degli elementi neutri.

(2) Sia X uno spazio topologico, sia G un fascio di gruppi non necessariamente abeliani su X, sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X. Se X è un elemento di $\mathcal{U}$, allora si provi che l'insieme $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, G)$ contiene solo un elemento. [Suggerimento: supponiamo $X = U_{i_0}$ per uno specifico $i_0 \in I$ e si ricordi che per ogni $j \in I$ vale $U_{i_0 j} = U_j$.]

(3) Sia X uno spazio topologico, sia G un fascio di gruppi non necessariamente abeliani su X, siano $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ e $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ due ricoprimenti aperti di X tali che $\mathcal{V}$ è *piú fine* di $\mathcal{U}$; quindi esiste una funzione di raffinamento $\tau \colon \Lambda \to I$ tale che per ogni $\lambda \in \Lambda$ vale $V_\lambda \subseteq U_{\tau(\lambda)}$. Si consideri

$$\tau^* \colon \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, G) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{V}, G)$$

data da

$$[\{g_{ij}\}_{i,j \in I}] \mapsto \left[\left\{ g_{\tau(\lambda),\tau(\mu)}|_{V_{\lambda\mu}} \right\}_{\lambda,\mu \in \Lambda} \right].$$

- Si provi che τ^* è ben definita e che manda l'elemento speciale di $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, G)$ nell'elemento speciale di $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{V}, G)$.

Si potrebbe provare che τ^* è iniettiva e che τ^* non dipende dalla scelta di τ. In altre parole, se $\sigma \colon \Lambda \to I$ è un'altra funzione di raffinamento, allora la funzione $\sigma^* \colon \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, G) \to \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{V}, G)$ indotta da σ coincide con τ^*. Si consideri il limite diretto

$$\check{\mathrm{H}}^1(X, G) := \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, G)$$

al variare di tutti i ricoprimenti aperti di X. Esso è un insieme puntato ed è l'unione di tutti gli insiemi $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, G)$.

(4) Sia X uno spazio topologico e sia G un fascio di gruppi abeliani su X. Si provi che, per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di X, gli insiemi puntati $\check{Z}^1(\mathcal{U}, G)$ e $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, G)$ hanno una naturale struttura di gruppo abeliano in cui l'elemento speciale è l'elemento neutro. Si provi inoltre che $\check{\mathrm{H}}^1(X, G)$ ha una naturale struttura di gruppo abeliano in cui l'elemento speciale è l'elemento neutro.

(5) Sia X uno spazio topologico, sia G un fascio di gruppi abeliani (denotati additivamente) su X, siano U e V due aperti di X tali che $X = U \cup V$. Si consideri l'omomomorfismo di gruppi abeliani

$$\partial \colon G(U) \oplus G(V) \longrightarrow G(U \cap V)$$

dato da $\partial(u, v) = u|_{U \cap V} - v|_{U \cap V}$ per ogni $u \in G(U)$ e $v \in G(V)$. Se si considera il ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U, V\}$ di X, allora si provi che $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, G)$ è naturalmente isomorfo a $\operatorname{coker} \partial$.

(6) Si consideri lo spazio topologico $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea. Si considerino gli aperti $U = (-1, +\infty)$ e $V = (-\infty, 1)$ di $\mathbb{R}$ e il ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U, V\}$. Sia $\underline{\mathbb{Z}}$ il fascio costante su $\mathbb{R}$ associato al gruppo $\mathbb{Z}$. Si calcoli $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}})$.

(7) Si consideri lo spazio topologico $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ dotato della topologia euclidea. Si considerino gli aperti $U = S^1 \smallsetminus \{1\}$ e $V = S^1 \smallsetminus \{-1\}$ e il ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U, V\}$. Sia $\underline{\mathbb{Z}}$ il fascio costante su S^1 associato al gruppo $\mathbb{Z}$. Si calcoli $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}})$.

(8) Sia k un campo. Si consideri lo schema $\mathbb{P}^1_k = \operatorname{Proj} k[x_0, x_1]$, con $\deg x_0 = \deg x_1 = 1$. Si considerino le carte affini standard di $\mathbb{P}^1_k$, $U_0 = D_+(x_0)$ e $U_1 = D_+(x_1)$, che sono entrambe isomorfe a $\mathbb{A}^1_k$. Si consideri il ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$ di $\mathbb{P}^1_k$. Si fissi $d \in \mathbb{Z}$ e si consideri il fascio di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}$-moduli (e quindi di conseguenza fascio di gruppi abeliani) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(d)$ su $\mathbb{P}^1_k$. Si provi che $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(d))$ è in modo naturale uno spazio vettoriale su k e se ne calcoli la dimensione.

(9) Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio anellato e sia $r \in \mathbb{N}$ un intero. Si consideri il fascio $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_X)$ su X tale che per ogni aperto $U \subseteq X$ le sezioni di $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_X)$ su U sono esattamente gli elementi di $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_X(U))$, cioè le matrici invertibili $r \times r$ con coefficienti nell'anello (commutativo!) $\mathcal{O}_X(U)$.

- Per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di X, si costruisca una bigezione naturale tra $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_X))$ e l'insieme delle classi di isomorfismo dei fasci localmente liberi di $\mathcal{O}_X$-moduli di rango r che sono $\mathcal{U}$-trivializzabili, cioè i fasci di $\mathcal{O}_X$-moduli $\mathcal{E}$ tali che per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste un isomorfismo di $\mathcal{O}_U$-moduli tra $\mathcal{E}|_U$ e $\mathcal{O}_U^{\oplus r}$.

- Si costruisca una bigezione naturale tra $\check{\mathrm{H}}^1(X, \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_X))$ e l'insieme delle classi di isomorfismo dei fasci localmente liberi di $\mathcal{O}_X$-moduli di rango r.

(10) Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio anellato. Si costruisca un isomorfismo naturale tra $\check{\mathrm{H}}^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ e il gruppo di Picard di $(X, \mathcal{O}_X)$.

Esercizio 5.4.

(1) Se A è un dominio a ideali principali e r è un numero naturale, allora si provi che ogni fascio localmente libero sullo schema $X = \operatorname{Spec} A$ di rango r è libero, cioè isomorfo a $\mathcal{O}_X^{\oplus r}$.

(2) Sia k è un campo. Si provi che ogni fascio invertibile su $\mathbb{P}^1_k$ è isomorfo a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(d)$ per qualche $d \in \mathbb{Z}$. Si provi che $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^1_k)$ è un gruppo ciclico infinito.

(3) Sia $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Si consideri $I \subseteq A$ l'ideale generato da 2 e $1 + \sqrt{-5}$. Sia $X = \operatorname{Spec} A$.
   (a) Si provi che I è un ideale massimale di A.
   (b) Si provi che I non è un ideale principale di A.
   (c) Si provi che I^2 coincide con l'ideale di A generato da 2.
   (d) Si provi che I è un addendo diretto di $A^{\oplus 2}$.
   (e) Si provi che il gruppo abeliano $\operatorname{Pic}(X)$ ha un elemento di ordine 2.

Esercizio 5.5. Sia k un campo.

(1) Si consideri la k-algebra $S = k[x, y, x_0, x_1]/(xx_1 - yx_0)$ con $\mathbb{N}$-graduazione data da $\deg x = \deg y = 0$ e $\deg x_0 = \deg x_1 = 1$. Si ponga $X = \operatorname{Proj} S$, dotato del morfismo ovvio su $\operatorname{Spec} k$.
   (i) Si provi che X è l'unione di due aperti isomorfi a $\mathbb{A}^2_k$. (Per il seguito, è una buona idea dare dei nomi a queste due copie di $\mathbb{A}^2_k$ e alle loro coordinate standard.)
   (ii) Si dica se X è un k-schema proiettivo.
   (iii) Si consideri il piano affine $\mathbb{A}^2_k = \operatorname{Spec} k[x, y]$ e si consideri il morfismo di k-schemi $\pi \colon X \to \mathbb{A}^2_k$ dato dall'inclusione di k-algebre $k[x, y] \hookrightarrow S$. Si provi che π è un morfismo proiettivo.
   (iv) Si determini esplicitamente la fibra rispetto a π di qualsiasi punto k-razionale di $\mathbb{A}^2_k$. In particolare, se E è la fibra del punto k-razionale di $\mathbb{A}^2_k$ corrispondente all'ideale massimale (x, y) di $k[x, y]$, allora si provi che E è isomorfo a $\mathbb{P}^1_k$ come k-schema.
   (v) Si provi che esiste un aperto non vuoto $V \subseteq \mathbb{A}^2_k$ tale che la restrizione $\pi|_{\pi^{-1}(V)} \colon \pi^{-1}(V) \to V$ è un isomorfismo di k-schemi. Si determini il piú grande aperto V che soddisfa questa proprietà.
   (vi) Sia $\mathcal{I}$ il fascio di ideali su X che corrisponde all'immersione chiusa $i \colon E \hookrightarrow X$. Si consideri il quoziente $\mathcal{C} = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$, che è un fascio coerente su X supportato su E. Si provi che $\mathcal{C}$, se pensato come fascio coerente su E, è un fascio invertibile su E. Si determini un $d \in \mathbb{Z}$ tale che tramite l'isomorfismo tra E e $\mathbb{P}^1_k$ il fascio invertibile $\mathcal{C}$ su E corrisponda a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(d)$. [Suggerimento: si scriva esplicitamente la funzione di transizione del fascio invertibile $\mathcal{C}$ rispetto alle due carte di X.]

(2) (Facoltativo, da fare solo se vi avanza tempo) Si consideri la k-algebra $A = k[x, y, z]/(xy - z^2)$ e la k-algebra

$$S = k[x, y, z, x_0, x_1, x_2]/(xy - z^2, x_0x_1 - x_2^2, yx_0 - xx_1, zx_0 - xx_2, zx_1 - yx_2)$$

con $\mathbb{N}$-graduazione data da $\deg x = \deg y = 0$ e $\deg x_0 = \deg x_1 = \deg x_2 = 1$. Si ponga $X = \operatorname{Proj} S$.
   (a) Si provi che X è l'unione di due aperti isomorfi a $\mathbb{A}^2_k$.
   (b) Si consideri la superficie $\operatorname{Spec} A$ e si consideri il morfismo di k-schemi $\pi \colon X \to \operatorname{Spec} A$ dato dall'inclusione di k-algebre $A \hookrightarrow S$. Si determini esplicitamente la fibra rispetto a π di qualsiasi punto k-razionale di $\operatorname{Spec} A$. In particolare, se E è la fibra del punto k-razionale di $\operatorname{Spec} A$ corrispondente all'ideale massimale $Ax + Ay + Az$ di A, allora si provi che E è isomorfo a $\mathbb{P}^1_k$ come k-schema.
   (c) Si provi che esiste un aperto non vuoto $V \subseteq \operatorname{Spec} A$ tale che la restrizione $\pi|_{\pi^{-1}(V)} \colon \pi^{-1}(V) \to V$ è un isomorfismo di k-schemi. Si determini il piú grande aperto V che soddisfa questa proprietà.
   (d) Sia $\mathcal{I}$ il fascio di ideali su X che corrisponde all'immersione chiusa $i \colon E \hookrightarrow X$. Si consideri il quoziente $\mathcal{C} = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$, che è un fascio coerente su X supportato su E. Si provi che $\mathcal{C}$, se pensato come fascio coerente su E, è un fascio invertibile su E. Si determini un $d \in \mathbb{Z}$ tale che tramite l'isomorfismo tra E e $\mathbb{P}^1_k$ il fascio invertibile $\mathcal{C}$ su E corrisponda a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(d)$.