

TEORIA DEGLI SCHEMI

Università di Bologna, Dipartimento di Matematica
Anno accademico 2024/25, Secondo Semestre

Andrea Petracci
a [dot] petracci (nospam) [at] unibo [dot] it
<https://www.dm.unibo.it/~andrea.petracci3/2025Schemi/>

Aggiornato il 3 aprile 2025

PREREQUISITI

Oltre ai corsi obbligatori di algebra e geometria della laurea triennale, si richiede che chi voglia seguire questo corso conosca alcuni argomenti di base di algebra commutativa e di geometria algebrica; più precisamente:

- algebra commutativa (come trattata nel corso *06689 - Algebra commutativa*): anelli, ideali, moduli, moduli di frazioni, prodotti tensoriali di moduli, piatezza, anelli noetheriani e artiniani, estensioni finite e intere, Nullstellensatz, cenni di teoria della dimensione. Referenze: [AM69, capitoli 1-3, 5-8 e cenni del capitolo 11], [Mat89, capitoli 1-5, 7, 13], [Eis95, capitoli 1,2,4,8,13], [Rei95].
- geometria proiettiva (come trattata nel corso *54777 - Geometria proiettiva*): spazio proiettivo, carte affini, coordinate omogenee, proiettività, (dis)omogeneizzazione di polinomi, ipersuperfici algebriche affini e proiettive, quadriche e coniche, studio delle singolarità delle curve algebriche piane, una qualche definizione di molteplicità di intersezione tra due curve, enunciato del teorema di Bezout. Referenze: [Ser00, capitoli 3,4], [FFP16].
- geometria algebrica “classica” (come trattata nel corso *96733 - Curve e superfici algebriche*): topologia di Zariski su k^n e su $\mathbb{P}^n(k)$ per un campo algebricamente chiuso k , Nullstellensatz, corrispondenza tra ideali massimali/primi/radicali e punti/chiusi irriducibili/chiusi, varietà affini e (quasi-)proiettive, funzioni regolari, morfismi, equivalenza tra la categoria delle varietà affini e la categoria delle k -algebre ridotte di tipo finito, prodotti, immersioni di Segre e di Veronese, funzioni e mappe razionali, equivalenza tra la categoria i cui oggetti sono le varietà irriducibili e le cui frecce sono le mappe razionali dominanti e la categoria delle estensioni finitamente generate di campi di k , dimensione, spazio tangente e liscchezza. Referenze: [Har77, sezioni I.1-5], [SKKT00, capitoli 1-7], [Rei88], [Sha13, sezioni 1.1-6, 2.1].

Inoltre è richiesta la conoscenza di alcune nozioni di base di teoria delle categorie: categorie, funtori, trasformazioni naturali, funtori pieni/fedeli/pienamente fedeli, equivalenze di categorie, prodotti e coprodotti, oggetti terminali e iniziali. Per questi argomenti suggerisco i primi capitoli di [KS06] e [Mac71].

PROGRAMMA PRELIMINARE

Il corso è un'introduzione alla teoria degli schemi, sviluppata da Alexander Grothendieck. Gli argomenti trattati includeranno: fasci, schemi, proprietà globali e locali degli schemi, fasci coerenti, divisori, differenziali.

Ci baseremo sostanzialmente sul capitolo II di [Har77] e sui capitoli 2-7 di [Liu02]. Altre possibili referenze possono essere i libri [EH00, GW20, Mum99].

La referenza rigorosa e fondazionale della teoria degli schemi, scritta dallo stesso Grothendieck (con l'aiuto di Jean Dieudonné), è la serie di volumi *Éléments de géométrie algébrique*, comunemente nota con la sigla EGA. Questi volumi delle Publications Mathématiques de l'IHÉS possono essere scaricati liberamente al <http://www.numdam.org/search/elements%20geometrie%20algebrique-%22Grothendieck,%20Alexander%22-qn/>. Un'altra referenza rigorosa e onnicomprensiva della teoria degli schemi (e di tante altre cose) è il blog collaborativo <https://stacks.math.columbia.edu> mantenuto da Aise Johan de Jong. Sconsiglio a chi si avvicina per la prima volta alla teoria degli schemi di studiare EGA e Stacks Project, perché queste due opere enciclopediche non forniscono intuito geometrico né esempi. D'altra parte queste due opere sono molto utili a chi ha già esperienza e fa ricerca.

PERCHÉ LA TEORIA DEGLI SCHEMI?

La teoria degli schemi, sviluppata da Alexander Grothendieck negli anni '60 del secolo scorso, è il linguaggio moderno e rigoroso con cui si studia/fa/scrive la geometria algebrica oggi. Esso unifica la geometria algebrica

classica (ovvero lo studio dei luoghi di zeri di equazioni polinomiali a coefficienti in un campo algebricamente chiuso) e la teoria algebrica dei numeri (ovvero lo studio del comportamento degli ideali primi rispetto alle estensioni finite di campi del campo dei numeri razionali), permettendo di dare intuizione geometrica all'algebra commutativa.

Vale la seguente analogia: il calcolo differenziale (cioè lo studio delle funzioni differenziabili tra aperti di $\mathbb{R}^n$ svolto ad Analisi 2) sta alla geometria differenziale (cioè lo studio delle varietà differenziabili), come l'algebra commutativa (cioè lo studio degli anelli commutativi) sta alla teoria degli schemi. Infatti, in modo molto vago, si può dire che uno schema è un “oggetto geometrico” che localmente si comporta come un anello.

Alcuni vantaggi della teoria degli schemi sono: poter considerare funzioni nilpotenti per poter parlare rigorosamente di “molteplicità”, poter considerare la stessa varietà su campi diversi, poter considerare oggetti “aritmetici” (ovvero definiti su $\mathbb{Z}$ o sull'anello degli interi di un campo di numeri) utili per applicare tecniche geometriche a problemi di equazioni diofantee.

Oltre alle introduzioni che potete leggere nei libri menzionati sopra, potete dare uno sguardo a questo articolo scritto da David Mumford <https://www.dam.brown.edu/people/mumford/blog/2014/Grothendieck.html>.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.
- [EH00] David Eisenbud and Joe Harris. *The geometry of schemes*, volume 197 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.
- [FFP16] Elisabetta Fortuna, Roberto Frigerio, and Rita Pardini. *Projective geometry*, volume 104 of *Unitext*. Springer, 2016. Solved problems and theory review.
- [GW20] Ulrich Görtz and Torsten Wedhorn. *Algebraic geometry I. Schemes—with examples and exercises*. Springer Studium Mathematik—Master. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2020.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
- [KS06] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Categories and sheaves*, volume 332 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [Liu02] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2002. Translated from the French by Reinie Ern , Oxford Science Publications.
- [Mac71] Saunders MacLane. *Categories for the working mathematician*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971.
- [Mat89] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1989. Translated from the Japanese by M. Reid.
- [Mum99] David Mumford. *The red book of varieties and schemes*, volume 1358 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, expanded edition, 1999. Includes the Michigan lectures (1974) on curves and their Jacobians, With contributions by Enrico Arbarello.
- [Rei88] Miles Reid. *Undergraduate algebraic geometry*, volume 12 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [Rei95] Miles Reid. *Undergraduate commutative algebra*, volume 29 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [Ser00] Edoardo Sernesi. *Geometria 1*. Bollati Boringhieri, 2000.
- [Sha13] Igor R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry. 1*. Springer, Heidelberg, third edition, 2013. Varieties in projective space.
- [SKKT00] Karen E. Smith, Lauri Kahanp  , Pekka Kek  lainen, and William Traves. *An invitation to algebraic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2000.

LEZIONI

(1) **19 Febbraio 2025.** Introduzione al corso e questioni organizzative.

Ripasso di geometria algebrica “classica”: chiusi affini, chiusi proiettivi, funzioni polinomiali su chiusi affini, Nullstellensatz, morfismi polinomiali tra chiusi affini, equivalenza tra la categoria dei chiusi affini coi morfismi polinomiali e la categoria delle k -algebre di tipo finito ridotte. Cenni alla categoria delle varietà quasi-proiettive.

Motivazione alla teoria degli schemi: 1) lavorare con varietà astratte non immerse, 2) lavorare con campi non algebricamente chiusi (come $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{F}_p$ per scopi aritmetici) o su anelli arbitrari, 3) intuizione geometrica di intersezione di curve piane e punti di intersezione con molteplicit  e necessit  di avere oggetti geometrici diversi corrispondenti a ideali diversi ma con lo stesso radicale, 4) spazi di moduli (M_g , moduli di fibrati vettoriali, grassmanniane, sistemi lineari di curve piane).

Convenzioni, notazioni e richiami di algebra commutativa. Notazioni: $\mathbb{Z}[\frac{1}{f}]$, $\mathbb{Z}_{(p)} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}[[x]]/(x-p)$ (numeri p -adici), $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Categorie slice su un oggetto. Definizione di algebra su un anello. Categoria delle algebre su un anello. Definizione di algebra finita, intera, di tipo finito. Un'algebra   finita se e solo se   di tipo finito e intera (senza dimostrazione). Esempi: $A \twoheadrightarrow A/I$, $A \hookrightarrow A[x]$, $A \rightarrow A_f$, $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[x]/(x^3+x+1)$, $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_{(2)}$, $\mathbb{Z}_{(2)} \hookrightarrow \mathbb{Q}$. Lemma di Zariski o Nullstellensatz algebrico (senza dimostrazione):

se $L \supseteq K$ è un'estensione di campi e L è una K -algebra di tipo finito, allora L è un K -spazio vettoriale di dimensione finita.

(2) **20 Febbraio 2025.** Spettro primo di un anello e topologia di Zariski. Aperti principali. Il radicale di un ideale è l'intersezione dei primi che lo contengono (senza dimostrazione). Lo spettro primo di un anello è quasi-compatto. La chiusura di T in $\text{Spec } A$ è $V(\cap_{\mathfrak{p} \in T} \mathfrak{p})$. I punti chiusi di $\text{Spec } A$ sono gli ideali massimali. Esempi: campi, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{(2)}$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{R}[x]$. Definizione di punto generico per lo spettro di un dominio.

Definizione di spazi topologici irriducibili e di componenti irriducibili di uno spazio topologico; proprietà (senza dimostrazione). $V(I)$ è irriducibile se e solo se $\sqrt{I}$ è primo. Bigezione tra punti chiusi/sottoinsiemi chiusi irriducibili/sottoinsiemi chiusi di $\text{Spec } A$ e ideali massimali/primi/radicali di A .

Omomorfismi di anelli inducono funzioni continue tra gli spettri. Una suriezione di anelli induce un'immersione chiusa. Una localizzazione induce un'immersione. Spettro di un prodotto di due anelli.

Definizione di campo residuo. Intuizione su "la funzione $f \in A$ si annulla nel punto $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ ".

(3) **26 Febbraio 2025.** Lemma di Gauss per irriducibilità di polinomi in una variabile a coefficienti in UFD (senza dimostrazione). Dimostrazione rigorosa del fatto che $y^2 - x^3 \in k[x, y]$ è irriducibile. Caratterizzazione degli ideali primi di $A[x]$ se A è un PID. Studio di $\text{Spec } \mathbb{Z}[x]$ come superficie aritmetica: classificazione dei punti e loro campi residui, fibre sopra $\text{Spec } \mathbb{Z}$, il chiuso $V(x^2 + 1)$ è $\text{Spec } \mathbb{Z}[i]$. Caratterizzazione degli ideali primi in $k[x, y]$.

Richiami di geometria algebrica classica: Nullstellensatz per chiusi affini su un campo algebricamente chiuso.

Spazi topologici di Jacobson e caratterizzazione. Anelli di Jacobson e caratterizzazione. Esempi di anelli di Jacobson. Un anello locale è di Jacobson se e solo se ha dimensione zero. Se $f: A \rightarrow B$ è un omomorfismo di tipo finito e A è un anello di Jacobson, allora B è un anello di Jacobson e la contrazione di un massimale di B lungo f è un massimale di A e l'omomorfismo indotto tra i campi residui è un'estensione finita di campi (senza dimostrazione). Un'algebra di tipo finito su un campo è un anello di Jacobson.

Se k è un campo algebricamente chiuso e X è un chiuso affine classico su k , allora X è omeomorfo a $\text{Specm } k[X]$; bigezione tra punti/chiusi irriducibili/chiusi di X e punti chiusi/chiusi irriducibili/chiusi di $\text{Spec } k[X]$. Se I è un ideale di $k[X]$, allora il chiuso schematico $V(I)$ contiene tutti e soli gli ideali primi di $k[X]$ che corrispondono a sottoinsiemi chiusi irriducibili del chiuso classico $Z_X(I) \subseteq X$.

(4) **5 marzo 2025.** Se X è un chiuso affine classico sul campo algebricamente chiuso k e $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di $k[X]$, allora il campo residuo $\kappa(\mathfrak{p})$ è il campo delle funzioni razionali sul chiuso irriducibile $Z_X(\mathfrak{p})$. Se $f: X \rightarrow Y$ è un morfismo polinomiale tra chiusi affini classici sul campo algebricamente chiuso k e $f^*: k[Y] \rightarrow k[X]$ è l'omomorfismo di k -algebre indotto, allora $\text{Spec } f^*: \text{Spec } k[X] \rightarrow \text{Spec } k[Y]$ "è" l'estensione di f ai punti non chiusi nel seguente modo: l'ideale primo $\mathfrak{q}$ di $k[X]$ viene mandato nel primo di $k[Y]$ corrispondente alla chiusura di $f(Z_X(\mathfrak{q}))$ in Y .

Se $\varphi: A \rightarrow B$ è un omomorfismo di anelli, $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$ e $\mathfrak{q} = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, allora φ induce un omomorfismo iniettivo di domini $A/\mathfrak{p} \hookrightarrow A/\mathfrak{q}$, un omomorfismo locale $A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{q}}$ e un'estensione di campi $\kappa(\mathfrak{p}) \hookrightarrow \kappa(\mathfrak{q})$.

Definizioni di prefascio e fascio su uno spazio topologico date per buono. Definizione di prefascio separato su uno spazio topologico. Esempi: prefascio costante, fascio costante, funzioni continue a valori in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, funzioni continue mai nulle a valori in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, funzioni continue in un gruppo topologico, funzioni continue e limitate a valori in $\mathbb{R}$.

Se P è un prefascio separato allora $P(\emptyset) = 0$.

Omomorfismi di prefasci e di fasci. Categoria dei prefasci e dei fasci. La categoria dei fasci è una sottocategoria piena della categoria dei prefasci.

Definizione di nucleo e immagine di un omomorfismo di fasci; lasciato per esercizio mostrare che siano fasci.

Sollevamento di applicazioni qualsiasi rispetto a un rivestimento (senza dimostrazione). Se X è uno spazio topologico con una base di aperti semplicemente connessi (per esempio una varietà topologica), allora l'esponenziale $\exp: \mathcal{C}_{X, \mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{C}_{X, \mathbb{C}}^*$ è un omomorfismo suriettivo di fasci con nucleo isomorfo al fascio costante $\mathbb{Z}_X$; in generale non è suriettivo su ogni aperto (problema dell'esistenza del logaritmo complesso).

Spighe e germi di un prefascio in un punto. La spiga è un gruppo abeliano (senza dimostrazione). Germi delle funzioni C^∞ reali in una variabile e confronto con $\mathbb{R}[[T]]$ tramite lo sviluppo di Taylor. Germi delle funzioni olomorfe in una variabile e confronto con $\mathbb{C}[[T]]$ tramite lo sviluppo di Taylor; definizione di $\mathbb{C}\{T\}$. Se X è un chiuso affine classico sul campo algebricamente chiuso k e $x \in X$ è un punto, allora la spiga del fascio delle funzioni regolari nel punto x è la localizzazione di $k[X]$ nell'ideale massimale $I_X(x)$ (senza dimostrazione). Se X è una varietà quasi-proiettiva classica liscia su $\mathbb{C}$ di dimensione n e $x \in X$ è un punto classico, confronto tra germi di funzioni regolari in x , germi di funzioni olomorfe in x e $\mathbb{C}[[T_1, \dots, T_n]]$.

(5) **6 Marzo 2025.** Fascificazione di un prefascio: definizione e proprietà. La fascificazione dà un funtore aggiunto all'inclusione della categoria dei fasci nella categoria dei prefasci. Proprietà dei monomorfismi e degli

epimorfismi di fasci. Kernel, immagine, cokernel e esattezza nella categoria dei prefasci e nella categoria dei fasci.

Successione esatta esponenziale e costruzione dell'omomorfismo $\mathcal{C}_{X,\mathbb{C}}^*(X) \rightarrow H^1(X, \mathbb{Z})$ tramite il numero di avvolgimento che prolunga la sequenza esatta delle sezioni globali.

Costruzione e prime proprietà del fascio indotto da un A -modulo su $\text{Spec } A$.

(6) **10 Marzo 2025.** Proprietà del fascio indotto da un A -modulo su $\text{Spec } A$. Il gruppo delle sezioni globali di $\tilde{M}$ è M (con dimostrazione).

Push-forward di un fascio tramite una funzione continua. Relazione tra le spighe. Esempi con target il punto (sezioni globali) e con source il punto (fascio grattacielo).

Pull-back di un fascio tramite una funzione continua. Esempio dell'immersione di un punto (spiga) e di un'immersione aperta (restrizione di un fascio a un aperto). Aggiunzione tra pull-back e push-forward (senza dimostrazione).

Se $\varphi: A \rightarrow B$ è un omomorfismo di anelli e N è un B -modulo, allora il pushforward di $\tilde{N}^B$ tramite $\text{Spec } \varphi$ è $\tilde{N}^A$. Esempio per la suriezione $A \twoheadrightarrow A/I$. Definizione di supporto di un fascio. Il supporto di $\tilde{A/I}^A$ è $V(I)$.

Definizione di spazio anellato e di spazio localmente anellato. Esempi: funzioni continue a valori in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ su uno spazio topologico, funzioni C^∞ a valori in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ su una smooth manifold, funzioni olomorfe su una complex manifold, funzioni regolari su una varietà quasi-proiettiva 'classica' su un campo algebricamente chiuso, fascio di struttura su $\text{Spec } A$. Se k è un campo algebricamente chiuso e X è un chiuso affine 'classico' su k , allora il fascio delle funzioni regolari 'classiche' su X corrisponde al fascio $\widetilde{k[X]}$.

(7) **12 Marzo 2025.** Se X è uno spazio topologico di Jacobson e $i: X_0 \hookrightarrow X$ è l'inclusione dell'insieme dei punti chiusi, allora $i_*: \text{Sh}(X_0) \rightarrow \text{Sh}(X)$ è un'equivalenza.

Definizione di campo residuo in un punto in uno spazio localmente anellato. Notazioni: $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ e $f(x) \in \kappa(x)$ per una sezione di $\mathcal{O}_X$ su un intorno aperto di x in X . Se $(X, \mathcal{O}_X)$ è uno spazio localmente anellato, $U \subseteq X$ è aperto e $f \in \mathcal{O}_X(U)$, allora il luogo dove f si annulla è un chiuso di U (lasciato per esercizio).

Definizione di omomorfismo locale tra anelli locali. Esempio di omomorfismo non locale tra anelli locali.

Per una funzione continua $f: X \rightarrow Y$, costruzione di $f^\#: \mathcal{C}_{Y,\mathbb{R}} \rightarrow f_*\mathcal{C}_{X,\mathbb{R}}$ omomorfismo di fasci di $\mathbb{R}$ -algebre. Definizione di morfismo di spazi (localmente) anellati. Composizione di morfismi di spazi anellati. Categorie di spazi (localmente) anellati su un anello e confronto con manifold C^∞ , complex manifold, varietà algebriche quasi-proiettive "classiche" su un campo algebricamente chiuso.

Definizione di varietà algebriche "astratte" "classiche" su un campo algebricamente chiuso. Definizione di schema affine (su un anello), schema (su un anello), varietà algebrica affine "schematica" su un campo, di varietà algebrica "schematica" su un campo.

Se k è un campo algebricamente chiuso, funtore da varietà algebriche (affini) "classiche" su k a varietà algebriche (affini) "schematiche".

Un aperto di uno schema è uno schema. Gli aperti affini di uno schema formano una base.

(8) **17 Marzo 2025.** Se X e Y sono smooth manifold e $f: X \rightarrow Y$ è una funzione continua tale che esiste $f^\#: \mathcal{C}_{Y,\mathbb{R}}^\infty \rightarrow f_*\mathcal{C}_{X,\mathbb{R}}^\infty$ omomorfismo di fasci di $\mathbb{R}$ -algebre tale che $(f, f^\#)$ è un morfismo di spazi localmente $\mathbb{R}$ -anellati $(X, \mathcal{C}_{X,\mathbb{R}}^\infty) \rightarrow (Y, \mathcal{C}_{Y,\mathbb{R}}^\infty)$, allora f è C^∞ . La categoria delle smooth manifold con le mappe C^∞ è equivalente a una sottocategoria piena della categoria degli spazi localmente $\mathbb{R}$ -anellati. La categoria delle complex manifold con le mappe olomorfe è equivalente a una sottocategoria piena della categoria degli spazi localmente $\mathbb{C}$ -anellati. Se k è un campo algebricamente chiuso, la categoria delle varietà quasi-proiettive classiche su k è equivalente a una sottocategoria piena della categoria degli spazi localmente k -anellati.

Un omomorfismo di anelli $A \rightarrow B$ induce un morfismo di schemi $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$. Se A e B sono due anelli, l'insieme degli omomorfismi di anelli $A \rightarrow B$ è in bigezione con l'insieme dei morfismi di schemi $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$. La categoria degli anelli è equivalente all'opposta della categoria degli schemi affini.

Le sezioni globali di $\mathbb{A}_k^2 \setminus V(x, y)$ sono $k[x, y]$ e $\mathbb{A}_k^2 \setminus V(x, y)$ non è uno schema affine.

Costruzione di morfismi di schemi $X \rightarrow Y$ tramite un ricoprimento aperto di X . Se X è uno schema e Y è uno schema affine, allora l'insieme dei morfismi di schemi $X \rightarrow Y$ è in bigezione con l'insieme degli omomorfismi di anelli $\mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow \mathcal{O}_X(X)$. Se R è un anello, allora la categoria degli R -schemi è equivalente alla categoria slice degli schemi sopra $\text{Spec } R$.

Incollamento di spazi topologici, di fasci e di schemi.

(9) **19 Marzo 2025.** Definizione di spazio affine su un anello. Costruzione di $\mathbb{P}_R^1$ incollando due copie di $\mathbb{A}_R^1$; sezioni globali di $\mathbb{P}_R^1$. Cenno sulla costruzione di $\mathbb{P}_R^n$ incollando $n+1$ copie di $\mathbb{A}_R^n$. Cenno sulla costruzione della Grassmanniana su un anello. Cenno sulla costruzione di $\mathbb{P}_R^n \times_R \mathbb{P}_R^m$ incollando $(n+1)(m+1)$ copie di $\mathbb{A}_R^{n+m}$.

Costruzione della retta con due origini incollando due copie di $\mathbb{A}_R^1$. Costruzione del piano con due origini

incollando due copie di $\mathbb{A}_R^2$: qui esistono due aperti affini la cui intersezione non è affine.

Definizione di immersione aperta e di immersione chiusa di schemi. Definizione di sottoschema aperto e di sottoschema chiuso. Se A è un anello, allora la funzione che associa a un ideale $I \subseteq A$ la classe dell'immersione chiusa $\text{Spec } A/I \hookrightarrow \text{Spec } A$ è una bigezione tra l'insieme degli ideali di A e l'insieme dei sottoschemi chiusi di $\text{Spec } A$ (svolta la dimostrazione della buona definizione e dell'iniettività; omessa la dimostrazione della suriettività).

Definizione di schema quasi-compatto, connesso, irriducibile. Uno schema è quasi-compatto se e solo se esiste un ricoprimento aperto affine finito. Definizione e caratterizzazione degli schemi ridotti. Definizione e caratterizzazione degli schemi integri.

Se X è uno schema, i sottoinsiemi chiusi e irriducibili di X sono in bigezione con i punti di X (senza dimostrazione). Definizione di punto generico di uno schema irriducibile.

Proprietà degli schemi integri (senza dimostrazione): gli omomorfismi di restrizione tra aperti non vuoti sono iniettivi, l'omomorfismo che manda l'anello delle sezioni su un aperto non vuoto nella spiga in un punto è iniettivo, il punto generico sta in ogni aperto non vuoto, definizione del campo delle funzioni razionali, se U è un aperto affine non vuoto allora il campo delle funzioni razionali è il campo delle frazioni di $\mathcal{O}_X(U)$. Campo delle funzioni razionali di $\mathbb{P}_k^n$.

(10) **20 Marzo 2025.** Breve discussione dell'Esercizio 1.1(5) e del perché i primi di $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ sono in bigezione con i primi nella fibra di $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ sopra $\mathfrak{p}$.

Definizione e alcune caratterizzazioni dei domini a valutazione discreta. Esempi di DVR. Esercizio 1.3(2): se R è un DVR con uniformizzante π , allora per ogni $n \geq 1$ il polinomio $\pi^n x - 1 \in R[x]$ genera un ideale massimale e $\text{Specm } R[x]$ è denso in $\text{Spec } R[x]$.

Breve discussione sull'Esercizio 1.4(4). Svolgimento dell'Esercizio 1.5.

(11) **2 Aprile 2025.** Definizione di schema localmente noetheriano. Se X è uno schema localmente noetheriano e $U \subseteq X$ è un aperto affine, allora $\mathcal{O}_X(U)$ è un anello noetheriano. $\text{Spec } A$ è uno schema localmente noetheriano se e solo se A è un anello noetheriano. Definizione di schema noetheriano. Una varietà algebrica su un campo è uno schema noetheriano.

Definizione e caratterizzazione degli spazi topologici noetheriani. $\text{Spec } A$ è uno spazio topologico noetheriano se e solo se vale a.c.c. sugli ideali radicali di A . Lo spazio topologico soggiacente di uno schema noetheriano è noetheriano. Esempio di uno schema non noetheriano il cui spazio topologico soggiacente è noetheriano.

Uno spazio topologico noetheriano ha un numero finito di componenti irriducibili. Definizione di punto generico in uno schema. Se X è uno schema noetheriano e ξ è un punto generico di X , allora $\mathcal{O}_{X,\xi}$ è un anello artiniano locale. Definizione di molteplicità di una componente irriducibile in uno schema noetheriano. Gli schemi $\text{Spec } k[x, y]/(x^5 y^2)$ e $\text{Spec } k[x, y]/((x^5 y^2) \cap (x, y)^8)$ sono due sottoschemi diversi di $\mathbb{A}_k^2$, ma hanno le stesse componenti irriducibili con le stesse molteplicità.

Dimensione di uno spazio topologico e codimensione di un sottoinsieme chiuso irriducibile. Proprietà della dimensione rispetto a ricoprimenti aperti e a ricoprimenti chiusi finiti. Dimensione di Krull di un anello e altezza di un ideale primo. La dimensione di Krull di A è la dimensione dello spazio topologico $\text{Spec } A$. $\dim A/I \leq \dim A$ e $\dim S^{-1}A \leq \dim A$. Se A è un anello noetheriano allora $\dim A[x] = 1 + \dim A$ (senza dimostrazione). Se k è un campo allora $\dim k[x_1, \dots, x_n] = n$. Hauptidealsatz (senza dimostrazione). Se $A \hookrightarrow B$ è un omomorfismo iniettivo e intero allora $\dim A = \dim B$ (senza dimostrazione).

Basi di trascendenza e grado di trascendenza di un'estensione di campi: definizione e proprietà (senza dimostrazione). Se $f \in k[x, y]$ è irriducibile e $\deg_x f > 0$, allora $\text{Frac}(k[x, y]/(f)) = k(y)[x]/(f)$ e ha y come base di trascendenza su k .

Se k è un campo e A è un dominio di tipo finito su k , allora A è catenario e $\dim A$ coincide col grado di trascendenza di $\text{Frac}(A)$ su k (senza dimostrazione).

Significato geometrico di una base di trascendenza: se X è uno schema integro di tipo finito sul campo k di dimensione n allora esiste $X \dashrightarrow \mathbb{A}_k^n \subseteq \mathbb{P}_k^n$ mappa razionale dominante. Significato geometrico della normalizzazione di Noether: se X è una varietà affine sul campo k di dimensione n , allora esiste un morfismo finito e suriettivo $X \rightarrow \mathbb{A}_k^n$; se k è infinito e $X \hookrightarrow \mathbb{A}_k^N$ allora si può scegliere lineare.

Definizione di varietà razionale e unirazionale. Cenni al problema di Lüroth.

(12) **3 Aprile 2025.** Se X è uno spazio topologico di Jacobson e X_0 è l'insieme dei punti chiusi di X , allora $\dim X = \dim X_0$.

Proprietà della dimensione e della dimensione di un anello noetheriano locale (senza dimostrazione). Definizione di anelli regolari. Un anello noetheriano locale di dimensione 0 è regolare se e solo se è un campo. Un anello noetheriano locale di dimensione 1 è regolare se e solo se è un DVR. Esempi.

Definizione di schema regolare e di spazio tangente a uno schema in un punto. Per una varietà affine lo spazio tangente è il nucleo della matrice jacobiana. Cenni sull'interpretazione geometrica della dimensione di

immersione in termini di immersione chiusa di un intorno analitico/formale.

Teorema di Auslander–Buchsbaum: un anello noetheriano locale regolare è un UFD (senza dimostrazione). Un punto regolare di uno schema localmente noetheriano sta in un'unica componente irriducibile. Teorema di Serre: la localizzazione di un anello locale regolare in un primo è regolare (senza dimostrazione). Una varietà algebrica su un campo è regolare se e solo se l'anello locale in ciascun punto chiuso è regolare.

Differenziale di un morfismo di schemi.

Definizione e caratterizzazione degli schemi normali. Un dominio locale di dimensione 1 è regolare se e solo se è un DVR se e solo se è normale. Per uno schema integro noetheriano: regolare $\Rightarrow$ localmente fattoriale $\Rightarrow$ normale $\Rightarrow$ regolare in codimensione 1. Per uno schema integro noetheriano di dimensione 1: regolare $\Leftrightarrow$ normale. $\text{Spec } k[x, y, z]/(xy - z^2)$ è normale ma non regolare. Valutazione discreta associata a un divisore primo su uno schema integro noetheriano regolare in codimensione 1.

Teoria degli Schemi — Foglio di esercizi 1
Assegnato: venerdì 28 Febbraio 2025
Consegna delle soluzioni: entro mercoledì 19 Marzo 2025

Esercizio 1.1. Sia $\varphi: A \rightarrow B$ un omomorfismo di anelli e sia $\tilde{\varphi}: \operatorname{Spec} B \rightarrow \operatorname{Spec} A$ l'applicazione indotta da φ .

- (1) Si dimostri che per ogni ideale $J \subseteq B$ vale $\tilde{\varphi}(V(J)) \subseteq V(\varphi^{-1}J)$ e che la chiusura di $\tilde{\varphi}(V(J))$ in $\operatorname{Spec} A$ è $V(\varphi^{-1}J)$.
- (2) Si dimostri che $\tilde{\varphi}$ è dominante (cioè ha immagine densa) se e solo se $\ker \varphi$ consiste di elementi nilpotenti.
- (3) Si dimostri che se φ è intero e iniettivo allora $\tilde{\varphi}$ è suriettivo.
- (4) Si dimostri che se φ è intero allora $\tilde{\varphi}$ è chiusa.
- (5) Se B è un A -modulo finito con un insieme di generatori di cardinalità n , allora si dimostri che la fibra di ciascun punto $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ rispetto a $\tilde{\varphi}$ ha cardinalità $\leq n$.

Esercizio 1.2. Per ciascuna delle seguenti situazioni si costruisca un esempio esplicito.

- (1) $\varphi: A \rightarrow B$ è un omomorfismo di anelli e la mappa indotta $\tilde{\varphi}: \operatorname{Spec} B \rightarrow \operatorname{Spec} A$ non è aperta né chiusa.
- (2) k è un campo algebricamente chiuso, A e B sono domini di tipo finito su k , $\varphi: A \rightarrow B$ è un omomorfismo di k -algebre e la mappa indotta $\tilde{\varphi}: \operatorname{Spec} B \rightarrow \operatorname{Spec} A$ non è aperta né chiusa.
- (3) $\varphi: A \rightarrow B$ è un omomorfismo non suriettivo e non iniettivo di anelli e la mappa indotta $\tilde{\varphi}: \operatorname{Spec} B \rightarrow \operatorname{Spec} A$ è un omeomorfismo.
- (4) k è un campo algebricamente chiuso, A e B sono domini di tipo finito su k , $\varphi: A \rightarrow B$ è un omomorfismo non suriettivo di k -algebre e la mappa indotta $\tilde{\varphi}: \operatorname{Spec} B \rightarrow \operatorname{Spec} A$ è un omeomorfismo.

Esercizio 1.3. Per ciascuna delle seguenti affermazioni si dica se è vera o se è falsa. Se è vera, si fornisca una dimostrazione. Se è falsa, si produca un controesempio esplicito.

- (1) Se A è un anello di Jacobson, allora $\operatorname{Specm} A$ è denso in $\operatorname{Spec} A$.
- (2) Se A è un anello noetheriano tale che $\operatorname{Specm} A$ è denso in $\operatorname{Spec} A$, allora A è un anello di Jacobson.
- (3) Se k è un campo, A è una k -algebra di tipo finito e U è un sottoinsieme aperto non vuoto di $\operatorname{Spec} A$, allora U contiene un punto p tale che $\{p\}$ è chiuso in $\operatorname{Spec} A$.
- (4) Se X è uno spazio topologico di Jacobson, $U \subseteq X$ è un sottoinsieme aperto e $p \in U$ è un punto tale che $\{p\}$ è chiuso in U , allora U è uno spazio topologico di Jacobson (se dotato della topologia indotta da X) e $\{p\}$ è chiuso in X .
- (5) Se k è un campo e A è una k -algebra di tipo finito con un numero finito di ideali massimali, allora A è una k -algebra finita.

Esercizio 1.4. Sia A un anello, sia $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} A$ un ideale massimale di A e sia M un A -modulo. Si dimostrino le seguenti affermazioni.

- (1) Se $\sqrt{\operatorname{ann}_A(M)} \supseteq \mathfrak{m}$, allora l'omomorfismo di localizzazione $\phi: M \rightarrow M_{\mathfrak{m}}$ è bigettivo.
- (2) Per tutti gli interi i, j tali che $0 \leq i \leq j$, $\mathfrak{m}^i A_{\mathfrak{m}} / \mathfrak{m}^j A_{\mathfrak{m}}$ è canonicamente isomorfo a $\mathfrak{m}^i / \mathfrak{m}^j$ come A -moduli.
- (3) Se $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ è tale che $\operatorname{ann}_A(M) \not\subseteq \mathfrak{p}$, allora $M_{\mathfrak{p}} = 0$.
- (4) Se $S \subseteq T$ sono due sottoinsiemi moltiplicativi di A tali che per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ vale

$$\mathfrak{p} \cap S = \emptyset, \mathfrak{p} \supseteq \operatorname{ann}_A(M) \implies \mathfrak{p} \cap T = \emptyset,$$

allora l'omomorfismo di localizzazione $\phi: S^{-1}M \rightarrow T^{-1}M$ è bigettivo.

- (5) Se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di A e $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \dots, \mathfrak{q}_r$ sono ideali di A tali che
 - (a) $0 = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_r$,
 - (b) $\mathfrak{q}_1$ è $\mathfrak{p}$ -primario (si veda la definizione nel capitolo 4 dell'Atiyah–Macdonald),
 - (c) per ogni $j = 2, \dots, r$, $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{q}_j$,
allora $\mathfrak{q}_1$ coincide con il nucleo dell'omomorfismo di localizzazione $A \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$ e $A_{\mathfrak{p}}$ è isomorfo a $(A/\mathfrak{q}_1)_{\mathfrak{p}}$ come A -algebra.
- (6) Se k è un campo e A è una k -algebra finita locale, allora A è un anello artiniano e vale l'uguaglianza

$$\ell(A) \cdot \dim_k A/\mathfrak{m} = \dim_k A$$

dove $\ell(A)$ è la lunghezza di A e $\dim_k$ denota la dimensione come k -spazio vettoriale.

Può essere utile il seguente risultato che potete dare per buono.

Proposizione. Sia k un campo e sia $A = k[x_1, \dots, x_n]$ l'anello dei polinomi in n variabili.

- Se $m_1, \dots, m_t, u, v$ sono monomi in A tali che $\gcd(u, v) = 1$, allora vale la seguente uguaglianza tra ideali di A :

$$(m_1, \dots, m_t, uv) = (m_1, \dots, m_t, u) \cap (m_1, \dots, m_t, v).$$

- Se $m_1, \dots, m_t$ sono monomi in A , allora vale la seguente uguaglianza tra ideali di A :

$$\sqrt{(m_1, \dots, m_t)} = (\sqrt{m_1}, \dots, \sqrt{m_t}),$$

dove se $m = x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_r}^{a_r}$ con $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$ e $a_1, \dots, a_r \geq 1$ allora $\sqrt{m} := x_{i_1} \cdots x_{i_r}$. In altre parole, $\sqrt{m}$ è il prodotto delle variabili che compaiono in m .

- Sia $I \subseteq S$ un ideale monomiale e sia $\mathcal{B}$ l'insieme minimale di generatori monomiali di I . Allora:
 - I è un ideale massimale se e solo se $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$;
 - I è un ideale primo se e solo se $\mathcal{B} \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$;
 - I è un ideale irriducibile se e solo esistono indici $1 \leq i_1 < \cdots < i_t \leq n$ e interi $a_1, \dots, a_t \geq 1$ tali che $\mathcal{B} = \{x_{i_1}^{a_1}, \dots, x_{i_t}^{a_t}\}$;
 - I è un ideale primario se e solo esistono indici $1 \leq i_1 < \cdots < i_t \leq n$, interi $a_1, \dots, a_t \geq 1$ e monomi $m_1, \dots, m_s$ tali che $\mathcal{B} = \{x_{i_1}^{a_1}, \dots, x_{i_t}^{a_t}, m_1, \dots, m_s\}$ e gli m_j coinvolgono solo le variabili $x_{i_1}, \dots, x_{i_t}$.

Per esempio, (x^2, xy, y^2) è primario e non irriducibile (infatti $(x^2, xy, y^2) = (x, y^2) \cap (x^2, y)$); (x, y^2) è irriducibile ma non primo.

Esercizio 1.5. Si considerino i seguenti ideali di $\mathbb{C}[x, y, z]$

$$I_1 = (x^2 - z - 1, y - 1)$$

$$I_2 = (x^3, (y - 1)^7, (z - 1)^3)$$

$$I_3 = (x^3 z, y^2 z^2, xyz)$$

$$I = I_1 \cap I_2 \cap I_3$$

e si consideri l'anello $A = \mathbb{C}[x, y, z]/I$.

- (1) Si determini una decomposizione primaria di I_3 , più precisamente si trovino tre ideali monomiali primari I_4, I_5, I_6 di $\mathbb{C}[x, y, z]$ tali che $I_3 = I_4 \cap I_5 \cap I_6$, $\sqrt{I_4} = (z)$, $\sqrt{I_5} = (x, y)$ e $\sqrt{I_6} = (x, z)$.
- (2) Fingendo che i numeri complessi siano visualizzabili come numeri reali, si faccia un disegno del chiuso affine classico $Z(I) \subseteq \mathbb{C}^3$. Inoltre si determinino le componenti irriducibili di $Z(I)$ e le loro dimensioni.
- (3) Si classifichino gli ideali primi di A . [Per aiutarmi nella correzione, vi chiedo di usare le seguenti notazioni per alcuni ideali di A : $\mathfrak{q}_j := I_j/I$ e $\mathfrak{p}_j := \sqrt{\mathfrak{q}_j}$, per ogni $j = 1, \dots, 6$.]
- (4) Si determini la dimensione di Krull di A .
- (5) Utilizzando gli esercizi precedenti, si provi che $A_{\mathfrak{p}_5}$ è isomorfo a $\mathbb{C}(z)[x, y]/(x^3, xy, y^2)$.
- (6) Per ciascun primo $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$,
 - si determini la dimensione di Krull di $A_{\mathfrak{p}}$,
 - si determini la dimensione di Krull di $A/\mathfrak{p}$,
 - si dia una descrizione più esplicita possibile del campo residuo $\kappa(\mathfrak{p})$; in particolare, si dica se è un'estensione algebrica, finita, trascendente o puramente trascendente di un campo 'noto' (cioè $\mathbb{C}$ o estensioni puramente trascendenti di $\mathbb{C}$),
 - si determini il grado di trascendenza di $\kappa(\mathfrak{p})$ su $\mathbb{C}$,
 - qualora $A_{\mathfrak{p}}$ sia un anello artiniano, si determini la lunghezza $\ell(A_{\mathfrak{p}})$ di $A_{\mathfrak{p}}$ come $A_{\mathfrak{p}}$ -modulo.

Teoria degli Schemi — Foglio di esercizi 2
Assegnato: mercoledì 19 Marzo 2025
Consegna delle soluzioni: mercoledì 16 Aprile 2025

Esercizio 2.1. Sia X uno spazio topologico, sia $\text{Sh}(X)$ la categoria dei fasci di gruppi abeliani su X e sia $\varphi: F \rightarrow G$ una freccia in $\text{Sh}(X)$, cioè F e G sono fasci di gruppi abeliani su X e $\varphi: F \rightarrow G$ è un omomorfismo di fasci. Si provi che le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (1) per ogni punto $x \in X$, $\varphi_x: F_x \rightarrow G_x$ è suriettivo,
- (2) per ogni aperto $U \subseteq X$ e per ogni sezione $g \in G(U)$, esistono un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i \in I}$ di U e delle sezioni $f_i \in F(U_i)$ per ciascun $i \in I$, tali che $\varphi_{U_i}(f_i) = g|_{U_i}$ per ogni $i \in I$,
- (3) φ è un epimorfismo in $\text{Sh}(X)$, cioè: per ogni fascio $H \in \text{Sh}(X)$ e per ogni coppia di omomorfismi di fasci $\psi: G \rightarrow H$ e $\psi': G \rightarrow H$ tali che $\psi \circ \varphi = \psi' \circ \varphi$, si ha $\psi = \psi'$,
- (4) per ogni fascio $H \in \text{Sh}(X)$ e per ogni omomorfismo di fasci $\psi: G \rightarrow H$ tale che $\psi \circ \varphi = 0$, si ha $\psi = 0$.

Esercizio 2.2.

- (1) Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio localmente anellato, sia $U \subseteq X$ un sottoinsieme aperto. Se $\mathcal{O}_X(U) = 0$ allora si provi che $U = \emptyset$.
- (2) Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio localmente anellato, sia $U \subseteq X$ un sottoinsieme aperto e sia $f \in \mathcal{O}_X(U)$ una sezione. Si consideri $Z = \{x \in U \mid f(x) = 0 \text{ in } \kappa(x)\}$. Si provi che Z è chiuso in U .

Definizione. Se F è un fascio di gruppo abeliani su uno spazio topologico X , allora definiamo il *supporto* di F come $\text{Supp } F := \{x \in X \mid F_x \neq 0\}$.

Esercizio 2.3. Sia A un anello, sia $X = \text{Spec } A$, sia M un A -modulo e sia $\widetilde{M}$ il fascio su X indotto da M .

- (1) Si provi il contenimento $\text{Supp } \widetilde{M} \subseteq V(\text{ann}_A(M))$.
- (2) Si provi che se M è un A -modulo finito allora $\text{Supp } \widetilde{M} = V(\text{ann}_A(M))$.
- (3) Si fornisca un esempio in cui $\text{Supp } \widetilde{M} \subsetneq V(\text{ann}_A(M))$.
- (4) Se $I \subseteq A$ è un ideale e M è un A/I -modulo, allora M è in modo naturale un A -modulo e il fascio $\widetilde{M}$ da lui indotto su $X = \text{Spec } A$ è tale che $\text{Supp } \widetilde{M} \subseteq V(I)$.
- (5) Se A è un dominio e K è il suo campo delle frazioni, allora si provi che il fascio $\widetilde{K}$ (indotto dall' A -modulo K) è il fascio costante di gruppo K ed è un fascio grattacielo (rispetto a quale punto?). Qual è il suo supporto?
- (6) Se $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ è un ideale primo con campo residuo $\kappa(\mathfrak{p})$, allora si provi che il fascio $F := \widetilde{\kappa(\mathfrak{p})}$ (indotto dall' A -modulo $\kappa(\mathfrak{p})$) è un fascio grattacielo rispetto a un punto.

Esercizio 2.4. (Qui costruiamo l'incollamento di fasci per un ricoprimento aperto fatto da due elementi – per la trattazione del caso generale si rimanda all'Esercizio 2.2.8 del libro di Liu.) Sia X uno spazio topologico e siano U_0 e U_1 due aperti di X tali che $X = U_0 \cup U_1$. Per brevità si ponga $U_{01} = U_0 \cap U_1$. Si consideri il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} U_{01} & \xrightarrow{i_0} & U_0 \\ \downarrow i_1 & & \downarrow j_0 \\ U_1 & \xrightarrow{j_1} & X \end{array}$$

dato dalle inclusioni. Sia k un anello, sia F_0 un fascio di k -moduli su U_0 e sia F_1 un fascio di k -moduli su U_1 . Supponiamo di avere un isomorfismo di fasci di k -moduli

$$\phi: F_0|_{U_{01}} \rightarrow F_1|_{U_{01}}.$$

- (a) Si provi che esistono un fascio di k -moduli F su X e degli isomorfismi di fasci di k -moduli $\psi_0: F|_{U_0} \rightarrow F_0$ e $\psi_1: F|_{U_1} \rightarrow F_1$ tali che $\phi \circ \psi_0|_{U_{01}} = \psi_1|_{U_{01}}$.
- (b) Si provi che la terna (F, ψ_0, ψ_1) è unica a meno di isomorfismo; più precisamente vale la seguente implicazione: se F' è un fascio di k -moduli su X e $\psi'_0: F'|_{U_0} \rightarrow F_0$ e $\psi'_1: F'|_{U_1} \rightarrow F_1$ sono isomorfismi di fasci di k -moduli tali che $\phi \circ \psi'_0|_{U_{01}} = \psi'_1|_{U_{01}}$ allora esiste un isomorfismo $\alpha: F \rightarrow F'$ di fasci di k -moduli tale che $\psi_0 = \psi'_0 \circ \alpha|_{U_0}$ e $\psi_1 = \psi'_1 \circ \alpha|_{U_1}$.

Il fascio F si dice *incollamento* dei fasci F_0 e F_1 tramite ϕ . (Attenzione: il fascio F dipende dalla scelta di ϕ !)

Esercizio 2.5. Sia k un campo algebricamente chiuso. Lavoriamo adesso nel contesto geometria algebrica ‘classica’, cioè nella categoria delle varietà quasi-proiettive ‘classiche’ su k . Per ogni varietà quasi-proiettiva ‘classica’ X , sia $\mathcal{O}_X$ il fascio delle funzioni regolari su X .

Inoltre, in questo esercizio quando si scrive fascio (o sottofascio) si intende fascio (o sottofascio) di k -spazi vettoriali.

Si consideri $\mathbb{P}^1$ la retta proiettiva ‘classica’ sul campo k con coordinate omogenee x_0, x_1 , dotata della topologia di Zariski. Siano $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ e $U_1 = \{x_1 \neq 0\}$ le due carte affini standard di $\mathbb{P}^1$. Sia $x = \frac{x_1}{x_0}$ (risp. $y = \frac{x_0}{x_1}$) la coordinata affine standard di U_0 (risp. U_1). Si ponga $U_{01} = U_0 \cap U_1$.

- (1) Si determini esplicitamente $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$ e se ne determini la dimensione come k -spazio vettoriale.
- (2) Si fissi $d \in \mathbb{Z}$. Si consideri l’isomorfismo di fasci

$$\phi: \mathcal{O}_{U_0}|_{U_{01}} = \mathcal{O}_{U_{01}} \longrightarrow \mathcal{O}_{U_1}|_{U_{01}} = \mathcal{O}_{U_{01}}$$

definito dalla moltiplicazione per x^{-d} ; più precisamente per ogni aperto $U \subseteq U_{01}$ l’omomorfismo k -lineare $\phi_U: \mathcal{O}_{U_0}(U) \rightarrow \mathcal{O}_{U_1}(U)$ è dato dalla moltiplicazione per $(x|_U)^{-d}$. Sia F il fascio su $\mathbb{P}^1$ ottenuto incollando $\mathcal{O}_{U_0}$ e $\mathcal{O}_{U_1}$ tramite ϕ . Si determini la dimensione di $\Gamma(\mathbb{P}^1, F)$ come k -spazio vettoriale.

- (3) Si fissi $e \in \mathbb{N}$. Sia G_0 il sottofascio di $\mathcal{O}_{U_0}$ così definito: per ogni aperto $U \subseteq U_0$, $G_0(U)$ è l’ideale dell’anello $\mathcal{O}_{U_0}(U)$ generato da $(x|_U)^e$. Sia G_1 il fascio su U_1 coincidente con $\mathcal{O}_{U_1}$; in questo modo G_1 è un sottofascio di $\mathcal{O}_{U_1}$.
 - (a) Si provi che G_0 e G_1 possono essere incollati a un fascio G su $\mathbb{P}^1$ in modo tale che esista un omomorfismo iniettivo di fasci $\lambda: G \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ tale che le restrizioni $\lambda|_{U_0}$ e $\lambda|_{U_1}$ siano i precedenti omomorfismi iniettivi di fasci $G_0 \hookrightarrow \mathcal{O}_{U_0}$ e $G_1 = \mathcal{O}_{U_1}$.
 - (b) Si determini $d \in \mathbb{Z}$ tale che G sia isomorfo al fascio F costruito in (2).
 - (c) Si descriva esplicitamente il fascio Q dato dal conucleo (nella categoria dei fasci) dell’omomorfismo iniettivo $\lambda: G \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$. Q è un fascio grattacielo? Se sí, rispetto a quale punto di $\mathbb{P}^1$?
 - (d) Si calcoli la dimensione di $\Gamma(\mathbb{P}^1, Q)$ come k -spazio vettoriale.
 - (e) Si dica per quali $e \in \mathbb{N}$ la successione esatta corta di fasci

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\lambda} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

induce una successione esatta corta sulle sezioni globali

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}^1, G) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}^1, Q) \longrightarrow 0.$$

Esercizio 2.6.

- (1) Sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione continua tra spazi topologici. Sia F un fascio di gruppi abeliani. Sia $x \in X$ e sia $\nu_x: (f_*F)_{f(x)} \rightarrow F_x$ l’omomorfismo “naturale” definito a lezione.
 - (a) Si provi che se f è un’immersione topologica allora ν_x è un isomorfismo.
 - (b) Si dia un esempio in cui ν_x è iniettivo e non suriettivo.
 - (c) Si dia un esempio in cui ν_x è suriettivo e non iniettivo.
- (2) Si dia un esempio in cui $(f, f^\#): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ è un morfismo di schemi e $x \in X$ è un punto tale che $(f_*F)_{f(x)}$ non è un anello locale.
- (3) Sia $(f, f^\#): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morfismo di spazi localmente anellati tale che $f: X \rightarrow Y$ sia un’immersione topologica aperta. Allora si provi che le seguenti condizioni sono equivalenti:
 - (a) $f^\#|_{f(X)}: \mathcal{O}_Y|_{f(X)} \rightarrow (f_*\mathcal{O}_X)|_{f(X)}$ è un isomorfismo di fasci su $f(X)$,
 - (b) per ogni aperto $W \subseteq f(X)$, $f_W^\#: \mathcal{O}_Y(W) \rightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}W)$ è un isomorfismo,
 - (c) per ogni aperto $U \subseteq X$, $f_{f(U)}^\#: \mathcal{O}_Y(f(U)) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ è un isomorfismo,
 - (d) l’omomorfismo $f^\flat: f^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$, definito da $f_U^\flat = f_{f(U)}^\#: (f^{-1}\mathcal{O}_Y)(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ per ogni aperto $U \subseteq X$, è un isomorfismo di fasci su X ,
 - (e) per ogni punto $x \in X$, $f_x^\#: \mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ è un isomorfismo,
 - (f) per ogni punto $x \in X$, $f_{f(x)}^\#: \mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow (f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)}$ è un isomorfismo.

Se (ogni)una delle condizioni sopra è soddisfatta allora si dice che $(f, f^\#)$ è un’immersione aperta.

- (4) Si dia un esempio in cui $(f, f^\#): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ è un’immersione aperta di schemi e $f^\#: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ non è un isomorfismo di fasci su Y .
- (5) Sia $(f, f^\#): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morfismo di spazi localmente anellati tale che $f: X \rightarrow Y$ sia un’immersione topologica chiusa. Allora si provi che le seguenti condizioni sono equivalenti:
 - (a) $f^\#: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ è un epimorfismo di fasci su Y ,
 - (b) per ogni punto $y \in Y$, $f_y^\#: \mathcal{O}_{Y, y} \rightarrow (f_*\mathcal{O}_X)_y$ è suriettivo,
 - (c) per ogni punto $x \in X$, $f_{f(x)}^\#: \mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow (f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)}$ è suriettivo,
 - (d) per ogni punto $x \in X$, $f_x^\#: \mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ è suriettivo.

Se (ogni) una delle condizioni sopra è soddisfatta allora si dice che $(f, f^\#)$ è un'immersione chiusa.

- (6) Si dia un esempio in cui $(f, f^\#): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ è un'immersione chiusa di schemi e $V \subseteq Y$ è un aperto tale che $f_V^\#: \mathcal{O}_Y(V) \rightarrow (f_*\mathcal{O}_X)(V)$ non è suriettivo.
- (7) Si dia un esempio in cui $(f, f^\#): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ è un morfismo di schemi tale che f è un omeomorfismo, $(f, f^\#)$ non è un'immersione aperta di schemi, $(f, f^\#)$ non è un'immersione chiusa di schemi.

Esercizio 2.7.

- (1) Sia X uno schema affine tale che $\mathcal{O}_X(X)$ è un anello ridotto, sia Y uno schema affine, siano $f: X \rightarrow Y$ e $g: X \rightarrow Y$ due morfismi di schemi, sia $U \subseteq X$ un aperto denso. Supponendo che valga l'uguaglianza $f|_U = g|_U$ come morfismi di schemi $U \rightarrow Y$, si dimostri che $f = g$ come morfismi di schemi $X \rightarrow Y$.
- (2) Si provi, esibendo un controesempio, che la conclusione nel punto (1) è falsa se $\mathcal{O}_X(X)$ non è ridotto.
- (3) Si provi, esibendo un controesempio, che la conclusione nel punto (1) è falsa se Y non è affine.
- (4) Si costruisca esplicitamente un esempio che soddisfa le seguenti proprietà: $f: X \rightarrow Y$ e $g: X \rightarrow Y$ sono morfismi di schemi, f e g sono diversi, le funzioni continue soggiacenti a f e g sono uguali.