

TEORIA DEGLI SCHEMI

Università di Bologna, Dipartimento di Matematica
Anno accademico 2025/26, Secondo Semestre

Andrea Petracci
a [dot] petracci (nospam) [at] unibo [dot] it
<https://www.dm.unibo.it/~andrea.petracci3/2026Schemi/>

Aggiornato il 27 febbraio 2026

PREREQUISITI

Oltre ai corsi obbligatori di algebra e geometria della laurea triennale, si richiede che chi voglia seguire questo corso conosca bene alcuni argomenti di base di geometria algebrica; più precisamente:

- geometria proiettiva (come trattata nel corso *54777 - Geometria proiettiva*): spazio proiettivo, carte affini, coordinate omogenee, proiettività, (dis)omogeneizzazione di polinomi, ipersuperfici algebriche affini e proiettive, quadriche e coniche, studio delle singolarità delle curve algebriche piane, una qualche definizione di molteplicità di intersezione tra due curve, enunciato del teorema di Bezout. Referenze: [Ser00, capitoli 3,4], [FFP16].
- geometria algebrica “classica” (come trattata nei corsi *B9037 - Varietà algebriche*, *96733 - Curve e superfici algebriche*): topologia di Zariski su k^n e su $\mathbb{P}^n(k)$ per un campo algebricamente chiuso k , Nullstellensatz, corrispondenza tra ideali massimali/primi/radicali e punti/chiusi irriducibili/chiusi, varietà affini e (quasi-)proiettive, funzioni regolari, morfismi, equivalenza tra la categoria delle varietà affini e la categoria delle k -algebre ridotte di tipo finito, prodotti, immersioni di Segre e di Veronese, funzioni e mappe razionali, equivalenza tra la categoria i cui oggetti sono le varietà irriducibili e le cui frecce sono le mappe razionali dominanti e la categoria delle estensioni finitamente generate di campi di k , dimensione, spazio tangente e liscenza. Referenze: [Har77, sezioni I.1-5], [SKKT00, capitoli 1-7], [Rei88], [Sha13, sezioni 1.1-6, 2.1].

I seguenti argomenti di algebra commutativa sono dei prerequisiti necessari alla comprensione di questo corso:

- algebra commutativa: anelli, ideali, moduli, anelli e moduli di frazioni, prodotti tensoriali di moduli, piatezza, anelli noetheriani e artiniani, estensioni finite e intere, Nullstellensatz, cenni di teoria della dimensione. Referenze: [AM69, capitoli 1-3, 5-8 e cenni del capitolo 11], [Mat89, capitoli 1-5, 7, 13], [Eis95, capitoli 1,2,4,8,13], [Rei95].

Questi argomenti sono trattati nel corso di Algebra Commutativa. Se si è seguito il corso di Algebra Commutativa gli anni scorsi, non c'è alcun problema. Se si vuole seguire Teoria degli Schemi nel secondo semestre dell'AA2025/26 e non si è mai seguito il corso di Algebra Commutativa, allora è assolutamente necessario seguire il corso di Algebra Commutativa contemporaneamente a Teoria degli Schemi, cioè durante il secondo semestre dell'AA2025/26. Infatti, le presentazioni degli argomenti di algebra commutativa e di teoria degli schemi sono coordinate, in modo che i prerequisiti di algebra commutativa per il corso di schemi saranno forniti dal docente di algebra commutativa prima che vengano utilizzati nel corso di schemi.

Infine è richiesta la conoscenza di alcune nozioni di base di teoria delle categorie: categorie, funtori, trasformazioni naturali, funtori pieni/fedeli/pienamente fedeli, equivalenze di categorie, prodotti e coprodotti, oggetti terminali e iniziali. Per questi argomenti suggerisco i primi capitoli di [KS06] e [Mac71].

PROGRAMMA PRELIMINARE

Il corso è un'introduzione alla teoria degli schemi, sviluppata da Alexander Grothendieck. Gli argomenti trattati includeranno: fasci, schemi, proprietà globali e locali degli schemi, fasci coerenti, divisori, differenziali.

Ci baseremo sostanzialmente sul capitolo II di [Har77] e sui capitoli 2-7 di [Liu02]. Altre possibili referenze possono essere i libri [EH00, GW20, Mum99].

La referencia rigorosa e fondazionale della teoria degli schemi, scritta dallo stesso Grothendieck (con l'aiuto di Jean Dieudonné), è la serie di volumi *Éléments de géométrie algébrique*, comunemente nota con la sigla EGA. Questi volumi delle Publications Mathématiques de l'IHÉS possono essere scaricati liberamente al <http://www.>

numdam.org/search/elements%20geometrie%20algebrique-%22Grothendieck,%20Alexander%22-qn/. Un'altra referenza rigorosa e onnicomprensiva della teoria degli schemi (e di tante altre cose) è il blog collaborativo <https://stacks.math.columbia.edu> mantenuto da Aise Johan de Jong. Sconsiglio a chi si approccia per la prima volta alla teoria degli schemi di studiare EGA e Stacks Project, perché queste due opere enciclopediche non forniscono intuito geometrico né esempi. D'altra parte queste due opere sono molto utili a chi ha già esperienza e fa ricerca.

PERCHÉ LA TEORIA DEGLI SCHEMI?

La teoria degli schemi, sviluppata da Alexander Grothendieck negli anni '60 del secolo scorso, è il linguaggio moderno e rigoroso con cui si studia/fa/scrive la geometria algebrica oggi. Esso unifica la geometria algebrica classica (ovvero lo studio dei luoghi di zeri di equazioni polinomiali a coefficienti in un campo algebricamente chiuso) e la teoria algebrica dei numeri (ovvero lo studio del comportamento degli ideali primi rispetto alle estensioni finite di campi del campo dei numeri razionali), permettendo di dare intuizione geometrica all'algebra commutativa.

Vale la seguente analogia: il calcolo differenziale (cioè lo studio delle funzioni differenziabili tra aperti di $\mathbb{R}^n$ svolto ad Analisi 2) sta alla geometria differenziale (cioè lo studio delle varietà differenziabili), come l'algebra commutativa (cioè lo studio degli anelli commutativi) sta alla teoria degli schemi. Infatti, in modo molto vago, si può dire che uno schema è un "oggetto geometrico" che localmente si comporta come un anello.

Alcuni vantaggi della teoria degli schemi sono: poter considerare funzioni nilpotenti per poter parlare rigorosamente di "molteplicità", poter considerare la stessa varietà su campi diversi, poter considerare oggetti "aritmetici" (ovvero definiti su $\mathbb{Z}$ o sull'anello degli interi di un campo di numeri) utili per applicare tecniche geometriche a problemi di equazioni diofantee.

Oltre alle introduzioni che potete leggere nei libri menzionati sopra, potete dare uno sguardo a questo articolo scritto da David Mumford <https://www.dam.brown.edu/people/mumford/blog/2014/Grothendieck.html>.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.
- [EH00] David Eisenbud and Joe Harris. *The geometry of schemes*, volume 197 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.
- [FFP16] Elisabetta Fortuna, Roberto Frigerio, and Rita Pardini. *Projective geometry*, volume 104 of *Unitext*. Springer, 2016. Solved problems and theory review.
- [GW20] Ulrich Görtz and Torsten Wedhorn. *Algebraic geometry I. Schemes—with examples and exercises*. Springer Studium Mathematik—Master. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2020.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
- [KS06] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira. *Categories and sheaves*, volume 332 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [Liu02] Qing Liu. *Algebraic geometry and arithmetic curves*, volume 6 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2002. Translated from the French by Reinie Ern , Oxford Science Publications.
- [Mac71] Saunders MacLane. *Categories for the working mathematician*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971.
- [Mat89] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1989. Translated from the Japanese by M. Reid.
- [Mum99] David Mumford. *The red book of varieties and schemes*, volume 1358 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, expanded edition, 1999. Includes the Michigan lectures (1974) on curves and their Jacobians, With contributions by Enrico Arbarello.
- [Rei88] Miles Reid. *Undergraduate algebraic geometry*, volume 12 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [Rei95] Miles Reid. *Undergraduate commutative algebra*, volume 29 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [Ser00] Edoardo Sernesi. *Geometria 1*. Bollati Boringhieri, 2000.
- [Sha13] Igor R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry. 1*. Springer, Heidelberg, third edition, 2013. Varieties in projective space.
- [SKKT00] Karen E. Smith, Lauri Kahanp  , Pekka Kek  lainen, and William Traves. *An invitation to algebraic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2000.

LEZIONI

(1) **17 Febbraio 2026.** Introduzione al corso e questioni organizzative.

Motivazione alla teoria degli schemi: 1) lavorare con varietà astratte non immerse, 2) lavorare con campi non algebricamente chiusi (come $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{F}_p$ per scopi aritmetici) o su anelli arbitrari, 3) intuizione geometrica di intersezione di curve piane e punti di intersezione con molteplicit  e necessit  di avere oggetti geometrici diversi

corrispondenti a ideali diversi ma con lo stesso radicale, 4) spazi di moduli (M_g , moduli di fibrati vettoriali, grassmanniane, sistemi lineari di curve piane).

Convenzioni di algebra commutativa. Definizione di campo di numeri e di anello di numeri. Notazioni: $\mathbb{Z}[\frac{1}{f}]$, $\mathbb{Z}_{(p)} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}[[x]]/(x-p)$ (numeri p -adici), $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Definizione di algebra su un anello e di omomorfismo di algebre su un anello. Categoria delle algebre su un anello. Definizione di oggetto terminale e di oggetto iniziale in una categoria. $\mathbb{Z}$ è l'oggetto iniziale della categoria degli anelli, 0 è l'oggetto terminale della categoria degli anelli. La categoria delle $\mathbb{Z}$ -algebre è equivalente alla categoria degli anelli.

Definizioni di prefascio, di prefascio separato e di fascio su uno spazio topologico. Esempi: prefascio costante, fascio costante, funzioni continue a valori in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, funzioni continue mai nulle a valori in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, funzioni continue in un gruppo topologico, funzioni continue e limitate a valori in $\mathbb{R}$.

Se P è un prefascio separato allora $P(\emptyset) = 0$.

(2) **19 Febbraio 2026.** Definizione di complesso e di successione esatta di gruppi abeliani.

Se P è un prefascio sullo spazio topologico X e $U, V \subseteq X$ sono due aperti di X tali che $X = U \cup V$, costruzione del complesso $0 \rightarrow P(X) \rightarrow P(U) \times P(V) \rightarrow P(U \cap V)$. Se P è un prefascio separato, allora c'è esattezza in $P(X)$. Se P è un fascio, allora è esatto.

Se F è un fascio sullo spazio topologico X e $U, V \subseteq X$ sono due aperti tali che $X = U \cup V$ e $U \cap V = \emptyset$, allora $F(X)$ è isomorfo a $F(U) \times F(V)$.

Parte di gradi 0 e 1 del complesso di Čech di un prefascio rispetto a un ricoprimento aperto di uno spazio topologico.

Definizione di omomorfismi di prefasci e di fasci. Categoria dei prefasci e dei fasci. La categoria dei fasci è una sottocategoria piena della categoria dei prefasci.

Definizione di monomorfismo e di epimorfismo in una categoria. In una categoria, un isomorfismo è un monomorfismo e un epimorfismo.

Caratterizzazione dei monomorfismi, degli epimorfismi e degli isomorfismi nella categoria dei prefasci e dei fasci di gruppi abeliani su uno spazio topologico (senza dimostrazione).

Definizione di nucleo e immagine di un omomorfismo di fasci; lasciato per esercizio mostrare che siano fasci. Successioni esatte nella categoria dei fasci.

Se X è uno spazio topologico con una base di aperti semplicemente connessi (per esempio una varietà topologica), allora l'esponenziale $\exp: \mathcal{C}_{X,\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{C}_{X,\mathbb{C}}^*$ è un epimorfismo di fasci con nucleo isomorfo al fascio costante $\mathbb{Z}_X$; in generale non è suriettivo su ogni aperto (problema dell'esistenza del logaritmo complesso). Costruzione dell'omomorfismo $\mathcal{C}_{X,\mathbb{C}}^*(X) \rightarrow H^1(X, \mathbb{Z})$ tramite il numero di avvolgimento che prolunga la sequenza esatta delle sezioni globali.

Lasciato per esercizio di considerare l'esponenziale reale e la potenza n -esima complessa. Successione esponenziale per funzioni olomorfe su una complex manifold.

Fascio delle funzioni regolari su una varietà quasi-proiettiva "classica" su un campo algebricamente chiuso. Su un chiuso affine "classico" le funzioni regolari coincidono con le funzioni polinomiali (senza dimostrazione). Se X è un chiuso affine "classico", $\varphi \in k[X]$ e $U = X \setminus Z_X(\varphi)$, allora $\mathcal{O}_X(U)$ è isomorfo alla localizzazione $k[X]_{\varphi}$ (senza dimostrazione).

Se $f \in A$, allora $A_f := \{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}^{-1}A$ è isomorfo ad $A[x]/(fx-1)$ come A -algebra (senza dimostrazione).

(3) **26 Febbraio 2026.** Spighe e germi di un prefascio in un punto. La spiga è un gruppo abeliano (senza dimostrazione). Un omomorfismo di prefasci induce un omomorfismo sulle spighe.

Fascificazione di un prefascio: definizione e proprietà. La fascificazione dà un funtore aggiunto all'inclusione della categoria dei fasci nella categoria dei prefasci.

Fascio delle funzioni olomorfe in una variabile e confronto con $\mathbb{C}[[T]]$ tramite lo sviluppo di Taylor; definizione di $\mathbb{C}\{T\}$; proprietà degli omomorfismi di restrizione.

Germi delle funzioni C^∞ reali in una variabile e confronto con $\mathbb{R}[[T]]$ tramite lo sviluppo di Taylor. Enunciato del teorema di Borel.

Se X è un chiuso affine classico sul campo algebricamente chiuso k e $x \in X$ è un punto, allora la spiga del fascio delle funzioni regolari nel punto x è la localizzazione di $k[X]$ nell'ideale massimale $I_X(x)$ (senza dimostrazione).

Confronto tra polinomi $\mathbb{C}[t]$, germi di funzioni regolari nell'origine $\mathbb{C}[t]_{(t)}$, funzioni razionali $\mathbb{C}(t)$, serie convergenti $\mathbb{C}\{t\}$, serie formali $\mathbb{C}[[t]]$.

Definizione di fascio push-forward e di fascio preimmagine rispetto a funzioni continue. Restrizione di un fascio a un aperto. Per l'immersione di un punto in uno spazio topologico, il fascio push-forward è il fascio grattacielo e il fascio preimmagine è la spiga.

Aggiunzione tra preimmagine f^{-1} e push-forward f_* (senza dimostrazione).

(4) **27 Febbraio 2026.** Per una funzione continua $f: X \rightarrow Y$, costruzione di $f^\#: \mathcal{C}_{Y,\mathbb{C}} \rightarrow f_*\mathcal{C}_{X,\mathbb{C}}$ omomorfismo

di fasci di $\mathbb{C}$ -algebre.

Se $f: X \rightarrow Y$ è una funzione continua, F è un fascio su X e $x \in X$ è un punto, costruzione dell'omomorfismo di gruppi abeliani $\nu_x: (f_*F)_{f(x)} \rightarrow F_x$. Se f è un'immersione topologica, allora ν_x è un isomorfismo (lasciato per esercizio).

Se R è un anello, definizione di spazio R -anellato e di spazio localmente R -anellato. Esempi: funzioni continue a valori in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ su uno spazio topologico, funzioni C^∞ a valori in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ su una C^∞ manifold, funzioni olomorfe su una complex manifold, funzioni regolari su una varietà quasi-proiettiva 'classica' su un campo algebricamente chiuso.

Un omomorfismo φ da un anello locale $(A, \mathfrak{m})$ a un anello locale $(B, \mathfrak{n})$ è locale se vale una delle seguenti condizioni equivalenti: $\varphi(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$, $\varphi^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$, $\varphi^{-1}(\mathfrak{n}) \supseteq \mathfrak{m}$, $\varphi^{-1}(B^*) = A^*$, $\varphi^{-1}(B^*) \subseteq A^*$. Esempi di omomorfismi locali: estensioni di campi, $k[x]/(x^m) \twoheadrightarrow k[x]/(x^n)$ e $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ se $1 \leq n \leq m$. Esempio di omomorfismo non locale tra anelli locali: $\mathbb{Z}_{(2)} \hookrightarrow \mathbb{Q}$. Un omomorfismo locale induce un'estensione tra i campi residui.

Se R è un anello, definizione di morfismo di spazi R -anellati e di morfismo di spazi localmente R -anellati. $f_x^\# := \nu_x \circ f_{f(x)}^\#$. Composizione di morfismi di spazi anellati. La categoria degli spazi localmente R -anellati è una sottocategoria non piena della categoria degli spazi R -anellati.

Considerare su uno spazio topologico X il fascio $\mathcal{C}_{X, \mathbb{C}}$ delle funzioni continue a valori in $\mathbb{C}$ dà un funtore dalla categoria degli spazi topologici alla categoria degli spazi localmente $\mathbb{C}$ -anellati. Questo funtore è una sezione del funtore dimenticante dalla categoria degli spazi localmente $\mathbb{C}$ -anellati alla categoria degli spazi topologici.

Considerare su una C^∞ manifold X il fascio $\mathcal{C}_{X, \mathbb{R}}^\infty$ delle funzioni C^∞ a valori in $\mathbb{R}$ dà un funtore dalla categoria delle C^∞ manifold alla categoria degli spazi localmente $\mathbb{R}$ -anellati. Dimostrazione rigorosa che questo funtore è pienamente fedele, più precisamente: se X e Y sono C^∞ manifold, $f: X \rightarrow Y$ è una funzione continua, $\varphi: \mathcal{C}_{Y, \mathbb{R}}^\infty \rightarrow f_*\mathcal{C}_{X, \mathbb{R}}^\infty$ è un omomorfismo di fasci di $\mathbb{R}$ -algebre tale che (f, φ) è un morfismo di spazi localmente $\mathbb{R}$ -anellati $(X, \mathcal{C}_{X, \mathbb{R}}^\infty) \rightarrow (Y, \mathcal{C}_{Y, \mathbb{R}}^\infty)$, allora f è C^∞ e φ è data dalla precomposizione con f . La categoria delle C^∞ manifold con le mappe C^∞ è equivalente alla sottocategoria piena della categoria degli spazi localmente $\mathbb{R}$ -anellati i cui oggetti sono gli spazi localmente $\mathbb{R}$ -anellati $(X, \mathcal{O}_X)$ tali che X è uno spazio topologico T2 e N2 e che localmente sono isomorfi ad aperti di $\mathbb{R}^n$, col fascio delle funzioni C^∞ .

Teoria degli Schemi — Foglio di esercizi 1
Assegnato: venerdì 27 Febbraio 2026
Consegna delle soluzioni: martedì 17 Marzo 2026

Esercizio 1.1. Sia X uno spazio topologico, sia $\text{Sh}(X)$ la categoria dei fasci di gruppi abeliani su X e sia $\varphi: F \rightarrow G$ un morfismo in $\text{Sh}(X)$. Si provi che le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (1) per ogni punto $x \in X$, $\varphi_x: F_x \rightarrow G_x$ è suriettivo,
- (2) per ogni aperto $U \subseteq X$ e per ogni sezione $g \in G(U)$, esistono un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i \in I}$ di U e delle sezioni $f_i \in F(U_i)$ per ciascun $i \in I$, tali che $\varphi_{U_i}(f_i) = g|_{U_i}$ per ogni $i \in I$,
- (3) φ è un epimorfismo in $\text{Sh}(X)$, cioè: per ogni fascio $H \in \text{Sh}(X)$ e per ogni coppia di omomorfismi di fasci $\psi: G \rightarrow H$ e $\psi': G \rightarrow H$ tali che $\psi \circ \varphi = \psi' \circ \varphi$, si ha $\psi = \psi'$,
- (4) per ogni fascio $H \in \text{Sh}(X)$ e per ogni omomorfismo di fasci $\psi: G \rightarrow H$ tale che $\psi \circ \varphi = 0$, si ha $\psi = 0$.

Esercizio 1.2.

- (1) Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio localmente anellato, sia $U \subseteq X$ un sottoinsieme aperto. Se $\mathcal{O}_X(U) = 0$ allora si provi che $U = \emptyset$.
- (2) Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio localmente anellato, sia $U \subseteq X$ un sottoinsieme aperto e sia $f \in \mathcal{O}_X(U)$ una sezione. Si consideri $Z = \{x \in U \mid f(x) = 0 \text{ in } \kappa(x)\}$. Si provi che Z è chiuso in U .
- (3) Sia X uno spazio topologico. Si provi che le seguenti condizioni sono equivalenti:
 - (a) ogni famiglia di aperti di X ha elementi massimali;
 - (b) ogni successione crescente di aperti di X è stazionaria;
 - (c) ogni famiglia di chiusi di X ha elementi minimali;
 - (d) ogni successione decrescente di chiusi di X è stazionaria;
 - (e) ogni aperto di X , se dotato della topologia di sottospazio, è quasi-compatto;
 - (f) ogni sottoinsieme di X , se dotato della topologia di sottospazio, è quasi-compatto.

Esercizio 1.3.

- (1) Sia L un campo. Sia X lo spazio topologico costituito da un punto p e sia $\mathcal{O}_X$ il fascio su X dato dall'anello L . Sia $(Y, \mathcal{O}_Y)$ uno spazio localmente anellato. Si esibisca una bigezione tra l'insieme dei morfismi di spazi localmente anellati da $(X, \mathcal{O}_X)$ a $(Y, \mathcal{O}_Y)$ e l'insieme delle coppie (y, φ) , dove $y \in Y$ è un punto $\varphi: \kappa(y) \hookrightarrow L$ è un omomorfismo di anelli.
- (2) Sia X lo spazio topologico costituito da due punti x_0, x_1 e con topologia in cui l'unico aperto non vuoto e proprio è $\{x_1\}$ (cioè x_0 è un punto chiuso e non aperto e x_1 è un punto aperto e non chiuso). Sia $\mathcal{O}_X$ il fascio di anelli su X tale che $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{Z}_{(2)}$, $\mathcal{O}_X(\{x_1\}) = \mathbb{Q}$ e l'omomorfismo di restrizione da X a $\{x_1\}$ è l'inclusione $\mathbb{Z}_{(2)} \hookrightarrow \mathbb{Q}$. Sia $(Y, \mathcal{O}_Y)$ lo spazio localmente anellato in cui Y è lo spazio topologico costituito da un punto p e $\mathcal{O}_Y$ è il fascio dato dall'anello $\mathbb{Q}$.
 - (a) Si classifichino i morfismi di spazi anellati da $(X, \mathcal{O}_X)$ a $(Y, \mathcal{O}_Y)$.
 - (b) Si classifichino i morfismi di spazi localmente anellati da $(X, \mathcal{O}_X)$ a $(Y, \mathcal{O}_Y)$.
 - (c) Si classifichino i morfismi di spazi anellati da $(Y, \mathcal{O}_Y)$ a $(X, \mathcal{O}_X)$.
 - (d) Si classifichino i morfismi di spazi localmente anellati da $(Y, \mathcal{O}_Y)$ a $(X, \mathcal{O}_X)$.
- (3) Sia k un campo algebricamente chiuso. Sia X lo spazio topologico dato da un punto p e sia $\mathcal{O}_X$ il fascio su X dato dall'anello $k[t]/(t^2)$.
 - (a) Sia $Y = k$ la retta affine classica (con coordinata u) e sia $\mathcal{O}_Y$ il fascio delle funzioni regolari su Y . Sia T l'insieme dei morfismi $(f, f^\#)$ di spazi localmente k -anellati tali che $f(p)$ è l'origine di Y . Si trovi una bigezione tra T e k .
 - (b) Sia $Y = k^2$ il piano affine classico (con coordinate u, v) e sia $\mathcal{O}_Y$ il fascio delle funzioni regolari su Y . Sia T l'insieme dei morfismi $(f, f^\#)$ di spazi localmente k -anellati tali che $f(p)$ è l'origine di Y . Si trovi una bigezione tra T e k^2 .
 - (c) Sia $Y = (uv = 0) \subset k^2$ l'unione dei due assi, pensata come varietà algebrica classica su k , e sia $\mathcal{O}_Y$ il fascio delle funzioni regolari su Y . Per ogni punto $y \in Y$, sia T_y l'insieme dei morfismi $(f, f^\#)$ di spazi localmente k -anellati tali che $f(p) = y$. Si provi che $T_{(0,0)}$ è in bigezione con k^2 e che T_y è in bigezione con k per ogni $y \in Y \setminus \{(0,0)\}$.
- (4) Si dica se il funtore che dimentica i fasci di anelli dalla categoria degli spazi localmente $\mathbb{C}$ -anellati alla categoria degli spazi topologici è fedele.

Esercizio 1.4.

- (1) (Qui costruiamo l'incollamento di fasci per un ricoprimento aperto fatto da due elementi – per la trattazione del caso generale si rimanda all'Esercizio 2.2.8 del libro di Liu.) Sia X uno spazio topologico e siano U_0 e U_1 due aperti di X tali che $X = U_0 \cup U_1$. Per brevità si ponga $U_{01} = U_0 \cap U_1$. Si consideri il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} U_{01} & \xrightarrow{i_0} & U_0 \\ \downarrow i_1 & & \downarrow j_0 \\ U_1 & \xrightarrow{j_1} & X \end{array}$$

dato dalle inclusioni. Sia k un anello, sia F_0 un fascio di k -moduli su U_0 e sia F_1 un fascio di k -moduli su U_1 . Supponiamo di avere un isomorfismo di fasci di k -moduli

$$\phi: F_0|_{U_{01}} \rightarrow F_1|_{U_{01}}.$$

- (a) Si provi che esistono un fascio di k -moduli F su X e degli isomorfismi di fasci di k -moduli $\psi_0: F|_{U_0} \rightarrow F_0$ e $\psi_1: F|_{U_1} \rightarrow F_1$ tali che $\phi \circ \psi_0|_{U_{01}} = \psi_1|_{U_{01}}$.
- (b) Si provi che la terna (F, ψ_0, ψ_1) è unica a meno di isomorfismo; più precisamente vale la seguente implicazione: se F' è un fascio di k -moduli su X e $\psi'_0: F'|_{U_0} \rightarrow F_0$ e $\psi'_1: F'|_{U_1} \rightarrow F_1$ sono isomorfismi di fasci di k -moduli tali che $\phi \circ \psi'_0|_{U_{01}} = \psi'_1|_{U_{01}}$ allora esiste un isomorfismo $\alpha: F \rightarrow F'$ di fasci di k -moduli tale che $\psi_0 = \psi'_0 \circ \alpha|_{U_0}$ e $\psi_1 = \psi'_1 \circ \alpha|_{U_1}$.
- Il fascio F si dice *incollamento* dei fasci F_0 e F_1 tramite ϕ . (Attenzione: il fascio F dipende dalla scelta di ϕ !)
- (2) Sia X una C^∞ manifold di dimensione n . Si fissi $0 \leq p \leq n$. Ci si convinca che le p -forme C^∞ sugli aperti di X formano un fascio di $\mathbb{R}$ -spazi vettoriali, denotato con $\mathcal{A}_X^p$, ottenuto incollando i fasci $(\mathcal{C}_U^\infty)^{\oplus \binom{n}{p}}$ per ogni carta $U \subseteq X$.
- (3) Sia $f: X \rightarrow Y$ è una funzione C^∞ tra C^∞ manifold. Per ogni $p \in 0, \dots, n$, attraverso il pull-back delle p -forme si costruisca un omomorfismo di fasci di $\mathbb{R}$ -spazi vettoriali $\mathcal{A}_Y^p \rightarrow f_* \mathcal{A}_X^p$.
- (4) Se X è una superficie di Riemann, si denoti con ω_X il fascio delle 1-forme olomorfe su X . Si calcoli la dimensione del $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale $\Gamma(X, \omega_X)$ nei seguenti casi: $X = \mathbb{C}$, $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sfera di Riemann.

Esercizio 1.5. Sia k un campo algebricamente chiuso. Lavoriamo adesso nel contesto geometria algebrica ‘classica’, cioè nella categoria delle varietà quasi-proiettive ‘classiche’ su k . Per ogni varietà quasi-proiettiva ‘classica’ X , sia $\mathcal{O}_X$ il fascio delle funzioni regolari su X .

Inoltre, in questo esercizio quando si scrive fascio (o sottofascio) si intende fascio (o sottofascio) di k -spazi vettoriali.

Si consideri $\mathbb{P}^1$ la retta proiettiva ‘classica’ sul campo k con coordinate omogenee x_0, x_1 , dotata della topologia di Zariski. Siano $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ e $U_1 = \{x_1 \neq 0\}$ le due carte affini standard di $\mathbb{P}^1$. Sia $x = \frac{x_1}{x_0}$ (risp. $y = \frac{x_0}{x_1}$) la coordinata affine standard di U_0 (risp. U_1). Si ponga $U_{01} = U_0 \cap U_1$.

- (1) Si determini esplicitamente $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$ e se ne determini la dimensione come k -spazio vettoriale.
- (2) Si fissi $d \in \mathbb{Z}$. Si consideri l'isomorfismo di fasci

$$\phi: \mathcal{O}_{U_0}|_{U_{01}} = \mathcal{O}_{U_{01}} \longrightarrow \mathcal{O}_{U_1}|_{U_{01}} = \mathcal{O}_{U_{01}}$$

definito dalla moltiplicazione per x^{-d} ; più precisamente per ogni aperto $U \subseteq U_{01}$ l'omomorfismo k -lineare $\phi_U: \mathcal{O}_{U_0}(U) \rightarrow \mathcal{O}_{U_1}(U)$ è dato dalla moltiplicazione per $(x|_U)^{-d}$. Sia F il fascio su $\mathbb{P}^1$ ottenuto incollando $\mathcal{O}_{U_0}$ e $\mathcal{O}_{U_1}$ tramite ϕ . Si determini la dimensione di $\Gamma(\mathbb{P}^1, F)$ come k -spazio vettoriale.

- (3) Si fissi $e \in \mathbb{N}$. Sia G_0 il sottofascio di $\mathcal{O}_{U_0}$ così definito: per ogni aperto $U \subseteq U_0$, $G_0(U)$ è l'ideale dell'anello $\mathcal{O}_{U_0}(U)$ generato da $(x|_U)^e$. Sia G_1 il fascio su U_1 coincidente con $\mathcal{O}_{U_1}$; in questo modo G_1 è un sottofascio di $\mathcal{O}_{U_1}$.
- (a) Si provi che G_0 e G_1 possono essere incollati a un fascio G su $\mathbb{P}^1$ in modo tale che esista un omomorfismo iniettivo di fasci $\lambda: G \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ tale che le restrizioni $\lambda|_{U_0}$ e $\lambda|_{U_1}$ siano i precedenti omomorfismi iniettivi di fasci $G_0 \hookrightarrow \mathcal{O}_{U_0}$ e $G_1 \hookrightarrow \mathcal{O}_{U_1}$.
- (b) Si determini $d \in \mathbb{Z}$ tale che G sia isomorfo al fascio F costruito in (2).
- (c) Si descriva esplicitamente il fascio Q dato dal conucleo (nella categoria dei fasci) dell'omomorfismo iniettivo $\lambda: G \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$. Q è un fascio grattacielo? Se sí, rispetto a quale punto di $\mathbb{P}^1$?
- (d) Si calcoli la dimensione di $\Gamma(\mathbb{P}^1, Q)$ come k -spazio vettoriale.
- (e) Si dica per quali $e \in \mathbb{N}$ la successione esatta corta di fasci

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\lambda} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

induce una successione esatta corta sulle sezioni globali

$$0 \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}^1, G) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{P}^1, Q) \longrightarrow 0.$$

Esercizio 1.6.

- (1) Sia $f: X \rightarrow Y$ una funzione continua tra spazi topologici. Sia F un fascio di gruppi abeliani. Sia $x \in X$ un punto e sia $\nu_x: (f_*F)_{f(x)} \rightarrow F_x$ l'omomorfismo "naturale" definito a lezione.
 - (a) Si provi che se f è un'immersione topologica allora ν_x è un isomorfismo.
 - (b) Si dia un esempio in cui ν_x è iniettivo e non suriettivo.
 - (c) Si dia un esempio in cui ν_x è suriettivo e non iniettivo.
- (2) Si dia un esempio in cui $(f, f^\#): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ è un morfismo di varietà algebriche classiche su un campo algebricamente chiuso k e $x \in X$ è un punto tale che $(f_*F)_{f(x)}$ non è un anello locale.
- (3) Sia $(f, f^\#): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morfismo di spazi localmente anellati tale che $f: X \rightarrow Y$ sia un'immersione topologica aperta. Allora si provi che le seguenti condizioni sono equivalenti:
 - (a) $f^\#|_{f(X)}: \mathcal{O}_Y|_{f(X)} \rightarrow (f_*\mathcal{O}_X)|_{f(X)}$ è un isomorfismo di fasci su $f(X)$,
 - (b) per ogni aperto $W \subseteq f(X)$, $f_W^\#: \mathcal{O}_Y(W) \rightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}W)$ è un isomorfismo,
 - (c) per ogni aperto $U \subseteq X$, $f_{f(U)}^\#: \mathcal{O}_Y(f(U)) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ è un isomorfismo,
 - (d) l'omomorfismo $f^b: f^{-1}\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$, definito da $f_U^b = f_{f(U)}^\#: (f^{-1}\mathcal{O}_Y)(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(U)$ per ogni aperto $U \subseteq X$, è un isomorfismo di fasci su X ,
 - (e) per ogni punto $x \in X$, $f_x^\#: \mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ è un isomorfismo,
 - (f) per ogni punto $x \in X$, $f_{f(x)}^\#: \mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow (f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)}$ è un isomorfismo.

Se (ogni)una delle condizioni sopra è soddisfatta allora si dice che $(f, f^\#)$ è un'immersione aperta.

- (4) Si dia un esempio in cui $(f, f^\#): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ è un'immersione aperta di varietà algebriche classiche su un campo algebricamente chiuso k e $f^\#: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ non è un isomorfismo di fasci su Y .
- (5) Sia $(f, f^\#): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morfismo di spazi localmente anellati tale che $f: X \rightarrow Y$ sia un'immersione topologica chiusa. Allora si provi che le seguenti condizioni sono equivalenti:
 - (a) $f^\#: \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ è un epimorfismo di fasci su Y ,
 - (b) per ogni punto $y \in Y$, $f_y^\#: \mathcal{O}_{Y, y} \rightarrow (f_*\mathcal{O}_X)_y$ è suriettivo,
 - (c) per ogni punto $x \in X$, $f_{f(x)}^\#: \mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow (f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)}$ è suriettivo,
 - (d) per ogni punto $x \in X$, $f_x^\#: \mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ è suriettivo.

Se (ogni)una delle condizioni sopra è soddisfatta allora si dice che $(f, f^\#)$ è un'immersione chiusa.

- (6) Si dia un esempio in cui $(f, f^\#): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ è un'immersione chiusa di varietà algebriche classiche su un campo algebricamente chiuso k e $V \subseteq Y$ è un aperto tale che $f_V^\#: \mathcal{O}_Y(V) \rightarrow (f_*\mathcal{O}_X)(V)$ non è suriettivo.
- (7) Si dia un esempio in cui $(f, f^\#): (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ è un morfismo di varietà algebriche classiche su un campo algebricamente chiuso k tale che f è un omeomorfismo, $(f, f^\#)$ non è un'immersione aperta, $(f, f^\#)$ non è un'immersione chiusa.