TEORIA DEGLI SCHEMI

Università di Bologna, Dipartimento di Matematica
Anno accademico 2023/24, Secondo Semestre

Andrea Petracci
a [dot] petracci (nospam) [at] unibo [dot] it
`https://www.dm.unibo.it/~andrea.petracci3/2024Schemi/`

Aggiornato il 2 maggio 2024

Prerequisiti

Oltre ai corsi obbligatori di algebra e geometria della laurea triennale, si richiede che chi voglia seguire questo corso conosca alcuni argomenti di base di algebra commutativa e di geometria algebrica; piú precisamente:

- algebra commutativa (come trattata nel corso *06689 - Algebra commutativa*): anelli, ideali, moduli, moduli di frazioni, prodotti tensoriali di moduli, piattezza, anelli noetheriani e artiniani, estensioni finite e intere, Nullstellensatz, cenni di teoria della dimensione. Referenze: [AM69, capitoli 1-3, 5-8 e cenni del capitolo 11], [Mat89, capitoli 1-5, 7, 13], [Eis95, capitoli 1,2,4,8,13], [Rei95].
- geometria proiettiva (come trattata nel corso *54777 - Geometria proiettiva*): spazio proiettivo, carte affini, coordinate omogenee, proiettività, (dis)omogeneizzazione di polinomi, ipersuperfici algebriche affini e proiettive, quadriche e coniche, studio delle singolarità delle curve algebriche piane, una qualche definizione di molteplicità di intersezione tra due curve, enunciato del teorema di Bezout. Referenze: [Ser00, capitoli 3,4], [FFP16].
- geometria algebrica "classica" (come trattata nel corso *96733 - Curve e superfici algebriche*): topologia di Zariski su k^n e su $\mathbb{P}^n(k)$ per un campo algebricamente chiuso k, Nullstellensatz, corrispondenza tra ideali massimali/primi/radicali e punti/chiusi irriducibili/chiusi, varietà affini e (quasi-)proiettive, funzioni regolari, morfismi, equivalenza tra la categoria delle varietà affini e la categoria delle k-algebre ridotte di tipo finito, prodotti, immersioni di Segre e di Veronese, funzioni e mappe razionali, equivalenza tra la categoria i cui oggetti sono le varietà irriducibili e le cui frecce sono le mappe razionali dominanti e la categoria delle estensioni finitamente generate di campi di k, dimensione, spazio tangente e liscezza. Referenze: [Har77, sezioni I.1-5], [SKKT00, capitoli 1-7], [Rei88], [Sha13, sezioni 1.1-6, 2.1].

Inoltre è richiesta la conoscenza di alcune nozioni di base di teoria delle categorie: categorie, funtori, trasformazioni naturali, funtori pieni/fedeli/pienamente fedeli, equivalenze di categorie, prodotti e coprodotti, oggetti terminali e iniziali. Per questi argomenti suggerisco i primi capitoli di [KS06] e [Mac71].

Programma preliminare

Il corso è un'introduzione alla teoria degli schemi, sviluppata da Alexander Grothendieck. Gli argomenti trattati includeranno: fasci, schemi, proprietà globali e locali degli schemi, fasci coerenti, divisori, differenziali.

Ci baseremo sostanzialmente sul capitolo II di [Har77] e sui capitoli 2-7 di [Liu02]. Altre possibili referenze possono essere i libri [EH00, GW20, Mum99].

La referenza rigorosa e fondazionale della teoria degli schemi, scritta dallo stesso Grothendieck (con l'aiuto di Jean Dieudonné), è la serie di volumi *Éléments de géométrie algébrique*, comunemente nota con la sigla EGA. Questi volumi delle Publications Mathématiques de l'IHÉS possono essere scaricati liberamente al `http://www.numdam.org/search/elements%20geometrie%20algebrique-%22Grothendieck,%20Alexander%22-qn/`. Un'altra referenza rigorosa e onnicomprensiva della teoria degli schemi (e di tante altre cose) è il blog collaborativo `https://stacks.math.columbia.edu` mantenuto da Aise Johan de Jong. Sconsiglio a chi si approccia per la prima volta alla teoria degli schemi di studiare EGA e Stacks Project, perché queste due opere enciclopediche non forniscono intuito geometrico né esempi. D'altra parte queste due opere sono molto utili a chi ha già esperienza e fa ricerca.

Perché la teoria degli schemi?

La teoria degli schemi, sviluppata da Alexander Grothendieck negli anni '60 del secolo scorso, è il linguaggio moderno e rigoroso con cui si studia/fa/scrive la geometria algebrica oggi. Esso unifica la geometria algebrica classica (ovvero lo studio dei luoghi di zeri di equazioni polinomiali a coefficienti in un campo algebricamente chiuso) e la teoria algebrica dei numeri (ovvero lo studio del comportamento degli ideali primi rispetto alle estensioni finite di campi del campo dei numeri razionali), permettendo di dare intuizione geometrica all'algebra commutativa.

Vale la seguente analogia: il calcolo differenziale (cioè lo studio delle funzioni differenziabili tra aperti di $\mathbb{R}^n$ svolto ad Analisi 2) sta alla geometria differenziale (cioè lo studio delle varietà differenziabili), come l'algebra commutativa (cioè lo studio degli anelli commutativi) sta alla teoria degli schemi. Infatti, in modo molto vago, si può dire che uno schema è un "oggetto geometrico" che localmente si comporta come un anello.

Alcuni vantaggi della teoria degli schemi sono: poter considerare funzioni nilpotenti per poter parlare rigorosamente di "molteplicità", poter considerare la stessa varietà su campi diversi, poter considerare oggetti "aritmetici" (ovvero definiti su $\mathbb{Z}$ o sull'anello degli interi di un campo di numeri) utili per applicare tecniche geometriche a problemi di equazioni diofantee.

Oltre alle introduzioni che potete leggere nei libri menzionati sopra, potete dare uno sguardo a questo articoletto scritto da David Mumford `https://www.dam.brown.edu/people/mumford/blog/2014/Grothendieck.html`.

Riferimenti bibliografici

[AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.
[EH00] David Eisenbud and Joe Harris. *The geometry of schemes*, volume 197 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 2000.
[Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.
[FFP16] Elisabetta Fortuna, Roberto Frigerio, and Rita Pardini. *Projective geometry*, volume 104 of *Unitext.* Springer, 2016. Solved problems and theory review.
[GW20] Ulrich Görtz and Torsten Wedhorn. *Algebraic geometry I. Schemes—with examples and exercises.* Springer Studium Mathematik—Master. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2020.
[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
[KS06] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Categories and sheaves*, volume 332 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer-Verlag, Berlin, 2006.
[Liu02] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics.* Oxford University Press, Oxford, 2002. Translated from the French by Reinie Erné, Oxford Science Publications.
[Mac71] Saunders MacLane. *Categories for the working mathematician.* Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971.
[Mat89] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1989. Translated from the Japanese by M. Reid.
[Mum99] David Mumford. *The red book of varieties and schemes*, volume 1358 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, expanded edition, 1999. Includes the Michigan lectures (1974) on curves and their Jacobians, With contributions by Enrico Arbarello.
[Rei88] Miles Reid. *Undergraduate algebraic geometry*, volume 12 of *London Mathematical Society Student Texts.* Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
[Rei95] Miles Reid. *Undergraduate commutative algebra*, volume 29 of *London Mathematical Society Student Texts.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
[Ser00] Edoardo Sernesi. *Geometria 1.* Bollati Boringhieri, 2000.
[Sha13] Igor R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry. 1.* Springer, Heidelberg, third edition, 2013. Varieties in projective space.
[SKKT00] Karen E. Smith, Lauri Kahanpää, Pekka Kekäläinen, and William Traves. *An invitation to algebraic geometry.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2000.

Lezioni

(1) **20 Febbraio 2024.** Introduzione al corso. Motivazioni alla teoria degli schemi: funzioni nilpotenti per parlare di molteplicità (esempi di intersezione nel piano di curve tangenti), geometria aritmetica. Convenzioni su anelli e omomorfismi di anelli. Ogni omomorfismo da un campo in un anello non zero è iniettivo. $\mathbb{Z}$ (risp. 0) è l'oggetto iniziale (risp. terminale) nella categoria degli anelli. Notazioni $\mathbb{Z}[\frac{1}{f}] = \mathbb{Z}[f^{-1}]$, $\mathbb{F}_p$, $\mathbb{Z}_{(p)}$, $\mathbb{Z}_p$. Definizione di modulo finito. Definizione delle categorie comma. Categoria delle algebre su un anello. Una A-algebra è in modo naturale un A-modulo. Definizione di algebra di tipo finito e di algebra intera. Un algebra è finita se e solo se è di tipo finito e intera (senza dimostrazione). Esempi: $A \twoheadrightarrow A/I$, $A \hookrightarrow A[x]$, $A \to A[x]/(x^3 + x^2 + 1)$, $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[x]/(2x - 1)$, $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_{(2)} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}[\![x]\!]$, $\mathbb{Q} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$.

Topologia di Zariski sullo spettro primo di un anello. Il radicale di un ideale è l'intersezione dei primi che lo contengono (senza dimostrazione). Chiusura di un sottoinsieme di $\operatorname{Spec} A$ (lasciato per esercizio). Un punto di $\operatorname{Spec} A$ è chiuso se e solo se è un ideale massimale.

Definizione di spazio topologico irriducibile. Uno spazio topologico non vuoto è irriducibile se e solo se ogni aperto non vuoto è connesso (senza dimostrazione). Se X è uno spazio topologico, $Y \subseteq X$ è un sottoinsieme irriducibile e $Y \subseteq Z \subseteq \overline{Y}$, allora Z è irriducibile (senza dimostrazione). $\mathrm{V}(I)$ è irriducibile se e solo se $\sqrt{I}$ è primo (senza dimostrazione). Definizione di componente irriducibile. Le componenti irriducibili di uno spazio topologico sono chiuse.

Corrispondenze biunivoche: tra punti chiusi di $\operatorname{Spec} A$ e ideali massimali di A; tra punti di $\operatorname{Spec} A$, sottoinsiemi chiusi irriducibili di $\operatorname{Spec} A$ e ideali primi di A; tra sottoinsiemi chiusi di $\operatorname{Spec} A$ e ideali radicali di A; tra componenti irriducibili di $\operatorname{Spec} A$ e primi minimali di A.

(2) **22 Febbraio 2024.** $\mathrm{V}(I)$ è irriducibile se e solo se $\sqrt{I}$ è primo. Definizione di spazio topologico quasi-compatto e compatto. Se A è un anello, allora $\operatorname{Spec} A$ è quasi-compatto.

Notazioni: $\operatorname{Frac}(A)$ per un dominio A; $(A, \mathfrak{m}, k)$ anello locale. Definizione di campo residuo di un anello locale.

Localizzazioni e quozienti per ideali commutano. Definizione di campo residuo di un primo: $\kappa(\mathfrak{p}) = \operatorname{Frac}(A/\mathfrak{p}) = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. Esempi: campo, anello artiniano, $\mathbb{Z}$, $k[x]$ dove k è un campo (anche non algebricamente chiuso).

Lemma di Gauss (senza dimostrazione). Caratterizzazione degli ideali primi di $A[x]$, quando A è un PID. Primi di $k[x, y]$ e inizio dello studio dei loro anelli locali e dei loro campi residui.

(3) **27 Febbraio 2024.** Conclusione dello studio dei primi di $k[x, y]$, quando k è un campo algebricamente chiuso, dei loro anelli locali e dei loro campi residui.

Un omomorfimo di anelli induce una funzione continua tra gli spettri. Spec è un funtore controvariante dalla categoria degli anelli alla categoria degli spazi topologici.

Definizione di omomorfismo locale tra anelli locali. Non tutti gli omomorfismi tra anelli locali sono locali. Se $\mathfrak{p}$ è il contratto di $\mathfrak{q}$, allora si ha: un'iniezione dal dominio quoziente di $\mathfrak{p}$ al dominio quoziente di $\mathfrak{q}$, un omomorfismo locale dalla localizzazione in $\mathfrak{p}$ alla localizzazione in $\mathfrak{q}$, un'iniezione dal campo residuo di $\mathfrak{p}$ al campo residuo di $\mathfrak{q}$.

Un omorfismo suriettivo di anelli induce un'immersione topologica chiusa tra gli spettri e i campi residui non cambiano. L'omomorfismo di localizzazione rispetto a una parte moltiplicativa induce un'immersione topologica tra gli spettri e i campi residui non cambiano. Definizione di aperti principali dello spettro di un anello. Gli aperti principali formano una base della topologia.

Definizione di funzione polinomiale su un chiuso algebrico classico di k^n; algebra delle funzioni polinomiali: $k[X]$. Nullstellensatz relativo e corrispondenza chiusi/ideali per un chiuso algebrico classico di k^n, se k è un campo algebricamente chiuso. Se $X \subseteq k^n$ è un chiuso algebrico classico e $k = \overline{k}$, allora X coincide con i punti chiusi di $\operatorname{Spec} k[X]$ e una proprietà topologica (esprimibile solo utilizzando le parole come aperti e chiusi; per esempio: essere connesso/irriducibile/compatto) vale per X se e solo se vale per $\operatorname{Spec} k[X]$, poiché c'è una corrispondenza biunivoca tra gli aperti/chiusi di X e gli aperti/chiusi di $\operatorname{Spec} k[X]$.

Definizione di spazio topologico di Jacobson e alcune caratterizzazioni (senza dimostrazione). Un sottoinsieme aperto o chiuso di uno spazio topologico di Jacobson è di Jacobson (senza dimostrazione). Se uno spazio topologico ha un ricoprimento aperto fatto da spazi di Jacobson allora è di Jacobson (senza dimostrazione). Definizione di anello di Jacobson e alcune caratterizzazioni (senza dimostrazione). Se un anello locale è di Jacobson, allora è di dimensione zero. Teorema: un algebra di tipo finito su un anello di Jacobson è un anello di Jacobson e in questo caso la contrazione di un massimale è un massimale (senza dimostrazione). Corollario: se A è un algebra di tipo finito su $\mathbb{Z}$ o su un campo, allora A è un anello di Jacobson e c'è una bigezione tra gli aperti di $\operatorname{Spec} A$ e gli aperti di $\operatorname{Specm} A$.

(4) **29 Febbraio 2024.** Se I è un ideale di un anello A, allora l'immersione chiusa $\operatorname{Spec} A/I \hookrightarrow \operatorname{Spec} A$ è un omeomorfismo se e solo se ogni elemento di I è nilpotente.

Definizione di prefascio, prefascio separato, fascio su uno spazio topologico. Terminologia: sezioni, restrizioni. Esempi: prefascio costante, fascio costante, funzioni continue a valori in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, funzioni continue mai nulle a valori in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, funzioni olomorfe (mai nulle) su una complex manifold, funzioni regolari (mai nulle) su una varietà quasi-proiettiva classica su un campo algebricamente chiuso, sezioni di una funzione continua $E \to X$, funzioni continue in un gruppo topologico, funzioni continue e limitate a valori in $\mathbb{R}$.

Se F è un fascio allora $F(\emptyset) = 0$. Se F è un fascio e U, V sono aperti, allora c'è una successione esatta $0 \to F(U \cup V) \to F(U) \oplus F(V) \to F(U \cap V)$; generalizzazione al caso di un numero arbitrario di aperti. Se F è un fascio e U, V sono aperti disgiunti, allora $F(U \cup V)$ è isomorfo a $F(U) \oplus F(V)$.

Omomorfismi di prefasci e di fasci. Categoria dei prefasci e dei fasci. Caratterizzazione dei monomorfismi e degli epimorfismi nella categoria dei prefasci (senza dimostrazione). Caratterizzazione dei monomorfismi e degli epimorfismi nella categoria dei fasci (senza dimostrazione): $\phi \colon F \to G$ è un epimorfismo se e solo se ogni sezione di G proviene localmente da sezioni di F.

(5) **5 Marzo 2024.** Ricapitolazione su epimorfismi nella categoria dei fasci. Definizione di nucleo e immagine di omomorfismi di fasci.

Sollevamento di applicazioni qualsiasi rispetto a un rivestimento (senza dimostrazione). Se X è uno spazio topologico con una base di aperti semplicemente connessi (per esempio una varietà topologica), allora l'esponenziale $\exp\colon \mathcal{C}_{X,\mathbb{C}} \to \mathcal{C}^*_{X,\mathbb{C}}$ è un epimorfismo di fasci con nucleo isomorfo al fascio costante $\mathbb{Z}_X$; in generale non è un epimorfismo di prefasci (problema dell'esistenza del logaritmo complesso). Successione esatta esponenziale $0 \to \mathbb{Z}_X \to \mathcal{C}_{X,\mathbb{C}} \to \mathcal{C}^*_{X,\mathbb{C}} \to 0$.

Spighe e germi di un prefascio in un punto. Un omomorfismo di prefasci induce un omomorfismo sulle spighe.

Fascificazione di un prefascio. Se P è un prefascio e U è un aperto, allora $P^{\mathrm{sh}}(U)$ è un sottogruppo di $\prod_{x\in U} P_x$. Proprietà della fascificazione di un prefascio: P^{sh} è un fascio (senza dimostrazione), costruzione dell'omomorfismo universale $\eta_P\colon P \to P^{\mathrm{sh}}$, η_P induce isomorfismi sulle spighe (senza dimostrazione), ogni sezione di P^{sh} proviene localmente da P tramite η_P, proprietà di η_P nel caso in cui P sia separato o un fascio (senza dimostrazione), proprietà universale di η_P rispetto a omomorfismi da P a un fascio (senza dimostrazione). Se $\varphi\colon F \to G$ è un omomorfismo di fasci, allora $\operatorname{im}\varphi$ è la fascificazione del prefascio $U \mapsto \operatorname{im}\varphi_U$. La fascificazione del prefascio costante di gruppo abeliano G è il fascio costante di gruppo abeliano G.

Se $\varphi\colon F \to G$ è un omomorfismo di fasci, allora φ è un epi/mono/iso-morfismo nella categoria dei fasci se e solo se per ogni punto $x \in X$ φ_x è suriettivo/iniettivo/bigettivo (senza dimostrazione).

Se X è una smooth manifold di dimensione n e $x \in X$ è un punto, allora lo sviluppo di Taylor in x rispetto a delle coordinate locali centrate in x dà un omomorfismo locale suriettivo non-iniettivo di $\mathbb{R}$-algebre locali dalla spiga dei germi di funzioni reali C^∞ nel punto x all'anello $\mathbb{R}[\![t_1,\dots,t_n]\!]$: teorema di Borel e esempio di e^{-1/x^2}. Se $\mathcal{O}_X$ è il fascio delle funzioni olomorfe su $X = \mathbb{C}$, allora tramite lo sviluppo di Taylor si ha che la spiga $\mathcal{O}_{X,0}$ coincide con $\mathbb{C}\{t\}$, che è l'anello delle serie formali in $\mathbb{C}[\![t]\!]$ con raggio di convergenza positivo. Se k è un campo algebricamente chiuso, $I \subseteq k[x_1,\dots,x_n]$ è un ideale radicale, $X = Z(I) \subseteq k^n$ è il chiuso affine classico definito da I, $\mathcal{O}_X$ è il fascio delle funzioni regolari su X e $p = (a_1,\dots,a_n) \in X$ è un punto, allora la spiga $\mathcal{O}_{X,p}$ coincide con $(k[x_1,\dots,x_n]/I)_{(x_1-a_1,\dots,x_n-a_n)}$.

(6) **7 Marzo 2024.** Immagine diretta e immagine inversa di un fascio tramite un'applicazione continua; omesse le dimostrazioni che siano fasci. Il fascio grattacielo è l'immagine diretta rispetto all'inclusione di un punto. La spiga di un fascio in un punto è l'immagine inversa rispetto all'inclusione di un punto. La restrizione di un fascio a un aperto è l'immagine inversa rispetto all'inclusione dell'aperto. Se $f\colon X \to Y$ è una funzione continua, F è un fascio su Y e $x \in X$, costruzione dell'omomorfismo naturale $(f_*F)_{f(x)} \to F_x$.

Definizione del fascio $\tilde{M}$ su $\operatorname{Spec} A$, quando A è un anello e M è un A-modulo. Proprietà di $\tilde{M}$: è un prefascio di gruppi abeliani, è un fascio (senza dimostrazione), le spighe sono $M_{\mathfrak{p}}$ (senza dimostrazione), il gruppo delle sezioni su $\operatorname{Spec} A_f$ è M_f (con dimostrazione).

Se $\mathfrak{m}$ è un ideale massimale dell'anello A, allora il fascio su $\operatorname{Spec} A$ corrispondente a $A/\mathfrak{m}$ è il fascio grattacielo corrispondente a $\kappa(\mathfrak{m})$ e al punto $\mathfrak{m}$.

(7) **12 Marzo 2024.** La fascificazione di un modulo dà un funtore esatto dalla categoria degli A-moduli alla categoria dei fasci di gruppi abeliani su $\operatorname{Spec} A$. Se $A = k[x,y]$, il gruppo delle sezioni del fascio $\tilde{A}$ su $\operatorname{Spec} A \smallsetminus \mathrm{V}(x,y)$ è $k[x,y]$; collegamento con la proprietà di Hartogs. Relazione tra fascificazione di un modulo e pushforward rispetto a una funzione continua tra gli spettri indotta da un omomorfismo di anelli.

Definizione di spazi (localmente) anellati. Esempi: spazio topologico con fascio di anelli costante, spazi topologici con fascio delle funzioni continue a valori in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, smooth manifold con fascio delle funzioni C^∞, complex manifold con fascio delle funzioni olomorfe, varietà quasi-proiettiva su un campo algebricamente chiuso con fascio delle funzioni regolari, $\operatorname{Spec} A$ con fascio di struttura $\tilde{A}$.

Morfismi di spazi (localmente) anellati. Esempi. Dati due anelli, l'insieme degli omomorfismi di anelli $A \to B$ è in bigezione naturale con l'insieme dei morfismi di spazi localmente anellati da $\operatorname{Spec} B$ a $\operatorname{Spec} A$ (con dimostrazione quasi completa).

(8) **14 Marzo 2024.** Definizione di schema affine. Definizione di schema. Definizione di morfismo di schemi. La categoria degli schemi è una sottocategoria piena della categoria degli spazi localmente anellati. La categoria degli schemi affini è equivalente all'opposto della categoria degli anelli.

Definizione di schema su un anello. Categoria degli schemi su un anello. Definizione di varietà su un campo. Collegamento con le definizioni di smooth manifold, complex manifold e varietà algebrica 'astratta' 'classica' su un campo algebricamente chiuso. Definizione di spazio affine su un anello.

Un aperto di uno schema è uno schema. $\mathbb{A}^2_k \smallsetminus \mathrm{V}(x,y)$ non è uno schema affine (dimostrazione parziale). Definizione di immersione aperta e di immersione chiusa tra schemi. Definizione di sottoschema aperto. Se A è un anello locale, X è un punto e A_X è il fascio costante su X indotto da A, allora (X, A_X) è uno spazio localmente anellato ed è uno schema se e solo se A ha dimensione zero. Definizione di sottoschema chiuso. Se A è un anello, corrispondenza biunivoca tra ideali di A e sottoschemi chiusi di $\operatorname{Spec} A$ (dimostrazione parziale). Esempi di sottoschemi chiusi di $\mathbb{A}^2_k$: rette multiple, rette con punti immersi, punti grassi, intersezioni tra curve.

Definizione di anello graduato da un monoide commutativo. Esempi: $\mathbb{N}$-graduazione standard su $R[x_0,\dots,x_n]$;

$\mathbb{N}^n$-graduazione su $R[x_1, \dots, x_n]$. Definizione di modulo graduato su un anello graduato.

(9) **15 Marzo 2024.** Correzione dell'esercizio 1.3(4): calcolo delle molteplicità delle componenti irriducibili di $\operatorname{Spec} A$, cenno a ideali monomiali in $k[x_1, \dots, x_n]$ e alla loro rappresentazione in $\mathbb{N}^n$, esempi di calcolo di $\dim A_{\mathfrak{p}} = \operatorname{ht}(\mathfrak{p})$ e di $\dim A/\mathfrak{p}$. Proposizione: siano A un anello, M un A-modulo, $S \subseteq T \subseteq A$ delle parti moltiplicative, se si suppone che per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ valga $(M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ e $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset) \Rightarrow \mathfrak{p} \cap T = \emptyset$ allora si ha che l'omomorfismo di localizzazione $S^{-1}M \to T^{-1}M$ è un isomorfismo.

Definizione e proprietà di un ideale omogeneo in un anello graduato. Definizione di omogeneizzazione di un ideale. L'omogeneizzazione di un ideale I è il piú grande ideale omogeneo contenuto in I.

Se A è un anello $\mathbb{N}$-graduato: definizione dell'ideale irrilevante A_+, definizione dell'insieme $\operatorname{Proj} A$, definizione di $\mathrm{V}_+(I)$.

Se k è un campo algebricamente chiuso e $k[x_0, x_1]$ ha la $\mathbb{N}$-graduazione standard, allora $\operatorname{Proj} k[x_0, x_1]$ è in bigezione con l'unione di disgiunta di $\mathbb{P}^1(k)$ (la retta proiettiva 'classica') e di un altro punto.

Se A è un anello $\mathbb{N}$-graduato: (1) l'omogeneizzazione di un ideale primo è un ideale primo, (2) i sottoinsiemi di $\operatorname{Proj} A$ del tipo $\mathrm{V}_+(I)$ sono i chiusi di una topologia su $\operatorname{Proj} A$, detta topologia di Zariski, (3) $\mathrm{V}_+(I) \subseteq \mathrm{V}_+(J)$ se e solo se $J \cap A_+ \subseteq \sqrt{I}$, (4) $\operatorname{Proj} A$ è vuoto se e solo se $A_+ \subseteq \sqrt{0}$.

(10) **26 Marzo 2024.** $\mathbb{A}^2_k \smallsetminus \mathrm{V}(x, y)$ non è uno schema affine.

Localizzazioni omogenee di moduli graduati. Fascio indotto da un modulo graduato sul Proj e proprietà (spighe e sezioni su aperti principali). Il Proj di un anello graduato è uno schema e gli aperti principali sono schemi affini.

Lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n_R$: carte affini standard e sezioni globali del fascio di struttura. Spazi proiettivi pesati su un anello.

Un omomorfismo di anelli tra anelli $\mathbb{N}$-graduati $\varphi\colon C \to B$ che moltiplica il grado di $r \geq 1$ induce un morfismo di schemi $\operatorname{Proj} B \smallsetminus \mathrm{V}_+(\varphi(C_+)B) \to \operatorname{Proj} C$ che sugli aperti principali è dato da $C_{(h)} \to B_{\varphi(h)}$, $\frac{c}{h^n} \mapsto \frac{\varphi(c)}{\varphi(h)^n}$. Un omomorfismo suriettivo di anelli $\mathbb{N}$-graduati induce un'immersione chiusa.

(11) **4 Aprile 2024.** Proiezione da un punto di $\mathbb{P}^2_R$. Immersione di Veronese di $\mathbb{P}^n_R$. Sottoanello di Veronese d-esimo $A^{(d)}$ di un anello $\mathbb{N}$-graduato A. $\operatorname{Proj} A^{(d)}$ è isomorfo a $\operatorname{Proj} A$. Definizione di R-schema proiettivo.

Incollamento di schemi. Retta con due origini. $\mathbb{P}^n_R$ è ottenuto incollando $n+1$ copie di $\mathbb{A}^n_R$.

Definizione di twist di Serre $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(d)$ su $\mathbb{P}^n_R = \operatorname{Proj} A$ come fascificato di $A(d)$, dove $A = R[x_0, \dots, x_n]$. La restrizione $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(d)|_{U_i}$ è isomorfa a $\mathcal{O}_{U_i}$ per ogni $i = 0, \dots, n$. Funzioni di transizione dei twist di Serre.

Soluzione della versione schematica dell'Esercizio 2.5. La versione schematica del fascio F in Esercizio 2.5(2) è $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_R}(d)$. L'ideale generato x_1^e in A è isomorfo, come A-modulo $\mathbb{Z}$-graduato a $A(-e)$; quindi la versione schematica del fascio G in Esercizio 2.5(3) è isomorfo a $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_R}(-e)$.

(12) **9 Aprile 2024.** Costruzione di morfismi tra schemi incollando morfismi tra schemi affini. Se X è uno schema e Y è uno schema affine, allora l'insieme dei morfismi di schemi da X a Y è in bigezione naturale con l'insieme degli omomorfismi di anelli da $\mathcal{O}_Y(Y)$ a $\mathcal{O}_X(X)$. Se R è un anello, allora la categoria degli R-schemi è equivalente alla categoria slice degli schemi su $\operatorname{Spec} R$.

Prodotti, coprodotti, pull-back (o prodotti fibrati) e pushout in una categoria. Prodotti fibrati nella categoria degli insiemi e nella categoria degli spazi topologici: caso particolare in cui una o due frecce sono l'inclusione. Prodotto tensoriale di algebre su un anello: definizione e proprietà universale come coprodotto/pushout. Esempi di prodotti tensoriali di algebre su un anello: 1) anello dei polinomi, 2) quoziente, 3) algebra di tipo finito, 4) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ è isomorfo come $\mathbb{R}$-algebra a $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

(13) **11 Aprile 2024.** Esempi di prodotti tensoriali di algebre su un anello: comportamento di serie formali, omomorfismi suriettivi, localizzazioni; il campo residuo $\kappa(\mathfrak{p})$ è isomorfo a $A_{\mathfrak{p}} \otimes_A A/\mathfrak{p}$.

Esistenza dei prodotti fibrati (pullback) nella categoria degli schemi: costruzione esplicita tramite aperti affini, senza verificare le condizioni di cociclo per gli incollamenti. Esempi di prodotti fibrati di schemi: immersioni chiuse, spazi affini e spazi proiettivi su uno schema. Definizione di morfismo proiettivo.

Se x è un punto di uno schema X, costruzione dei morfismi di schemi $\operatorname{Spec} \kappa(x) \hookrightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to X$. Definizione di fibra schematica. Lo spazio topologico soggiacente della fibra schematica è la fibra topologica. Fibre del morfismo $\mathbb{A}^1_k \to \mathbb{A}^1_k$ dato da $u \mapsto v^2$. Fibre del morfismo $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Definizione di indice di ramificazione e di indice di inerzia per un anello di numeri (cioè la chiusura intera di $\mathbb{Z}$ in un estensione finita di campi di $\mathbb{Q}$). Enunciato del teorema $[K : \mathbb{Q}] = \sum_{\mathfrak{q}} e_{\mathfrak{q}} f_{\mathfrak{q}}$.

(14) **16 Aprile 2024.** Definizione di schema quasi-compatto, connesso, irriducibile. Uno schema è quasi-compatto se e solo se è unione finita di sottoschemi aperti affini. $\operatorname{Spec} A$ è irriducibile se e solo se c'è un unico

primo minimale se e solo se il nilradicale è primo.

Definizione e caratterizzazione degli schemi ridotti. $\operatorname{Spec} A$ è ridotto se e solo se A è ridotto. Se $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio localmente anellato e $U \subseteq X$ è un aperto tale che $\mathcal{O}_X(U) = 0$, allora U è vuoto. Se $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio localmente anellato, $U \subseteq X$ è un aperto e $f \in \mathcal{O}_X(U)$, allora il luogo degli zeri di f, cioè $\{x \in X \mid f(x) = 0 \in \kappa(x)\} = \{x \in X \mid f_x \in \mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}\}$, è un chiuso di U (senza dimostrazione). Definizione e caratterizzazione degli schemi integri: integro se e solo se ridotto e irriducibile.

Definizione e caratterizzazione degli spazi topologici noetheriani (senza dimostrazione). Unione finita di spazi topologici noetheriani è uno spazio topologico noetheriano (senza dimostrazione). Lo spazio topologico soggiacente a uno schema noetheriano è uno spazio topologico noetheriano. Il viceversa è falso: l'anello $k[x_1, x_2, x_3, \dots]/(x_1, x_2^2, x_3^3, \dots)$ è locale, di dimensione 0, non noetheriano.

Definizione di componente irriducibile in uno spazio topologico. Le componenti irriducibili di uno spazio topologico formano un ricoprimento chiuso (dimostrazione accennata). Uno spazio topologico noetheriano ha un numero finito di componenti irriducibili (senza dimostrazione). In un anello noetheriano ci sono solo un numero finito di primi minimali.

Definizione di un punto che specializza a un altro punto in uno spazio topologico. In $\operatorname{Spec} A$ $\mathfrak{q}$ specializza a $\mathfrak{p}$ se e solo se $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. Definizione di punto generico in uno spazio topologico. In $\operatorname{Spec} A$ $\mathfrak{p}$ è un punto generico se e solo se è un primo minimale.

(15) **18 Aprile 2024.** Per uno schema X corrispondenza biunivoca tra i punti di X e i sottoinsiemi chiusi irriducibili di X, e tra i punti generici di X e le componenti irriducibili di X (senza dimostrazione). Se x è un punto di uno schema X, corrispondenza tra le componenti irriducibili di X passanti per x e le componenti irriducibili di $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}$ (senza dimostrazione).

Proprietà degli schemi integri: le mappe di restrizioni del fascio di struttura sono iniettive, definizione del campo delle funzioni razionali, le spighe in ogni punto e le sezioni su ogni anello non vuoto danno sottoanelli del campo delle funzioni razionali, il campo delle funzioni razionali è il campo delle frazioni dell'anello delle sezioni di ogni aperto affine (dimostrazione solo data nel caso affine per aperti principali). Se A è un dominio, allora $A = \bigcap_{\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}} = \bigcap_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}}$. Se A è un dominio normale, allora $A = \bigcap_{\operatorname{ht}\mathfrak{p}=1} A_{\mathfrak{p}}$ (dimostrazione omessa). Campo delle funzioni razionali di $\mathbb{P}^n_k$.

Definizioni e proprietà di morfismi quasi-compatti, di tipo finito, finiti, affini (senza dimostrazione). Una varietà algebrica su un campo k è un morfismo di tipo finito $X \to \operatorname{Spec} k$.

Definizione di dimensione di uno spazio topologico. La dimensione di $\operatorname{Spec} A$ è la dimensione di Krull di A. La dimensione di $\mathrm{V}(I)$ è $\dim A/I$. Se S è una parte moltiplicativa di A allora $\dim S^{-1}A \leq \dim A$. Proprietà della dimensione: 1) se $Y \subseteq X$ è un sottospazio allora $\dim Y \leq \dim X$; 2) se X è irriducibile di dimensione finita e $Y \subsetneq X$ è un chiuso allora $\dim Y < \dim X$; 3) se $\{X_i\}_i$ è un ricoprimento aperto di X oppure un ricoprimento chiuso finito di X allora $\dim X = \sup_i \dim X_i$ (senza dimostrazione). Se X è uno spazio topologico di Jacobson e X_0 è l'insieme dei punti chiusi di X, allora $\dim X = \dim X_0$.

Definizione di codimensione di un sottoinsieme chiuso irriducibile dentro uno spazio topologico. Se $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ allora $\operatorname{codim}(\mathrm{V}(\mathfrak{p}), \operatorname{Spec} A) = \dim A_{\mathfrak{p}} = \operatorname{ht}(\mathfrak{p})$. Se Y è un chiuso irriducibile nello spazio topologico X, allora $\dim Y + \operatorname{codim}(Y, X) \leq \dim X$. Esempio in cui vale la disuguaglianza stretta: se R è un DVR con uniformizzante t, allora $\mathfrak{p} = (tx - 1)$ in $A = R[x]$ soddisfa $\dim A/\mathfrak{p} + \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) < \dim A$. Se A è un anello noetheriano, allora $\dim A[x] = 1 + \dim A$ (senza dimostrazione).

Enunciato dell'Hauptidealsatz e interpretazione geometrica. Se A è un anello noetheriano, se $f_1, \dots, f_r \in A$ e se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di A minimale tra gli ideali primi che contengono $f_1, \dots, f_r$ allora $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \leq r$ (senza dimostrazione). Definizione di sequenza regolare in un anello.

(16) **23 Aprile 2024.** Se $A \subseteq B$ è un'estensione intera, allora $\dim A = \dim B$. Se k è un campo allora $k[x_1, \dots, x_n]$ ha dimensione n (senza dimostrazione). Definizione di insieme algebricamente indipendente per un'estensione di anelli.

Lemma di normalizzazione di Noether (senza dimostrazione). Significato geometrico della normalizzazione di Noether: ogni varietà affine di dimensione d ammette un morfismo finito suriettivo sullo spazio affine di dimensione d. Definizione di varietà razionale e di varietà unirazionale. Se X è una varietà algebrica affine integra ed esiste un morfismo finito suriettivo $\mathbb{A}^d \to X$ allora X è unirazionale.

Per un'estensione di campi definizioni di: algebrica, finita, finitamente generata, puramente trascendenza, sottocampo generato, base di trascendenza. Un insieme algebricamente indipendente può essere completato a una base di trascendenza (senza dimostrazione). Da un insieme di generatori di un sottocampo algebrico si può estrarre una base di trascendenza (senza dimostrazione). Due basi di trascendenza hanno la stessa cardinalità (senza dimostrazione). Definizione di grado di trascendenza di un'estensione di campi.

La dimensione di un dominio di tipo finito su un campo coincide col grado di trascendenza del suo campo delle frazioni.

Se A è un dominio di tipo finito su un campo, allora per ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ di A vale $\dim A/\mathfrak{p} + \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = \dim A$

(senza dimostrazione). Se X è una varietà algebrica su un campo e irriducibile e se Y è un chiuso irriducibile di X allora $\dim Y + \operatorname{codim}(Y, X) = \dim X$. Esempio di una varietà affine con componenti irriducibili di dimensione diversa: $\operatorname{Spec} k[x, y, z]/(xz, yz)$.

Se $\mathfrak{m}$ è un ideale massimale in un anello A, allora un ideale è $\mathfrak{m}$-primario se e solo se il suo radicale è $\mathfrak{m}$ (senza dimostrazione).

Se $(A, \mathfrak{m}, k)$ è un anello noetheriano locale, allora: 1) se M è un A-modulo finito, allora ogni insieme minimale di generatori di M come A-modulo ha cardinalità $\dim_k M \otimes_A k$; 2) $\operatorname{embdim}(A) := \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ è la cardinalità di qualunque insieme minimale di generatori dell'ideale $\mathfrak{m}$; 3) $\dim A$ è la minima cardinalità di un insieme di generatori di un ideale $\mathfrak{m}$-primario; 4) la dimensione di A non supera la embedding dimension di A (senza dimostrazione). Definizione di anello noetheriano locale regolare.

Se X è uno schema localmente noetheriano e $x \in X$, allora la codimensione di $\overline{\{x\}}$ in X è minore o uguale alla dimensione dello spazio tangente di X in x. Definizione di punto regolare su uno schema localmente noetheriano. Definizione di schema regolare.

Teorema di Auslander–Buchsbaum: un anello noetheriano locale regolare è un UFD (senza dimostrazione). Teorema (Serre): la localizzazione di un anello noetheriano locale regolare in un primo è un anello noetheriano locale regolare (senza dimostrazione). Corollario: per testare se uno schema localmente noetheriano sia regolare basta testare i punti chiusi in un ricoprimento aperto affine.

Esempio: punto razionale su una ipersuperficie affine su un campo.

Per un morfismo di schemi essere quasi-compatto, di tipo finito, finito o affine sono proprietà dei stabili per cambio base.

Se $X \to Y$ è un morfismo di tipo finito e Y è noetheriano, allora X è noetheriano. Una varietà algebrica su un campo è uno schema noetheriano.

Cambio base di una varietà algebrica a un'estensione del campo.

Definizione di geometricamente ? per una proprietà ? delle varietà algebriche. Definizione di varietà algebrica liscia come varietà algebrica geometricamente regolare.

(17) **30 Aprile 2024.** Definizione di campo perfetto; esempi e non-esempi. Una varietà algebrica liscia su un campo è regolare (senza dimostrazione). Una varietà algebrica regolare su un campo perfetto è liscia (senza dimostrazione).

Definizione di modulo piatto; proprietà equivalenti. Un modulo piatto su un dominio è privo di torsione. Un modulo privo di torsione su un PID è piatto. Libero $\Rightarrow$ proiettivo $\Rightarrow$ piatto (senza dimostrazione). La piattezza è una proprietà locale (Teorema 7.1 in Matsumura) (senza dimostrazione).

Definizione di algebra piatta su un anello. Se A è PID e B è un dominio, allora un omomorfismo iniettivo $A \hookrightarrow B$ è piatto. Definizione e caratterizzazione di morfismi piatti di schemi. Intuizione geometrica dei morfismi piatti come famiglia "continua" di schemi.

Definizione di morfismo liscio tra schemi noetheriani. Intuizione geometrica dei morfismi lisci come famiglia "continua" di varietà algebriche lisce. Studio della liscezza delle fibre di $\operatorname{Proj} \mathbb{Z}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 + x_1^2 + 2x_2^2) \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

Definizione di diagonale di un morfismo di schemi. Definizione di morfismo separato di schemi. Morfismi tra schemi affini sono separati. I morfismi proiettivi, i morfismi affini e le immersioni chiuse sono morfismi separati (senza dimostrazione). La retta con due origini non è separata (senza dimostrazione).

Se "?" è una proprietà di morfismi di schemi, definizione di "universalmente ?". "universalmente ?" $\Rightarrow$ "?". Il viceversa è sempre vero se e solo se "?" è una proprietà stabile per cambio base. Se k è un campo, $\mathbb{A}^1_k \to \operatorname{Spec} k$ è un morfismo chiuso ma non universalmente chiuso.

Uno spazio topologico X è quasi-compatto se e solo se per ogni spazio topologico Z la proiezione $X \times Z \to Z$ è chiusa (senza dimostrazione).

Definizione di morfismo proprio. Definizione di varietà algebrica completa su un campo. Le immersioni chiuse, i morfismi finiti e i morfismi proiettivi sono propri (senza dimostrazione).

(18) **2 Maggio 2024.** Definizione di fasci di $\mathcal{O}_X$-moduli su uno spazio anellato. Definizione di omomorfismo di $\mathcal{O}_X$-moduli. La spiga di un $\mathcal{O}_X$-modulo in un punto $x \in X$ è in modo naturale un $\mathcal{O}_{X,x}$-modulo.

Esempi di $\mathcal{O}_X$-moduli.

Se A è un anello e M è un A-modulo, allora il fascio $\tilde{M}$ è un $\mathcal{O}_X$-modulo su $X = \operatorname{Spec} A$; inoltre il funtore $\operatorname{Mod}_A \to \operatorname{Mod}_{\mathcal{O}_X}$ è esatto e pienamente fedele.

Se A è un anello $\mathbb{N}$-graduato e M è un A-modulo $\mathbb{Z}$-graduato, allora il fascio $\tilde{M}$ è un $\mathcal{O}_X$-modulo su $X = \operatorname{Proj} A$; inoltre il funtore dalla categoria degli A-moduli $\mathbb{Z}$-graduati a $\operatorname{Mod}_{\mathcal{O}_X}$ è esatto, ma in generale non è pienamente fedele.

Nuclei, immagini e conuclei di omomorfismi di omomorfismi di $\mathcal{O}_X$-moduli sono in modo naturale degli $\mathcal{O}_X$-moduli.

Definizione di fascio localmente libero. Se X è una manifold C^∞ di dimensione reale n, allora il fascio delle

k-forme C^∞ è un $\mathcal{C}^\infty_{X,\mathbb{R}}$-modulo localmente libero di rango $\binom{n}{k}$. Se X è una complex manifold di dimensione complessa n, allora il fascio delle k-forme complesse C^∞ è un $\mathcal{C}^\infty_{X,\mathbb{C}}$-modulo localmente libero di rango $\binom{2n}{k}$, il fascio delle (p,q)-forme C^∞ è un $\mathcal{C}^\infty_{X,\mathbb{C}}$-modulo localmente libero di rango $\binom{n}{p}\binom{n}{q}$ e il fascio delle p-forme olomorfe è un $\mathcal{O}_X$-modulo localmente libero di rango $\binom{n}{p}$. Se X è uno spazio topologico e E è un fibrato vettoriale complesso su X di rango r, allora il fascio delle sezioni di E è un $\mathcal{C}_{X,\mathbb{C}}$-modulo localmente libero di rango r.

Se $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio anellato, allora l'insieme degli omomorfismi di $\mathcal{O}_X$-moduli $\mathcal{O}_X^{\oplus n} \to \mathcal{O}_X^{\oplus m}$ è in bigezione con l'insieme delle matrici $m \times n$ con entrate nell'anello $\mathcal{O}_X(X)$.

Per un fascio localmente libero, definizione di banalizzazioni locali e di matrici di transizione; condizione di cociclo. Matrici di transizione e sezioni globali di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(d)$.

Correzione dell'Esercizio 3.2(1). Correzione dell'Esercizio 3.5(2).

Università di Bologna
Dipartimento di Matematica
A.A. 2023/24, Secondo Semestre

Andrea Petracci
a [dot] petracci (nospam) [at] unibo [dot] it
`https://www.dm.unibo.it/~andrea.petracci3/2024Schemi/`

Teoria degli Schemi — Foglio di esercizi 1

Assegnato: martedí 27 Febbraio 2024
Consegna delle soluzioni: entro martedí 12 Marzo 2024

In tutti i fogli di esercizi si possono usare i risultati visti nel corso e i risultati contenuti nella parte teorica dei seguenti libri di algebra commutativa: Atiyah–Macdonald, Eisenbud, Matsumura, se si menziona il numero del teorema/lemma/proposizione che si sta utilizzando.

Esercizio 1.1. (1) Sia A un anello e sia $E \subseteq \operatorname{Spec} A$ un sottoinsieme; allora si provi che la chiusura $\overline{E}$ di E in $\operatorname{Spec} A$ coincide con $\mathrm{V}(\bigcap_{\mathfrak{p}\in E} \mathfrak{p})$.

(2) Siano A e B due anelli. Si dimostri che ogni ideale dell'anello prodotto $A \times B$ è del tipo $I \times J$ dove $I \subseteq A$, $J \subseteq B$ sono ideali. Si dimostri che $\operatorname{Spec}(A \times B)$ è omeomorfo all'unione disgiunta $\operatorname{Spec} A \coprod \operatorname{Spec} B$.

(3) Sia $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia infinita di anelli non nulli. Sia $A = \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ il prodotto, che è il prodotto nella categoria degli anelli. Si dimostri che $\operatorname{Spec} A$ non è omeomorfo all'unione disgunta $\coprod_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Spec} A_\lambda$. [Suggerimento: si eviti di parlare di ultrafiltri e si usi una facile proposizione vista a lezione.]

Esercizio 1.2. Siano A un anello, M un A-modulo e $\mathfrak{m}$ un ideale massimale di A. Si dimostrino i seguenti fatti.

(1) Se $\sqrt{\operatorname{ann}_A(M)} \supseteq \mathfrak{m}$, allora l'omomorfismo di localizzazione $\phi\colon M \to M_\mathfrak{m}$ è bigettivo.
(2) Per tutti gli interi i, j tali che $0 \le i \le j$, $\mathfrak{m}^i A_\mathfrak{m} / \mathfrak{m}^j A_\mathfrak{m}$ è canonicamente isomorfo a $\mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^j$ come A-moduli.
(3) Se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di A e $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \dots, \mathfrak{q}_r$ sono ideali di A tali che
  (a) $0 = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$,
  (b) $\mathfrak{q}_1$ è $\mathfrak{p}$-primario (si veda la definizione nel capitolo 4 dell'Atiyah–Macdonald),
  (c) per ogni $j = 2, \dots, r$, $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{q}_j$,

  allora $\mathfrak{q}_1$ coincide con il nucleo dell'omomorfismo di localizzazione $A \to A_\mathfrak{p}$ e $A_\mathfrak{p}$ è canonicamente isomorfo a $(A/\mathfrak{q}_1)_\mathfrak{p}$ come A-algebra.
(4) Se k è un campo e A è una k-algebra finita locale, allora A è un anello artiniano e vale l'uguaglianza

$$\ell(A) \cdot \dim_k A/\mathfrak{m} = \dim_k A$$

  dove $\ell(A)$ è la lunghezza di A e $\dim_k$ denota la dimensione come k-spazio vettoriale.
(5) Se k è un campo algebricamente chiuso e A è una k-algebra finita, allora A è un anello artiniano e $\ell(A) = \dim_k A$.

Può essere utile il seguente risultato che potete dare per buono.

Proposizione. *Sia k un campo e sia $A = k[x_1, \dots, x_n]$ l'anello dei polinomi in n variabili.*

- *Se $m_1, \dots, m_t, u, v$ sono monomi in A tali che $\gcd(u, v) = 1$, allora vale la seguente uguaglianza tra ideali di A:*

$$(m_1, \dots, m_t, uv) = (m_1, \dots, m_t, u) \cap (m_1, \dots, m_t, v).$$

- *Se $m_1, \dots, m_t$ sono monomi in A, allora vale la seguente uguaglianza tra ideali di A:*

$$\sqrt{(m_1, \dots, m_t)} = (\sqrt{m_1}, \dots, \sqrt{m_t}),$$

  dove se $m = x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_r}^{a_r}$ con $1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n$ e $a_1, \dots, a_r \ge 1$ allora $\sqrt{m} := x_{i_1} \cdots x_{i_r}$. In altre parole, $\sqrt{m}$ è il prodotto delle variabili che compaiono in m.
- *Sia $I \subseteq S$ un ideale monomiale e sia $\mathcal{B}$ l'insieme minimale di generatori monomiali di I. Allora:*
  - *I è un ideale massimale se e solo se $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$;*
  - *I è un ideale primo se e solo se $\mathcal{B} \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$;*
  - *I è un ideale irriducibile se e solo esistono indici $1 \le i_1 < \cdots < i_t \le n$ e interi $a_1, \dots, a_t \ge 1$ tali che $\mathcal{B} = \{x_{i_1}^{a_1}, \dots, x_{i_t}^{a_t}\}$;*
  - *I è un ideale primario se e solo esistono indici $1 \le i_1 < \cdots < i_t \le n$, interi $a_1, \dots, a_t \ge 1$ e monomi $m_1, \dots, m_s$ tali che $\mathcal{B} = \{x_{i_1}^{a_1}, \dots, x_{i_t}^{a_t}, m_1, \dots, m_s\}$ e gli m_j coinvolgono solo le variabili $x_{i_1}, \dots, x_{i_t}$.*

Per esempio, (x^2, xy, y^2) è primario e non irriducibile (infatti $(x^2, xy, y^2) = (x, y^2) \cap (x^2, y)$); (x, y^2) è irriducibile ma non primo.

Esercizio 1.3. Per ciascuno dei seguenti anelli A, si classifichino i punti di $\operatorname{Spec} A$, si dica quali sono punti chiusi e si dia una descrizione della topologia di $\operatorname{Spec} A$. Si determini la dimensione di Krull di A, denotata con $\dim A$. Si dica se A è un anello artiniano e nel caso in cui lo sia si determini la sua lunghezza. Per ciascun primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, si determinino la dimensione di Krull di $A_{\mathfrak{p}}$ e di $A/\mathfrak{p}$ e si dia una descrizione piú esplicita possibile del campo residuo $\kappa(\mathfrak{p})$; in particolare, si dica se è un estensione algebrica, finita, trascendente o puramente trascendente di un campo 'noto' (cioè $\mathbb{F}_p$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ o campi di funzioni razionali su questi). Inoltre, nel caso in cui $A_{\mathfrak{p}}$ sia artiniano si determini la sua lunghezza.

(1) $A = \mathbb{Z}/300\mathbb{Z}$.
(2) $A = \mathbb{F}_3[x]/(x^7 + x^4)$.
(3) $A = \mathbb{Q}[x, y]/I$ dove $I = (x^2 + y^2 - 4, (x - y)^2)$.
(4) $A = \mathbb{C}[x, y, z]/I$ dove

$$\begin{aligned} I_1 &= (y, z - 1) \\ I_2 &= ((x - 10)^2, (y - 100)^3, (z - 100)^5) \\ I_3 &= (x^2y^3, x^2y^2z, x^2z^2) \\ I &= I_1 \cap I_2 \cap I_3 \end{aligned}$$

sono ideali di $\mathbb{C}[x, y, z]$. [Suggerimento: ci si faccia un'idea geometrica della varietà affine classica in $\mathbb{C}^3$ corrispondente all'ideale I e si applichi il Nullstellensatz. Si usi la proposizione precedente per trovare una decomposizione primaria di I_3. Infine può essere utile trovare une decomposizione primaria dell'ideale nullo di A per applicare il punto (3) dell'esercizio precedente.]

Esercizio 1.4. Sia $\varphi\colon A \to B$ un omomorfismo di anelli e si consideri la mappa indotta $\widetilde{\varphi}\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$.

(1) Si dimostri che per ogni ideale $J \subseteq B$ vale $\widetilde{\varphi}(\mathrm{V}(J)) \subseteq \mathrm{V}(\varphi^{-1}J)$ e che la chiusura di $\widetilde{\varphi}(\mathrm{V}(J))$ in $\operatorname{Spec} A$ è $\mathrm{V}(\varphi^{-1}J)$.
(2) Si dimostri che $\widetilde{\varphi}$ è dominante (cioè ha immagine densa) se e solo se $\ker\varphi$ consiste di elementi nilpotenti.
(3) Si dimostri che se φ è intero e iniettivo allora la mappa indotta $\widetilde{\varphi}$ è suriettiva.
(4) Si dimostri che se φ è intero allora la mappa indotta $\widetilde{\varphi}$ è chiusa.
(5) Si dia un esempio di omomorfismo di anelli $\varphi\colon A \to B$ tale che la mappa indotta $\widetilde{\varphi}\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ non è aperta né chiusa.
(6) Si dia un esempio di omomorfismo non-suriettivo di anelli $\varphi\colon A \to B$ tale che la mappa indotta $\widetilde{\varphi}\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ è un omeomorfismo.

Esercizio 1.5. Sia k un anello, sia A una k-algebra e sia G un gruppo che agisce su A mediante omomorfismi di k-algebre. Per semplicità si può supporre che G sia un sottogruppo del gruppo degli automorfismi di A come k-algebra. Si consideri l'insieme degli elementi che sono G-invarianti $A^G := \{a \in A \mid \forall g \in G,\ g(a) = a\}$ che è evidentemente una k-sottoalgebra di A. Si consideri l'inclusione $\iota\colon A^G \hookrightarrow A$ e la mappa indotta $\widetilde{\iota}\colon \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} A^G$.

(1) Si dimostri che se G è finito allora A è intero su A^G.
(2) Si dimostri la seguente implicazione: se G è finito, k è noetheriano e A è di tipo finito su k, allora A^G è di tipo finito su k.
(3) Si consideri l'azione sinistra di G sullo spazio topologico $\operatorname{Spec} A$ data da $g \cdot \mathfrak{q} = g(\mathfrak{q})$ per ogni $g \in G$ e $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$ e se ne consideri il quoziente $\pi\colon \operatorname{Spec} A \to (\operatorname{Spec} A)/G$ nella categoria degli spazi topologici (cioè $(\operatorname{Spec} A)/G$ è l'insieme quoziente dotato della topologia quoziente indotta da $\operatorname{Spec} A$.).
  (a) Si faccia vedere che esiste una e una sola funzione $\Phi\colon (\operatorname{Spec} A)/G \to \operatorname{Spec} A^G$ che rende commutativo il seguente diagramma.

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Spec} A \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\widetilde{\iota}"] & \\ (\operatorname{Spec} A)/G \arrow[rr, "\Phi"] & & \operatorname{Spec} A^G \end{tikzcd}$$

  (b) Si provi che Φ è continua.
  (c) Si provi che se G è finito allora Φ è un omeomorfismo.

  [Per chiarezza e per aiutarmi nella correzione vi chiedo di indicare i primi di A con $\mathfrak{q}$ e i primi di A^G con $\mathfrak{p}$, eventualmente decorati da apici, pedici, ...]
(4) Si consideri l'esempio: $k = \mathbb{C}$, $A = \mathbb{C}[x, y]$ è l'anello dei polinomi in 2 variabili, G è il gruppo con 2 elementi, l'azione dell'elemento non banale $\sigma \in G$ su A è data da $f(x, y) \mapsto f(-x, -y)$. Si determini un insieme di generatori di A^G come $\mathbb{C}$-algebra e si presenti la $\mathbb{C}$-algebra A^G come il quoziente di una $\mathbb{C}$-algebra polinomiale modulo un ideale.
(5) Si costruisca un esempio dove Φ non è bigettiva.

Università di Bologna
Dipartimento di Matematica
A.A. 2023/24, Secondo Semestre

Andrea Petracci
a [dot] petracci (nospam) [at] unibo [dot] it
`https://www.dm.unibo.it/~andrea.petracci3/2024Schemi/`

Teoria degli Schemi — Foglio di esercizi 2

Assegnato: martedí 12 Marzo 2024
Consegna delle soluzioni: entro martedí 26 Marzo 2024

In tutti i fogli di esercizi si possono usare i risultati visti nel corso e i risultati contenuti nella parte teorica dei seguenti libri di algebra commutativa: Atiyah–Macdonald, Eisenbud, Matsumura, se si menziona il numero del teorema/lemma/proposizione che si sta utilizzando.

Esercizio 2.1. Sia X uno spazio topologico, sia $\mathrm{Sh}(X)$ la categoria dei fasci di gruppi abeliani su X e sia $\varphi\colon F \to G$ un morfismo in $\mathrm{Sh}(X)$, cioè F e G sono fasci di gruppi abeliani su X e $\varphi\colon F \to G$ è un omomorfismo di fasci.

(1) Si provi che le seguenti condizioni sono equivalenti:
   (a) per ogni aperto $U \subseteq X$, l'omomorfismo $\varphi_U\colon F(U) \to G(U)$ è iniettivo,
   (b) per ogni punto $x \in X$, $\varphi_x\colon F_x \to G_x$ è iniettivo.

(2) Si provi che le seguenti condizioni sono equivalenti:
   (a) per ogni aperto $U \subseteq X$ e per ogni sezione $g \in G(U)$, esistono un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i\in I}$ di U e delle sezioni $f_i \in F(U_i)$ per ciascun $i \in I$, tali che $\varphi_{U_i}(f_i) = g|_{U_i}$ per ogni $i \in I$,
   (b) per ogni punto $x \in X$, $\varphi_x\colon F_x \to G_x$ è suriettivo.

(3) Si provi che le seguenti condizioni sono equivalenti:
   (a) per ogni aperto $U \subseteq X$, l'omomorfismo $\varphi_U\colon F(U) \to G(U)$ è bigettivo,
   (b) per ogni punto $x \in X$, $\varphi_x\colon F_x \to G_x$ è bigettivo,
   (c) φ è un isomorfismo in $\mathrm{Sh}(X)$, cioè esiste $\psi\colon G \to F$ in $\mathrm{Sh}(X)$ tale che $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_G$ e $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_F$,

Esercizio 2.2.

(1) Sia
$$0 \longrightarrow F' \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} F''$$
una successione esatta di fasci di gruppi abeliani su uno spazio topologico X. Si dimostri che per ogni aperto $U \subseteq X$ la sequenza di gruppi abeliani
$$0 \longrightarrow F'(U) \xrightarrow{\varphi_U} F(U) \xrightarrow{\psi_U} F''(U)$$
è esatta.

(2) Si esibisca un esempio della seguente situazione: X è uno spazio topologico,
$$0 \longrightarrow F' \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} F'' \longrightarrow 0$$
è una successione esatta di fasci di gruppi abeliani su X e la sequenza di gruppi abeliani
$$0 \longrightarrow F'(X) \xrightarrow{\varphi_X} F(X) \xrightarrow{\psi_X} F''(X) \longrightarrow 0$$
non è esatta.

(3) Sia A un anello, siano M', M e M'' degli A-moduli e siano $\varphi\colon M' \to M$ e $\psi\colon M \to M''$ degli omomorfismi di A-moduli. Se
$$0 \longrightarrow \widetilde{M'} \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \widetilde{M} \xrightarrow{\widetilde{\psi}} \widetilde{M''} \longrightarrow 0$$
è una successione esatta di fasci di gruppi abeliani su $X = \operatorname{Spec} A$, allora si dimostri che la sequenza di gruppi abeliani
$$0 \longrightarrow \widetilde{M'}(X) \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_X} \widetilde{M}(X) \xrightarrow{\widetilde{\psi}_X} \widetilde{M''}(X) \longrightarrow 0$$
è esatta.

Definizione. Se F è un fascio di gruppo abeliani su uno spazio topologico X, allora definiamo il *supporto* di F come $\operatorname{Supp} F := \{x \in X \mid F_x \neq 0\}$.

Esercizio 2.3. Sia A un anello, sia $X = \operatorname{Spec} A$, sia M un A-modulo e sia $\widetilde{M}$ il fascio su X indotto da M.

(1) Si provi il contenimento $\operatorname{Supp} \widetilde{M} \subseteq \mathrm{V}(\operatorname{ann}_A(M))$.
(2) Si provi che se M è un A-modulo finito allora $\operatorname{Supp} \widetilde{M} = \mathrm{V}(\operatorname{ann}_A(M))$.
(3) Si fornisca un esempio in cui $\operatorname{Supp} \widetilde{M} \subsetneqq \mathrm{V}(\operatorname{ann}_A(M))$.
(4) Se $I \subseteq A$ è un ideale e M è un A/I-modulo, allora M è in modo naturale un A-modulo e il fascio $\widetilde{M}$ da lui indotto su $X = \operatorname{Spec} A$ è tale che $\operatorname{Supp} \widetilde{M} \subseteq \mathrm{V}(I)$.

(5) Se A è un dominio e K è il suo campo delle frazioni, allora si provi che il fascio $\widetilde{K}$ è il fascio costante di gruppo K ed è un fascio grattacielo (rispetto a quale punto?). Qual è il suo supporto?

Esercizio 2.4. (Qui costruiamo l'incollamento di fasci per un ricoprimento aperto fatto da due elementi – per la trattazione del caso generale si rimanda all'Esercizio 2.2.8 del libro di Liu.) Sia X uno spazio topologico e siano U_0 e U_1 due aperti di X tali che $X = U_0 \cup U_1$. Per brevità si ponga $U_{01} = U_0 \cap U_1$. Si consideri il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} U_{01} \arrow[r, hook, "i_0"] \arrow[d, hook, "i_1"] & U_0 \arrow[d, hook, "j_0"] \\ U_1 \arrow[r, hook, "j_1"] & X \end{tikzcd}$$

dato dalle inclusioni. Sia k un anello, sia F_0 un fascio di k-moduli su U_0 e sia F_1 un fascio di k-moduli su U_1. Supponiamo di avere un isomorfismo di fasci di k-moduli

$$\phi\colon F_0|_{U_{01}} \to F_1|_{U_{01}}.$$

(a) Si provi che esistono un fascio di k-moduli F su X e degli isomorfismi di fasci di k-moduli $\psi_0\colon F|_{U_0} \to F_0$ e $\psi_1\colon F|_{U_1} \to F_1$ tali che $\phi \circ \psi_0|_{U_{01}} = \psi_1|_{U_{01}}$.
(b) Si provi che la terna (F, ψ_0, ψ_1) è unica a meno di isomorfismo; piú precisamente vale la seguente implicazione: se F' è un fascio di k-moduli su X e $\psi_0'\colon F'|_{U_0} \to F_0$ e $\psi_1'\colon F'|_{U_1} \to F_1$ sono isomorfismi di fasci di k-moduli tali che $\phi \circ \psi_0'|_{U_{01}} = \psi_1'|_{U_{01}}$ allora esiste un isomorfismo $\alpha\colon F \to F'$ di fasci di k-moduli tale che $\psi_0 = \psi_0' \circ \alpha|_{U_0}$ e $\psi_1 = \psi_1' \circ \alpha|_{U_1}$.

Il fascio F si dice *incollamento* dei fasci F_0 e F_1 tramite ϕ. (Attenzione: il fascio F dipende dalla scelta di ϕ!)

Esercizio 2.5. Sia k un campo algebricamente chiuso. Lavoriamo adesso nel contesto geometria algebrica 'classica', cioè nella categoria delle varietà quasi-proiettive 'classiche' su k. Per ogni varietà quasi-proiettiva 'classica' X, sia $\mathcal{O}_X$ il fascio delle funzioni regolari su X.

Inoltre, in questo esercizio quando si scrive fascio (o sottofascio) si intende fascio (o sottofascio) di k-spazi vettoriali.

Si consideri $\mathbb{P}^1(k)$ la retta proiettiva 'classica' su k con coordinate omogenee x_0, x_1. Siano $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ e $U_1 = \{x_1 \neq 0\}$ le due carte affini standard di $\mathbb{P}^1(k)$. Sia $x = \frac{x_1}{x_0}$ (risp. $y = \frac{x_0}{x_1}$) la coordinata affine standard di U_0 (risp. U_1). Si ponga $U_{01} = U_0 \cap U_1$.

(1) Si determini esplicitamente $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(k)}(\mathbb{P}^1(k))$ e se ne determini la dimensione come k-spazio vettoriale.
(2) Si fissi $d \in \mathbb{Z}$. Si consideri l'isomorfismo di fasci

$$\phi\colon \mathcal{O}_{U_0}|_{U_{01}} = \mathcal{O}_{U_{01}} \longrightarrow \mathcal{O}_{U_1}|_{U_{01}} = \mathcal{O}_{U_{01}}$$

definito dalla moltiplicazione per x^{-d}; piú precisamente per ogni aperto $U \subseteq U_{01}$ l'omomorfismo k-lineare $\phi_U : \mathcal{O}_{U_0}(U) \to \mathcal{O}_{U_1}(U)$ è dato dalla moltiplicazione per $(x|_U)^{-d}$. Sia F il fascio su $\mathbb{P}^1(k)$ ottenuto incollando $\mathcal{O}_{U_0}$ e $\mathcal{O}_{U_1}$ tramite ϕ. Si determini la dimensione di $F(\mathbb{P}^1(k))$ come k-spazio vettoriale.
(3) Si fissi $e \in \mathbb{N}$. Sia G_0 il sottofascio di $\mathcal{O}_{U_0}$ cosí definito: per ogni aperto $U \subseteq U_0$, $G_0(U)$ è l'ideale dell'anello $\mathcal{O}_{U_0}(U)$ generato da $(x|_U)^e$. Sia G_1 il fascio su U_1 coincidente con $\mathcal{O}_{U_1}$; in questo modo G_1 è un sottofascio di $\mathcal{O}_{U_1}$.
  (a) Si provi che G_0 e G_1 possono essere incollati a un fascio G su $\mathbb{P}^1(k)$ in modo tale che esista un omomorfismo iniettivo di fasci $\lambda\colon G \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(k)}$ tale che le restrizioni $\lambda|_{U_0}$ e $\lambda|_{U_1}$ siano i precedenti omomorfismi iniettivi di fasci $G_0 \hookrightarrow \mathcal{O}_{U_0}$ e $G_1 = \mathcal{O}_{U_1}$.
  (b) Si determini $d \in \mathbb{Z}$ tale che G sia isomorfo al fascio F costruito in (2).
  (c) Si descriva esplicitamente il fascio Q dato dal conucleo (nella categoria dei fasci) dell'omomorfismo iniettivo $\lambda\colon G \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(k)}$. Q è un fascio grattacielo? Se sí, rispetto a quale punto di $\mathbb{P}^1(k)$?
  (d) Si calcoli la dimensione di $Q(\mathbb{P}^1(k))$ come k-spazio vettoriale.
  (e) Si dica per quali $e \in \mathbb{N}$ la successione esatta corta di fasci

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\lambda} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(k)} \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

  induce una successione esatta corta sulle sezioni globali

$$0 \longrightarrow G(\mathbb{P}^1(k)) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(k)}(\mathbb{P}^1(k)) \longrightarrow Q(\mathbb{P}^1(k)) \longrightarrow 0.$$

Università di Bologna
Dipartimento di Matematica
A.A. 2023/24, Secondo Semestre

Andrea Petracci
a [dot] petracci (nospam) [at] unibo [dot] it
`https://www.dm.unibo.it/~andrea.petracci3/2024Schemi/`

Teoria degli Schemi — Foglio di esercizi 3
Assegnato: martedí 26 Marzo 2024
Consegna delle soluzioni: entro martedí 16 Aprile 2024

In tutti i fogli di esercizi si possono usare i risultati visti nel corso e i risultati contenuti nella parte teorica dei seguenti libri di algebra commutativa: Atiyah–Macdonald, Eisenbud, Matsumura, se si menziona il numero del teorema/lemma/proposizione che si sta utilizzando.

Definizione. Uno schema X si dice *localmente noetheriano* se esiste un ricoprimento aperto $\{U_i\}_i$ di X tale che per ogni i esiste un anello noetheriano A_i tale che U_i (con la struttura di sottoschema aperto di X) è isomorfo (come schema) a $\operatorname{Spec} A_i$. In altre parole, si richiede che esista un ricoprimento aperto affine $\{U_i\}_i$ tale che $\mathcal{O}_X(U_i)$ è un anello noetheriano per ogni i.

Esercizio 3.1. Si provino le seguenti affermazioni.

(1) Se X è uno schema localmente noetheriano allora per ogni punto $x \in X$ la spiga $\mathcal{O}_{X,x}$ è un anello noetheriano locale.
(2) Se X è uno schema localmente noetheriano e Y è un sottoschema aperto o chiuso di X, allora Y è uno schema localmente noetheriano.
(3) Sia A un anello, sia $I \subseteq A$ un ideale, sia $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di elementi di A tali che $\sum_{\lambda\in\Lambda} Af_\lambda = A$. Se per ogni $\lambda \in \Lambda$ l'ideale esteso IA_{f_λ} è un ideale finitamente generato di A_{f_λ}, allora I è un ideale finitamente generato di A. [Suggerimento: Λ può essere assunto finito? Potete trovare un ideale finitamente generato $J \subseteq I$ tale che $JA_{f_\lambda} = IA_{f_\lambda}$ per ogni $\lambda \in \Lambda$. Poi usate la proprietà locale.]
(4) Sia A un anello, sia $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di elementi di A tali che $\sum_{\lambda\in\Lambda} Af_\lambda = A$. Se per ogni $\lambda \in \Lambda$ l'anello A_{f_λ} è noetheriano, allora A è un anello noetheriano.
(5) Sia A un anello; allora $\operatorname{Spec} A$ è uno schema localmente noetheriano se e solo se A è un anello noetheriano.
(6) Sia X uno schema; allora X è quasi compatto e localmente noetheriano se e solo se esiste un ricoprimento aperto affine finito $\{U_i\}_i$ tale che $\mathcal{O}_X(U_i)$ è un anello noetheriano per ogni i. [In tal caso si dice che lo schema X è *noetheriano*.]

Esercizio 3.2. Sia $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_i$ un anello $\mathbb{N}$-graduato. Sia $A_+ = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}^+} A_i$ l'ideale irrilevante. Si consideri l'A_0-schema $X = \operatorname{Proj} A$.

(1) Si provi che $1 \in A$ è omogeneo di grado 0, cioè $1 \in A_0$. [In questo modo A_0 è un sottoanello di A.]
(2) Si considerino le seguenti condizioni:
   (a) A è un anello noetheriano,
   (b) A_0 è un anello noetheriano e A_+ è un ideale finitamente generato di A,
   (c) A_0 è un anello noetheriano e A è di tipo finito su A_0,
   (d) A_0 è un anello noetheriano e per ogni $i \in \mathbb{N}$ A_i è un A_0-modulo finito.

   Per ciascuna coppia ordinata di condizioni, si dica se vale l'implicazione: in caso positivo si fornisca una dimostrazione, in caso negativo si fornisca un controesempio. [Suggerimento: sfogliate il capitolo 10 dell'Atiyah–MacDonald.]
(3) Sia d un intero positivo e sia $A^{(d)}$ il d-esimo sottoanello di Veronese di A, cioè $A^{(d)} = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_{id}$ con $\mathbb{N}$-graduazione data da $\deg_{A^{(d)}} f = i$ se $f \in A_{id}$. In altre parole, $A^{(d)}$ è il sottoanello di A costituito dagli elementi in cui compaiono parti omogenee di gradi multipli di d, ma la graduazione su $A^{(d)}$ è ottenuta dividendo per d la graduazione di A. Si provi che se A è un anello noetheriano allora $A^{(d)}$ è un anello noetheriano. [Suggerimento: usate il lemma di Artin–Tate.]
(4) Sia $f \in A$ un elemento omogeneo di grado $d > 0$. Si costruisca un omomorfismo suriettivo di A_0-algebre $A^{(d)} \to A_{(f)}$.
(5) Si provi che se A è un anello noetheriano allora X è uno schema noetheriano.
(6) Si provi che se A è un dominio e $A_0 \subsetneqq A$ allora X è irriducibile.
(7) Si costruisca un esempio in cui A non è ridotto, X è irriducibile e per ogni punto $x \in X$ la spiga $\mathcal{O}_{X,x}$ è un anello ridotto. [Si ricorda che $\emptyset$ è riducibile e sconnesso.]

Definizione. Sia A un anello, sia $f \in A$ un elemento e sia $I \subseteq A$ un ideale. Allora si pone

$$(I : f) = \{a \in A \mid af \in I\},$$
$$(I : f^\infty) = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } af^n \in I\}.$$

Esercizio 3.3. Sia $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_i$ un anello $\mathbb{N}$-graduato. Sia $A_+ = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}^+} A_i$ l'ideale irrilevante. Si consideri l'A_0-schema $X = \operatorname{Proj} A$. Siano I e J due ideali omogenei di A e siano $Z_I = \operatorname{Proj} A/I$ e $Z_J = \operatorname{Proj} A/J$ i corrispondenti sottoschemi chiusi di $X = \operatorname{Proj} A$.

(1) Sia $f \in A_+$ omogeneo di grado $d > 0$ e sia $D_+(f) \subseteq X$ l'aperto principale corrispondente; si dimostri che $Z_I \cap D_+(f)$ è un sottoschema chiuso di $Z_J \cap D_+(f)$ se e solo se $J \cap A^{(d)} \subseteq (I : f^\infty)$.

(2) Si ponga

$$\overline{I} = \{a \in A \mid \forall f \in A_+ \text{ omogeneo}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } af^n \in I\}\,.$$

Si provi che $\overline{I}$ è un ideale omogeneo di A.

(3) Assumendo che l'ideale A_+ sia generato da un numero finito di elementi omogenei di grado 1, si provi che Z_I è un sottoschema chiuso di Z_J se e solo se $J \subseteq \overline{I}$.

(4) Se A_+ è un ideale finitamente generato di A e $\{f_1, \ldots, f_r\}$ è un insieme di suoi generatori omogenei, allora si dimostri l'uguaglianza

$$\overline{I} = \left\{a \in A \mid \exists m \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall j = 1, \ldots, r,\ af_j^m \in I\right\}.$$

(5) Si provi il contenimento $\overline{I} \cap A_+ \subseteq \sqrt{I}$.

(6) Se A_0 è un campo e I è un ideale radicale tale che $I \subsetneqq A_+$, allora si provi che I è saturo, cioè $I = \overline{I}$.

(7) Se A_0 è un campo, allora si costruisca una bigezione tra l'insieme dei sottoinsiemi chiusi di $\operatorname{Proj} A$ e l'insieme degli ideali radicali omogenei di A contenuti in A_+.

(8) Si faccia un esempio, con $A_0 = k$ campo, $n \geq 1$ e $A = k[x_0, \ldots, x_n]$ anello polinomiale con $\mathbb{N}$-graduazione standard, in cui I e J non sono radicali e vale $0 \subsetneqq I \subsetneqq J \subsetneqq \overline{I} \subsetneqq A_+$. Potete scegliere $n \geq 1$.

Esercizio 3.4.

(1) Sia X uno schema e sia K un campo. Si costruisca una bigezione naturale tra i seguenti due insiemi:
   (a) $\operatorname{Hom}_{(\mathrm{Sch})}(\operatorname{Spec} K, X)$, cioè l'insieme dei morfismi di schemi da $\operatorname{Spec} K$ a X,
   (b) $\{(x, \varphi) \mid x \in X \text{ e } \varphi\colon \kappa(x) \to K \text{ è un omomorfismo di anelli}\}$.

(2) Sia $K \supseteq k$ un'estensione di campi. In questo modo $\operatorname{Spec} K$ è un k-schema. Sia X un k-schema. Si costruisca una bigezione naturale tra i seguenti due insiemi:
   (a) $\operatorname{Hom}_{(\mathrm{Sch}/k)}(\operatorname{Spec} K, X)$, cioè l'insieme dei morfismi di k-schemi da $\operatorname{Spec} K$ a X,
   (b) $\{(x, \varphi) \mid x \in X \text{ e } \varphi\colon \kappa(x) \to K \text{ è un omomorfismo di } k\text{-algebre}\}$.

Se R è un anello, X è un R-schema e A è una R-algebra, allora si pone

$$X(A) := \operatorname{Hom}_{(\mathrm{Sch}/R)}(\operatorname{Spec} A, X).$$

Gli elementi di $X(A)$ si chiamano *A-punti* di X.

(3) Sia k un campo e sia X un k-schema. Per ogni punto $x \in X$ il campo residuo $\kappa(x)$ è un'estensione di campi di k. Si provi che $X(k)$ è in bigezione naturale con i punti $x \in X$ tali che l'estensione di campi $\kappa(x)/k$ è banale.

(4) Si consideri l'inclusione $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ che dà a $X = \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ una struttura di $\mathbb{R}$-schema. Si determini la cardinalità dei seguenti insiemi:
   (a) $\{x \in X \mid \text{l'estensione di campi } \kappa(x)/\mathbb{R} \text{ è banale}\}$
   (b) $\{x \in X \mid \text{l'estensione di campi } \kappa(x)/\mathbb{R} \text{ ha grado } 2\}$
   (c) $\{x \in X \mid \text{l'estensione di campi } \kappa(x)/\mathbb{R} \text{ ha grado } \geq 3\}$
   (d) $X(\mathbb{R})$
   (e) $X(\mathbb{C})$

(5) Si consideri l'$\mathbb{F}_2$-schema $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_2}$. Si determini la cardinalità dei seguenti insiemi:
   (a) $\{x \in X \mid \text{l'estensione di campi } \kappa(x)/\mathbb{F}_2 \text{ è banale}\}$
   (b) $\{x \in X \mid \text{l'estensione di campi } \kappa(x)/\mathbb{F}_2 \text{ ha grado } 2\}$
   (c) $\{x \in X \mid \text{l'estensione di campi } \kappa(x)/\mathbb{F}_2 \text{ ha grado } 3\}$
   (d) $X(\mathbb{F}_2)$
   (e) $X(\mathbb{F}_4)$
   (f) $X(\mathbb{F}_8)$
   (g) $X(\mathbb{F}_{2^m})$ per ciascun $m \geq 1$ intero.

(6) Per l'$\mathbb{F}_3$-schema $X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_3}$, si determini la cardinalità dei seguenti insiemi:
   (a) $\{x \in X \mid \text{l'estensione di campi } \kappa(x)/\mathbb{F}_3 \text{ è banale}\}$
   (b) $\{x \in X \mid \text{l'estensione di campi } \kappa(x)/\mathbb{F}_3 \text{ ha grado } 2\}$
   (c) $\{x \in X \mid \text{l'estensione di campi } \kappa(x)/\mathbb{F}_3 \text{ ha grado } 3\}$
   (d) $\{x \in X \mid \text{l'estensione di campi } \kappa(x)/\mathbb{F}_3 \text{ ha grado } 12\}$ [Suggerimento: si consulti `https://sites.google.com/view/enricofatighenti/alge-calendar`]
   (e) $X(\mathbb{F}_{3^m})$ per ciascun $m \geq 1$ intero.

(7) Sia q la potenza di un numero primo e sia n un numero intero positivo. Sia $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_q}$ lo spazio proiettivo di dimensione n sul campo $\mathbb{F}_q$. Per ogni intero positivo m, si calcoli la cardinalità di $X(\mathbb{F}_{q^m})$. Si consideri la serie formale

$$Z_X(t) = \exp\left(\sum_{m\geq 1} \frac{|X(\mathbb{F}_{q^m})|}{m} t^m\right) \in \mathbb{Q}[\![t]\!].$$

Si provi che Z_X è una funzione razionale in t.

(8) Si consideri l'$\mathbb{F}_{11}$-schema

$$E = \operatorname{Proj} \mathbb{F}_{11}[x_0, x_1, x_2]/(x_0x_2^2 - (x_1^3 + 2x_0^2x_1 + 2x_0^3))$$

dove $\deg x_0 = \deg x_1 = \deg x_2 = 1$. Si determini la cardinalità dell'insieme $E(\mathbb{F}_{11})$. [Suggerimento: si consulti `https://sites.google.com/view/enricofatighenti/alge-calendar`]

Definizione. Sia X uno schema e sia $x \in X$ un punto. Siano $\mathcal{O}_{X,x}$ l'anello locale in x, $\mathfrak{m}_x$ il suo ideale massimale e $\kappa(x) := \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ il suo campo residuo. Si definisce lo *spazio tangente* $T_{X,x}$ a X in x come il duale del $\kappa(x)$-spazio vettoriale $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, cioè $T_{X,x} := \operatorname{Hom}_{\kappa(x)}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, \kappa(x))$.

Esercizio 3.5.

(1) Sia k un campo e si consideri il k-schema

$$X = \operatorname{Spec} k[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_r)$$

dove $f_1, \ldots, f_r \in k[x_1, \ldots, x_n]$ sono dei polinomi. Supponiamo che il punto $a = (a_1, \ldots, a_n) \in k^n$ annulli tutti gli f_i. Si consideri il punto chiuso $p \in X$ dato dall'ideale massimale generato da $x_1-a_1, \ldots, x_n-a_n$. Si osservi che il campo residuo di p è k. Sia $\mathfrak{m}_p$ l'ideale massimale dell'anello locale $\mathcal{O}_{X,p}$.

(a) Si dimostri che $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$ è naturalmente isomorfo, come $k[x_1, \ldots, x_n]$-modulo, al quoziente di ideali di $k[x_1, \ldots, x_n]$ dato da

$$\frac{(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)}{(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)^2 + (f_1, \ldots, f_r)}.$$

(b) Per ogni $f \in (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \subset k[x_1, \ldots, x_n]$, si consideri l'applicazione k-lineare

$$\mathrm{d}f \colon k^n \longrightarrow k$$

data da

$$v = (v_1, \ldots, v_n) \mapsto \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Si determino nucleo e immagine dell'applicazione k-lineare

$$\mathrm{d} \colon (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \longrightarrow \operatorname{Hom}_k(k^n, k)$$

data da $f \mapsto \mathrm{d}f$.

(c) Si considerino la matrice jacobiana

$$J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j} \in \mathcal{M}_{r,n}(k)$$

e il suo nucleo $\ker J \subseteq k^n$. Si consideri l'omomorfismo di restrizione

$$\rho \colon \operatorname{Hom}_k(k^n, k) \longrightarrow \operatorname{Hom}_k(\ker J, k),$$

cioè l'applicazione k-lineare che associa a un funzionale k-lineare su k^n la sua restrizione a $\ker J$. Si determinino nucleo e immagine dell'applicazione k-lineare

$$\rho \circ \mathrm{d} \colon (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \longrightarrow \operatorname{Hom}_k(\ker J, k).$$

(d) Si dimostri che $\ker J$ è isomorfo allo spazio tangente $T_{X,p} = \operatorname{Hom}_k(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2, k)$.

(2) Nell'anello $\mathbb{Q}[x, y]$ si considerino gli ideali $I_1 = (xy, y^3)$, $I_2 = (x^3, y - 1)$, $I_3 = (x^7, (y + 1)^8)$, $I_4 = (x, y^2 + 1)$, $I = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4$. Si consideri lo schema $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Q}[x, y]/I$. Per ogni punto $p \in X$, si dia una descrizione piú esplicita possibile dell'anello locale $\mathcal{O}_{X,p}$ e del campo residuo $\kappa(p)$, si determini un insieme minimale di generatori dell'ideale massimale $\mathfrak{m}_p$, si determini la dimensione di Krull di $\mathcal{O}_{X,p}$, si determini la dimensione dello spazio tangente $T_{X,p}$ come $\kappa(p)$-spazio vettoriale, si dica se $\kappa(p)/\mathbb{Q}$ è un'estensione di campi finita, finitamente generata o algebrica.

Università di Bologna
Dipartimento di Matematica
A.A. 2023/24, Secondo Semestre

Andrea Petracci
a [dot] petracci (nospam) [at] unibo [dot] it
`https://www.dm.unibo.it/~andrea.petracci3/2024Schemi/`

Teoria degli Schemi — Foglio di esercizi 4
Assegnato: martedí 16 Aprile 2024
Consegna delle soluzioni: entro martedí 30 Aprile 2024

Esercizio 4.1. Sia k un campo. Si considerino i seguenti polinomi omogenei a coefficienti in k nelle indeterminate x_0, x_1, x_2: $F = x_0x_1^2 - 4x_0x_2^2 + x_1^3 + 2x_1x_2^2$ e $G = 2x_1^2 + x_1x_2 + 2x_0x_1 - 5x_0x_2$. Si considerino i seguenti sottoschemi chiusi di $\mathbb{P}^2_k$: $X = \operatorname{Proj} k[x_0, x_1, x_2]/(F)$ e $Y = \operatorname{Proj} k[x_0, x_1, x_2]/(G)$. Si consideri il prodotto fibrato $Z = X \times_{\mathbb{P}^2_k} Y$.

(1) Si determinino i punti k-razionali di X che non sono regolari.
(2) Si dica se X è uno schema affine.
(3) Ora supponiamo $k = \mathbb{Q}$.
  (a) Si determinino tutti i punti k-razionali di Z.
  (b) Si dica se Z è uno schema affine.
  (c) Per ogni componente irriducibile W di Z, si determini la dimensione di W e si determini la sua molteplicità; ovvero, se η è il punto generico di W, si determini la lunghezza dell'anello artiniano locale $\mathcal{O}_{Z,\eta}$.
  (d) Si determini la dimensione di $\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$ come k-spazio vettoriale.
(4) Si ripetano i punti (a-d) nel caso in cui k abbia caratteristica 2.

(Non si dimentichi di considerare i vari casi al variare della caratteristica del campo k.)

[Per aiutarmi nella correzione vi chiedo di usare le seguenti notazioni: le coordinate affini sulla carta affine U_0 sono $x = \frac{x_1}{x_0}$ e $y = \frac{x_2}{x_0}$, i polinomi deomogeneizzati di F e di G rispetto a x_0 sono $f = x^2 - 4y^2 + x^3 + 2xy^2$ e $g = 2x^2 + xy + 2x - 5y$, le coordinate affini sulla carta affine U_2 sono $u = \frac{x_0}{x_2}$ e $v = \frac{x_1}{x_2}$, i polinomi deomogeneizzati di F e di G rispetto a x_2 sono $\tilde{f} = uv^2 - 4u + v^3 + 2v$ e $\tilde{g} = 2v^2 + v + 2uv - 5u$.]

[Suggerimento: se $k = \mathbb{C}$, la versione 'classica' di alcune parti di questo esercizio è contenuta in `https://sites.google.com/view/enricofatighenti/alge-calendar`]

[Per il punto (3c) è permesso l'utilizzo di un software di algebra computazionale per determinare la decomposizione primaria dell'ideale generato da f e da g in $\mathbb{Q}[x, y]$. Per esempio potete inserire

```
A<x,y> := PolynomialRing(Rationals(),2);
f := x^2 - 4*y^2 + x^3 + 2*x*y^2;
g := 2*x^2 + x*y + 2*x - 5*y;
I := ideal<A|f,g>;
PrimaryDecomposition(I);
```

in `http://magma.maths.usyd.edu.au/calc/`]

Esercizio 4.2. Sia k un campo di caratteristica diversa da 2. Sia $\overline{k}$ una chiusura algebrica di k. Sia $g \geq 0$ un intero. Sia $F \in k[x_0, x_1]$ un polinomio omogeneo di grado $2g + 2$. Si consideri il k-schema $X = \operatorname{Proj} k[x_0, x_1, y]/(y^2 - F(x_0, x_1))$ dove $\deg x_0 = \deg x_1 = 1$ e $\deg y = g + 1$.

(1) Si provi che X è liscio su k se e solo se il polinomio omogeneo F ha $2g + 2$ radici distinte in $\mathbb{P}^1(\overline{k})$, cioè se esistono $[a_1 : b_1], \ldots, [a_{2g+2} : b_{2g+2}] \in \mathbb{P}^1(\overline{k})$ a due a due distinti tali che $F = \lambda \prod_{i=1}^{2g+2}(b_ix_0 - a_ix_1)$ per qualche $\lambda \in \overline{k}^*$.
(2) Si provi che la composizione dell'inclusione $k[x_0, x_1] \hookrightarrow k[x_0, x_1, y]$ con la suriezione $k[x_0, x_1, y] \twoheadrightarrow k[x_0, x_1, y]/(y^2 - F(x_0, x_1))$ induce un morfismo di k-schemi $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1_k$.
(3) Si studi la fibra tramite π di ogni punto di $\mathbb{P}^1_k$ nel seguente caso: $k = \mathbb{C}$, $g = 1$, $F = x_0x_1(x_0-x_1)(x_0+x_1)$. Qual è la dimensione (di Krull) della fibra? La fibra è ridotta? La fibra è affine?
(4) Si dica se π è un morfismo finito.
(5) Si provi che i fasci di k-spazi vettoriali $\pi_*\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(-g-1)$ sono isomorfi.

Esercizio 4.3. Sia k un campo. Nel seguito le variabili menzionate x_i hanno grado 1.

(1) Si provi che $\mathbb{P}^1_k$ e $\mathbb{P}(60, 90)_k$ sono k-schemi isomorfi.
(2) Si provi che $\mathbb{P}^1_k$ e $\operatorname{Proj} k[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 - x_1x_2)$ sono k-schemi isomorfi.
(3) Si provi che $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ e $\operatorname{Proj} \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)$ non sono $\mathbb{R}$-schemi isomorfi.
(4) Si provi che $\mathbb{P}(1, 1, 2)_k$ e $\operatorname{Proj} k[x_0, x_1, x_2, x_3]/(x_0^2 - x_1x_2)$ sono k-schemi isomorfi.
(5) Si provi che $\mathbb{P}(1, 1, 2)_k$ e $\mathbb{P}^2_k$ non sono k-schemi isomorfi.

(6) Si provi che non esiste alcun polinomio omogeneo $f \in k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ tale che $\operatorname{Proj} k[x_0, x_1, x_2, x_3]/(f)$ e $\mathbb{P}(1,1,3)_k$ sono k-schemi isomorfi.
(7) Si provi che $\mathbb{P}^1_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{P}^1_k$ e $\operatorname{Proj} k[x_0, x_1, x_2, x_3]/(x_0x_1 - x_2x_3)$ sono k-schemi isomorfi. [Qui basta spiegare un po', senza verificare tutti i dettagli.]

[Per aiutarmi nella correzione, vi chiedo di usare le seguenti notazioni: in (1) $\mathbb{P}(60, 90)_k = \operatorname{Proj} k[y, z]$ dove $\deg y = 60$ e $\deg z = 90$; in (4) e (5) $\mathbb{P}(1,1,2)_k = \operatorname{Proj} k[y_0, y_1, z]$ dove $\deg y_0 = \deg y_1 = 1$ e $\deg z = 2$; in (6) $\mathbb{P}(1,1,3)_k = \operatorname{Proj} k[y_0, y_1, z]$ dove $\deg y_0 = \deg y_1 = 1$ e $\deg z = 3$ e $u_1 = \frac{y_0^3}{z}$, $u_2 = \frac{y_0^2 y_1}{z}$, $u_3 = \frac{y_0 y_1^2}{z}$, $u_4 = \frac{y_1^3}{z}$.]

Esercizio 4.4. Per ciascuna delle seguenti affermazioni si dica se è vera o falsa. Se è vera, allora si fornisca una dimostrazione. Se è falsa, allora si fornisca un controesempio.

(1) Sia k un campo e siano X e Y due schemi di tipo finito su k. Se X e Y sono omeomorfi, allora sono isomorfi come k-schemi.
(2) Sia k un campo e siano X e Y due schemi affini integri di tipo finito su k. Se X e Y sono omeomorfi, allora sono isomorfi come k-schemi.
(3) Sia $K \supseteq k$ un estensione di campi e siano X e Y due schemi integri di tipo finito su k. Se $X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} K$ e $Y \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} K$ sono isomorfi come K-schemi, allora X e Y sono isomorfi come k-schemi.
(4) Sia k un campo e siano X e Y due schemi integri di tipo finito su k. Allora $X \times_{\operatorname{Spec} k} Y$ è integro.
(5) Sia k un campo algebricamente chiuso e siano X e Y due schemi affini integri di tipo finito su k. Allora $X \times_{\operatorname{Spec} k} Y$ è integro.

Definizione. Sia A un anello, sia B una A-algebra e sia M un B-modulo. Una *A-derivazione di B in M* è un omomorfismo A-lineare $\delta\colon B \to M$ che soddisfa la regola di Leibniz: $\forall b_1, b_2 \in B,\ \delta(b_1 b_2) = b_2\delta(b_1) + b_1\delta(b_2)$. L'insieme delle A-derivazioni di B in M si denota con $\operatorname{Der}_A(B, M)$.

Esercizio 4.5.

(1) Sia A un anello, sia B una A-algebra e sia M un B-modulo. Si provi che se δ è una A-derivazione di B in M, allora δ si annulla sugli elementi di B che provengono da A. [Suggerimento: cos'è $\delta(1)$?]
(2) Siano $i\colon A \to B$ e $\alpha\colon B \to C$ due omomorfismi di anelli. Sia N un C-modulo. Sul C-modulo $C \oplus N$ si consideri il prodotto dato da
$$(c_1, n_1) \cdot (c_2, n_2) = (c_1c_2, c_1n_2 + c_2n_1)$$
per ogni $c_1, c_2 \in C$ e $n_1, n_2 \in N$. In questo modo $C \oplus N$ è una C-algebra tramite $c \mapsto (c, 0)$. Si consideri l'omomorfismo suriettivo di C-algebre $\beta\colon C \oplus N \to C$ dato da $(c, n) \mapsto c$.
  (a) Si provi che per ogni $n \in N$ l'elemento $(0, n)$ è nilpotente in $C \oplus N$.
  (b) Si costruisca una bigezione tra $\operatorname{Der}_A(B, N)$ e l'insieme
$$\left\{\varphi \in \operatorname{Hom}_{(\mathrm{Alg}_A)}(B, C \oplus N) \mid \beta \circ \varphi = \alpha\right\}.$$
(3) Sia k un campo. Si consideri la k-algebra $k[t]/(t^2)$: si denoti con ε l'immagine di t, ovvero la classe $t + (t^2) \in k[t]/(t^2)$, e si denoti con $k[\varepsilon]$ questa k-algebra. Talvolta $k[\varepsilon]$ viene chiamata la k-algebra dei numeri duali. Si denoti con β l'omomorfismo suriettivo di k-algebre $k[\varepsilon] \to k$ definito da $\varepsilon \mapsto 0$.
  (a) Sia B una k-algebra locale e sia $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di B. Supponiamo che il campo residuo di B sia k, ovvero la composizione $k \hookrightarrow B \twoheadrightarrow B/\mathfrak{m}$ sia un isomorfismo di anelli. (Si denoti con α la proiezione al quoziente $B \twoheadrightarrow B/\mathfrak{m} = k$ e si denoti con π la proiezione al quoziente $\mathfrak{m} \twoheadrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.) Si costruiscano esplicitamente delle bigezioni naturali tra i seguenti tre insiemi:
    (i) $\operatorname{Hom}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k)$,
    (ii) $\operatorname{Der}_k(B, k)$,
    (iii) l'insieme degli omomorfismi $\varphi\colon B \to k[\varepsilon]$ di k-algebre tali che $\alpha = \beta \circ \varphi$.
  (b) Sia X uno schema su k. Si costruisca una bigezione tra i seguenti due insiemi:
    (i) $\operatorname{Hom}_{(\mathrm{Sch}/k)}(\operatorname{Spec} k[\varepsilon], X)$, che è l'insieme dei morfismi di k-schemi da $\operatorname{Spec} k[\varepsilon]$ a X,
    (ii) $\{(x, v) \mid x \in X \text{ tale che } \kappa(x) = k,\ v \in T_{X,x}\}$, che è l'insieme delle coppie (x, v), dove x è un punto k-razionale di X e v è un vettore tangente a X in x.

Università di Bologna
Dipartimento di Matematica
A.A. 2023/24, Secondo Semestre

Andrea Petracci
a [dot] petracci (nospam) [at] unibo [dot] it
`https://www.dm.unibo.it/~andrea.petracci3/2024Schemi/`

Teoria degli Schemi — Foglio di esercizi 5

Assegnato: martedí 30 Aprile 2024
Consegna delle soluzioni: entro martedí 14 Maggio 2024

Esercizio 5.1. (1) Sia $\varphi\colon A \to B$ un omomorfismo di anelli. Se B è generato come A-modulo da n elementi, allora si provi che ogni fibra di $\operatorname{Spec}\varphi\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ ha cardinalità $\leq n$.

(2) Sia $f\colon X \to Y$ un morfismo finito di schemi. Allora si provi che ogni fibra di f ha cardinalità finita.

(3) Sia $f\colon X \to Y$ un morfismo finito di schemi. Allora si provi che f è un morfismo di tipo finito e universalmente chiuso. (In realtà è anche proprio perché è separato, ma non dovete dimostrarlo.)

Esercizio 5.2. (Facoltativo)

(1) Sia B un anello $\mathbb{N}$-graduato noetheriano. Supponiamo che B sia generata come B_0-algebra da un numero finito di elementi omogenei di grado 1. Allora si provi che $\operatorname{Proj} B = \emptyset$ se e solo se esiste un intero $d \geq 1$ tale che $B_d = 0$.

(2) Sia R un anello, sia $A = R[x_0, \ldots, x_n]$ con $\mathbb{N}$-graduazione standard, sia $I \subseteq A$ un ideale omogeneo, sia $\pi\colon \mathbb{P}^n_R = \operatorname{Proj} A \to \operatorname{Spec} R$ il morfismo di schemi dato dall'inclusione $R \hookrightarrow A$. Per ogni punto $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ si provi che le seguenti condizioni sono equivalenti:
   (a) $\mathfrak{p} \in \pi(V_+(I))$,
   (b) $\operatorname{Proj}(\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_R A/I)$ non è vuoto,
   (c) per ogni intero $d \geq 1$, $\mathfrak{p}$ sta nel supporto dell'R-modulo $(A/I)_d = A_d/I_d$.

   Si deduca l'uguaglianza
$$\pi(V_+(I)) = \bigcap_{d\geq 1} \operatorname{Supp}_R\left((A/I)_d\right).$$

(3) Si provi che un morfismo proiettivo di schemi è di tipo finito e universalmente chiuso. (In realtà è anche proprio perché è separato, ma non dovete dimostrarlo.)

Esercizio 5.3. Si considerino le seguenti 12 proprietà di morfismi di schemi: di tipo finito, finito, affine, proprio, proiettivo secondo Hartshorne, immersione aperta, immersione chiusa, piatto, liscio, suriettivo, omeomorfismo, isomorfismo.

Si faccia un diagramma dove disegnate le implicazioni sempre vere tra le 12 proprietà considerate. (Qui potete usare, senza dimostrarli, i risultati che trovate nei libri di Hartshorne, Liu, Görtz–Wedhorn o in Stacks project.)

Per ciascuno dei seguenti morfismi di schemi, si dica quali delle 12 proprietà sopra sono valide. Basta che scriviate il risultato in una tabella – non occorrono giustificazioni.

(1) $\operatorname{Spec}\mathbb{Q} \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$
(2) $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,y]/(y^2 - x^3) \to \operatorname{Spec}\mathbb{C}$
(3) $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,y]/(y^2 - x^3) \to \operatorname{Spec}\mathbb{C}[x]$
(4) $\operatorname{Spec}\mathbb{C}(x)[y]/(y^2 - x^3) \to \operatorname{Spec}\mathbb{C}(x)$
(5) $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,y]/(y^2 - x(x^2-1)) \to \operatorname{Spec}\mathbb{C}$
(6) $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,y]/(y^2 - x(x^2-1)) \to \operatorname{Spec}\mathbb{C}[x]$
(7) $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
(8) $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
(9) $\operatorname{Proj}\mathbb{Z}[\frac{1}{10}][x_0,x_1,x_2]/(x_0x_2^2 - x_1^3 - 2x_0^2x_1 - 2x_0^3) \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\frac{1}{10}]$ dove $\deg x_0 = \deg x_1 = \deg x_2 = 1$
(10) $\operatorname{Proj} A[x_0,x_1]/(x_0x_1, x_1^2) \to \operatorname{Spec} A$, dove $A = \mathbb{Q}[x,y]/(x^3y, x^2y^2)$, $\deg x_0 = 2$, $\deg x_1 = 3$.

Esercizio 5.4. Per ogni fascio di gruppi abeliani su uno spazio topologico e per ogni ricoprimento aperto, si possono definire dei gruppi (detti di coomologia di Čech) indicizzati dai numeri interi non negativi. Se il fascio è un fascio di gruppi non necessariamente abeliani, si ottengono soltanto $\check{\mathrm{H}}^0$ (che è il gruppo delle sezioni globali) e $\check{\mathrm{H}}^1$ che è soltanto un insieme puntato.

(1) Sia X uno spazio topologico, sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di X. Usiamo le abbreviazioni $U_{ij} = U_i \cap U_j$ e $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$ per ogni $i,j,k \in I$. Si fissi G un fascio di gruppi non necessariamente abeliani su X. Un 1-*cociclo* è una tupla $\{g_{ij}\}_{(i,j)\in I\times I}$ tale che:
   - per ogni coppia di indici $(i,j) \in I \times I$, $g_{ij} \in G(U_{ij})$,
   - per ogni terna di indici $(i,j,k) \in I \times I \times I$
$$g_{ki}|_{U_{ijk}} = g_{kj}|_{U_{ijk}} \cdot g_{ji}|_{U_{ijk}} \quad \text{in } G(U_{ijk}).$$

(Segue che $g_{ii} = 1$ in $G(U_i)$ e $g_{ji} = g_{ij}^{-1}$ in $G(U_{ij})$.) L'insieme degli 1-cocicli si indica con $\check{Z}^1(\mathcal{U}, G)$. Due 1-cocicli $\{g_{ij}\}$, $\{g'_{ij}\}$ in $\check{Z}^1(\mathcal{U}, G)$ si dicono *equivalenti* se esiste una tupla $\{a_i\}_{i \in I}$ di sezioni $a_i \in G(U_i)$ tale che

$$a_i|_{U_{ij}} \cdot g_{ij} = g'_{ij} \cdot a_j|_{U_{ij}}$$

per ogni $i, j \in I$. Si dimostri che essere equivalenti è una relazione di equivalenza sull'insieme dei cocicli $\check{Z}^1(\mathcal{U}, G)$. Si denoti con $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, G)$ l'insieme quoziente; esso è un insieme puntato, nel senso che è un insieme in cui c'è un elemento speciale, dato dalla classe del cociclo costituito dalla tupla degli elementi neutri.

(2) Sia X uno spazio topologico, sia G un fascio di gruppi non necessariamente abeliani su X, sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di X. Se X è un elemento di $\mathcal{U}$, allora si provi che l'insieme $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, G)$ contiene solo un elemento. [Suggerimento: supponiamo $X = U_{i_0}$ per uno specifico $i_0 \in I$ e si ricordi che per ogni $j \in I$ vale $U_{i_0 j} = U_j$.]

(3) Sia X uno spazio topologico, sia G un fascio di gruppi non necessariamente abeliani su X, siano $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ e $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ due ricoprimenti aperti di X tali che $\mathcal{V}$ è *piú fine* di $\mathcal{U}$; quindi esiste una funzione di raffinamento $\tau \colon \Lambda \to I$ tale che per ogni $\lambda \in \Lambda$ vale $V_\lambda \subseteq U_{\tau(\lambda)}$. Si consideri

$$\tau^* \colon \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, G) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{V}, G)$$

data da

$$[\{g_{ij}\}_{i,j \in I}] \mapsto \left[\left\{g_{\tau(\lambda),\tau(\mu)}|_{V_{\lambda\mu}}\right\}_{\lambda,\mu \in \Lambda}\right].$$

- Si provi che τ^* è ben definita e che manda l'elemento speciale di $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, G)$ nell'elemento speciale di $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{V}, G)$.

Si potrebbe provare che τ^* è iniettiva.[1] Si potrebbe provare che τ^* non dipende dalla scelta della funzione di raffinamento τ: in altre parole, se $\sigma \colon \Lambda \to I$ è un'altra funzione di raffinamento, allora la funzione $\sigma^* \colon \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, G) \to \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{V}, G)$ indotta da σ coincide con τ^*. Inoltre si potrebbe provare che se $\mathcal{W}$ è un ricoprimento aperto piú fine di $\mathcal{V}$ allora la funzione $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, G) \to \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{W}, G)$ coincide con la composizione di $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, G) \to \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{V}, G)$ e $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{V}, G) \to \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{W}, G)$. Si può quindi considerare il limite diretto (o colimite)

$$\check{\mathrm{H}}^1(X, G) := \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, G)$$

al variare di tutti i ricoprimenti aperti di X. Esso è un insieme puntato ed è l'unione di tutti gli insiemi $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, G)$.

(4) Sia X uno spazio topologico e sia G un fascio di gruppi abeliani su X. Si provi che, per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di X, gli insiemi puntati $\check{Z}^1(\mathcal{U}, G)$ e $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, G)$ hanno una naturale struttura di gruppo abeliano in cui l'elemento speciale è l'elemento neutro. Si provi inoltre che $\check{\mathrm{H}}^1(X, G)$ ha una naturale struttura di gruppo abeliano in cui l'elemento speciale è l'elemento neutro.

(5) Sia X uno spazio topologico, sia G un fascio di gruppi abeliani (denotati additivamente) su X, siano U e V due aperti di X tali che $X = U \cup V$. Si consideri l'omomomorfismo di gruppi abeliani

$$\partial \colon G(U) \oplus G(V) \longrightarrow G(U \cap V)$$

dato da $\partial(u, v) = u|_{U \cap V} - v|_{U \cap V}$ per ogni $u \in G(U)$ e $v \in G(V)$. Se si considera il ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U, V\}$ di X, allora si provi che $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, G)$ è naturalmente isomorfo a $\operatorname{coker} \partial$. Si applichi quanto fatto ai seguenti due casi.

   (a) Si consideri lo spazio topologico $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea. Si considerino gli aperti $U = (-1, +\infty)$ e $V = (-\infty, 1)$ di $\mathbb{R}$ e il ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U, V\}$. Sia $\underline{\mathbb{Z}}$ il fascio costante su $\mathbb{R}$ associato al gruppo $\mathbb{Z}$. Si calcoli $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}})$.

   (b) Si consideri lo spazio topologico $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ dotato della topologia euclidea. Si considerino gli aperti $U = S^1 \smallsetminus \{1\}$ e $V = S^1 \smallsetminus \{-1\}$ e il ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U, V\}$. Sia $\underline{\mathbb{Z}}$ il fascio costante su S^1 associato al gruppo $\mathbb{Z}$. Si calcoli $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{Z}})$.

(6) Sia k un campo. Si consideri lo schema $\mathbb{P}^1_k = \operatorname{Proj} k[x_0, x_1]$, con $\deg x_0 = \deg x_1 = 1$. Si considerino le carte affini standard di $\mathbb{P}^1_k$, $U_0 = D_+(x_0)$ e $U_1 = D_+(x_1)$, che sono entrambe isomorfe a $\mathbb{A}^1_k$. Si consideri il ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$ di $\mathbb{P}^1_k$. Si fissi $d \in \mathbb{Z}$ e si consideri il fascio di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}$-moduli (e quindi di conseguenza fascio di k-spazi vettoriali) $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(d)$ su $\mathbb{P}^1_k$. Si provi che $\check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(d))$ è in modo naturale uno spazio vettoriale su k e se ne calcoli la dimensione.

(7) Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio anellato e sia $r \in \mathbb{N}$ un intero. Si consideri il fascio $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_X)$ su X tale che per ogni aperto $U \subseteq X$ le sezioni di $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_X)$ su U sono esattamente gli elementi di $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_X(U))$, cioè le matrici invertibili $r \times r$ con coefficienti nell'anello (commutativo!) $\mathcal{O}_X(U)$.

[1] Questo è un fatto specifico di $\check{\mathrm{H}}^1$, ed è in generale falso per gli altri gruppi coomologia di Cech. Per una dimostrazione dell'iniettività nel caso in cui G sia un fascio di gruppi abeliani si rimanda al Lemma 12.4 in Forster, *Lectures on Riemann surfaces*, GTM 81, Springer.

- Per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di X, sia $\mathrm{Vect}_r(\mathcal{U})$ l'insieme delle classi di isomorfismo dei fasci localmente liberi di $\mathcal{O}_X$-moduli di rango r che sono $\mathcal{U}$-trivializzabili, cioè i fasci di $\mathcal{O}_X$-moduli $\mathcal{E}$ tali che per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste un isomorfismo di $\mathcal{O}_U$-moduli tra $\mathcal{E}|_U$ e $\mathcal{O}_U^{\oplus r}$. Per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di X si costruisca una bigezione naturale
$$\Phi_{\mathcal{U}} \colon \mathrm{Vect}_r(\mathcal{U}) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1(\mathcal{U}, \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_X)).$$
- Sia $\mathrm{Vect}_r(X)$ l'insieme delle classi di isomorfismo dei fasci localmente liberi di $\mathcal{O}_X$-moduli di rango r. Si costruisca una bigezione naturale
$$\Phi \colon \mathrm{Vect}_r(X) \longrightarrow \check{\mathrm{H}}^1(X, \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_X)).$$

(8) Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio anellato. Allora $\mathrm{GL}_1(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X^*$ è un fascio di gruppi abeliani, perciò per (4) l'insieme $\check{\mathrm{H}}^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ ha una naturale struttura di gruppo abeliano. Quindi, tramite la bigezione ϕ in (9) si ottiene una struttura di gruppo abeliano su $\mathrm{Vect}_1(X)$. Si descriva questa struttura, cioè si dica chi è la moltiplicazione di due elementi di $\mathrm{Vect}_1(X)$, chi è l'elemento neutro e chi è l'inverso di un elemento di $\mathrm{Vect}_1(X)$. Questa struttura di gruppo su $\mathrm{Vect}_1(X)$ si chiama *gruppo di Picard* di $(X, \mathcal{O}_X)$ e si denota con $\mathrm{Pic}(X, \mathcal{O}_X)$, o con $\mathrm{Pic}(X)$ se il fascio $\mathcal{O}_X$ è chiaro dal contesto.

Esercizio 5.5. Sia k un campo.

(1) Si consideri la k-algebra
$$S = k[x, y, x_0, x_1]/(xx_1 - yx_0)$$
con $\mathbb{N}$-graduazione data da $\deg x = \deg y = 0$ e $\deg x_0 = \deg x_1 = 1$. Si consideri il k-schema $X = \operatorname{Proj} S$.
  (i) Si provi che X è l'unione di due aperti isomorfi a $\mathbb{A}_k^2$. (Per il seguito, è una buona idea dare dei nomi a queste due copie di $\mathbb{A}_k^2$ e alle loro coordinate standard.)
  (ii) Si consideri il piano affine $\mathbb{A}_k^2 = \operatorname{Spec} k[x, y]$ e si consideri il morfismo di k-schemi $\pi \colon X \to \mathbb{A}_k^2$ dato dall'inclusione di k-algebre $k[x, y] \hookrightarrow S$. Si provi che π è un morfismo proiettivo.
  (iii) Si determini esplicitamente la fibra rispetto a π di qualsiasi punto k-razionale di $\mathbb{A}_k^2$. In particolare, se E è la fibra del punto k-razionale di $\mathbb{A}_k^2$ corrispondente all'ideale massimale (x, y) di $k[x, y]$, allora si provi che esiste un isomorfismo di k-schemi $\varphi \colon \mathbb{P}_k^1 \to E$.
  (iv) Si provi che esiste un aperto non vuoto $V \subseteq \mathbb{A}_k^2$ tale che la restrizione $\pi|_{\pi^{-1}(V)} \colon \pi^{-1}(V) \to V$ è un isomorfismo di k-schemi. Si determini il piú grande aperto V che soddisfa questa proprietà.
  (v) Si dica se π è un morfismo piatto.
  (vi) Sia $\mathcal{I}$ il fascio di ideali su X che corrisponde all'immersione chiusa $i \colon E \hookrightarrow X$. Si consideri l'$\mathcal{O}_X$-modulo quoziente $\mathcal{C} = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$. Si determini $d \in \mathbb{Z}$ tale che $\mathcal{C}$ sia isomorfo come $\mathcal{O}_X$-modulo a $i_* \varphi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(d)$.

(2) Si considerino le k-algebre $A = k[x, y, z]/(xy - z^2)$ e
$$S = k[x, y, z, x_0, x_1, x_2]/(xy - z^2, x_0x_1 - x_2^2, yx_0 - xx_1, zx_0 - xx_2, zx_1 - yx_2)$$
con $\mathbb{N}$-graduazione data da $\deg x = \deg y = \deg z = 0$ e $\deg x_0 = \deg x_1 = \deg x_2 = 1$. Si ponga $X = \operatorname{Proj} S$.
  (a) Si provi che X è l'unione di due aperti isomorfi a $\mathbb{A}_k^2$.
  (b) Si consideri la superficie $\operatorname{Spec} A$ e si consideri il morfismo di k-schemi $\pi \colon X \to \operatorname{Spec} A$ dato dall'inclusione di k-algebre $A \hookrightarrow S$. Si determini esplicitamente la fibra rispetto a π di qualsiasi punto k-razionale di $\operatorname{Spec} A$. In particolare, se E è la fibra del punto k-razionale di $\operatorname{Spec} A$ corrispondente all'ideale massimale $Ax + Ay + Az$ di A, allora si provi che esiste un isomorfismo di k-schemi $\varphi \colon \mathbb{P}_k^1 \to E$.
  (c) Si provi che esiste un aperto non vuoto $V \subseteq \operatorname{Spec} A$ tale che la restrizione $\pi|_{\pi^{-1}(V)} \colon \pi^{-1}(V) \to V$ è un isomorfismo di k-schemi. Si determini il piú grande aperto V che soddisfa questa proprietà.
  (d) $\operatorname{Spec} A$ è un k-schema liscio? X è un k-schema liscio?
  (e) Sia $\mathcal{I}$ il fascio di ideali su X che corrisponde all'immersione chiusa $i \colon E \hookrightarrow X$. Si consideri l'$\mathcal{O}_X$-modulo quoziente $\mathcal{C} = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$. Si determini $d \in \mathbb{Z}$ tale che $\mathcal{C}$ sia isomorfo come $\mathcal{O}_X$-modulo a $i_* \varphi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}(d)$.