Nome e cognome .... **Num. Matr.** ....

Geometria e Algebra t
10/02/2011

Marcare con una **crocetta** *su* **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, −1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici. . .). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3, e $v, w \in V$. Allora:

F V a) se $\dim(L(v, w)) = 2$, esiste un $u \in V$, tale che $L(v, w, u) = V$.

F V b) per ogni $u \in V$, l'insieme $\{u, v, w\}$ è linearmente dipendente.

F V c) possono esistere due vettori $u_1, u_2 \in V$ tali che $\dim(L(v, w, u_1, u_2)) = 4$.

F V d) $\dim(L(v, w)) \leq 2$.

2) Date le matrici quadrate $A, B \in M_5(\mathbb{R})$,

F V a) $\det(A + 3B) = \det(A) + 3\det(B)$.

F V b) $\det(A - I) = \det A - 1$ (dove I è la matrice identica).

F V c) se $\det A = 0$, allora $\det AB = 0$.

F V d) se B si ottiene da A scambiando la terza e la quarta riga, allora $\det A = -\det B$.

3) La seguente applicazione T è lineare:

F V a) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, con $T(A) = {}^tA - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

F V b) $T : M_{3,1}(\mathbb{R}) \to M_{2,1}(\mathbb{R})$, con $T(X) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 30 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$.

F V c) $T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(R)$, con $T(A) = (\operatorname{tr} A) \cdot I$ (dove $\operatorname{tr} A$ è la traccia di A e I è la matrice identica).

F V d) $T : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$, con $T(p(t)) = (t - 4)p(t)$.

4) Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che: $F(1, 0, 0) = (2, 0, 0)$, $F(0, 1, 0) = (0, 1, 1)$, $F(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$. Allora

F V a) F è diagonalizzabile.

F V b) F è iniettiva.

F V c) Uno degli autospazi di F ha dimensione 2.

F V d) F ha 2 autovalori distinti.

5) Sia $S : A(x) = (b)$ un sistema lineare con $A \in M_4(\mathbb{R})$ matrice dei coefficienti e $C = (A|\, b)$ matrice completa. Allora

F V a) S ha un'unica soluzione.

F V b) $\rho(C) \leq \rho(A) + 1$.

F V c) S può essere impossibile.

F V d) se $\rho(C) = 3$, S è indeterminato.

6) Sia r la retta dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ di equazioni $\begin{cases} x+y=5 \\ z=7. \end{cases}$ Allora

F **V** a) r è parallela al piano Oxy (equazione $z=0$).

F **V** b) r è ortogonale all'asse x (equazioni $y=z=0$)

F **V** c) r è parallela al piano di equazione $x+y+2z=1$.

F **V** d) r è perpendicolare al piano di equazione $x-2y=9$.

7) Le seguenti equazioni sono quelle di un piano nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

F **V** a) $\begin{cases} 2x_2-2x_3=-2 \\ x_2-x_3=-1 \\ x_4=0 \end{cases}$

F **V** b) $\begin{cases} x_1=u+v \\ x_2=u \\ x_3=v \\ x_4=1-u-2v \end{cases}$ (con $u,v\in\mathbb{R}$)

F **V** c) $\begin{cases} x_1+x_2+x_4=1 \\ 3x_1+3x_2+3x_4=2 \\ 2x_1+2x_2+2x_3=3 \end{cases}$

F **V** d) $\begin{cases} x_1=2t+6u-1 \\ x_2=t+3u \\ x_3=t+3u+1 \\ x_4=-t-3u+4 \end{cases}$ (con $t,u\in\mathbb{R}$)

8) Siano r e s due rette parallele nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Allora

F **V** a) Si possono trovare 4 punti affinemente indipendenti su $r\cup s$.

F **V** b) esiste un piano ortogonale a r e contenente s.

F **V** c) r e s non possono avere punti in comune.

F **V** d) esiste un piano π equidistante da r e s (cioè tale che $\mathrm{d}(\pi,r)=\mathrm{d}(\pi,s)$).

9) Siano r e r' due rette nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Allora

F **V** a) esistono sempre due punti $R\in r$ e $R'\in r'$ tali che $\mathrm{d}(r,r')=2\,\mathrm{d}(R,R')$.

F **V** b) la distanza tra r e r' è positiva se e solo se $r\cap r'=\varnothing$.

F **V** c) per ogni punto P vale la disuguaglianza $\mathrm{d}(r,r')\leq \mathrm{d}(r,P)+\mathrm{d}(P,r')$.

F **V** d) per ogni retta s vale la disuguaglianza $\mathrm{d}(r,r')\leq \mathrm{d}(r,s)+\mathrm{d}(s,r')$.

Nome e cognome .... **Num. Matr.** ....

Geometria e Algebra t
10/02/2011

Marcare con una ***crocetta*** *su* **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, −1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici. . .). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1) Sia r la retta dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ di equazioni $\begin{cases} x+z=5 \\ y=8. \end{cases}$ Allora

F **V** a) r è perpendicolare al piano di equazione $x - z = 9$.

F **V** b) r è parallela al piano Oxy (equazione $z = 0$).

F **V** c) r è ortogonale all'asse y (equazioni $x = z = 0$)

F **V** d) r è parallela al piano di equazione $x + y + 2z = 0$.

2) Siano r e r' due rette nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Allora

F **V** a) per qualche retta s vale la disuguaglianza $\mathrm{d}(r, r') \leq \mathrm{d}(r, s) + \mathrm{d}(s, r')$.

F **V** b) la distanza tra r e r' è nulla se e solo se $r \cap r' = \varnothing$.

F **V** c) per ogni piano π vale la disuguaglianza $\mathrm{d}(r, r') \leq \mathrm{d}(r, \pi) + \mathrm{d}(\pi, r')$.

F **V** d) esistono due punti $R \in r$ e $R' \in r'$ tali che $2\,\mathrm{d}(r, r') = \mathrm{d}(R, R')$.

3) Siano r e s due rette sghembe nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Allora

F **V** a) ogni piano che interseca r deve intersecare anche s.

F **V** b) esiste un unico piano parallelo a r e contenente s.

F **V** c) r può essere ortogonale a s.

F **V** d) Si possono trovare 4 punti affinemente indipendenti su $r \cup s$.

4) Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che: $F(1, 0, 0) = (2, 0, 0)$, $F(0, 1, 0) = (0, 1, 1)$, $F(0, 0, 1) = (0, 1, 1)$. Allora

F **V** a) F ha 2 autovalori distinti.

F **V** b) F è diagonalizzabile.

F **V** c) F è iniettiva.

F **V** d) Uno degli autospazi di F ha dimensione 2.

5) Date le matrici quadrate $A, B \in M_4(\mathbb{R})$,

F **V** a) $\det(AB^3) = (\det A) \cdot (\det B)^3$.

F **V** b) se $\det AB \neq 0$, allora $\det B \neq 0$.

F **V** c) $\det(-A) = -\det A$.

F **V** d) se B si ottiene da A sottraendo alla terza riga la quarta, allora $\det A = -\det B$.

6) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3, e $v, w \in V$. Allora:

F **V** a) se $\dim(L(v,w)) = 2$, allora per ogni $u \in V$ risulta $L(v,w,u) = V$.

F **V** b) possono esistere due vettori $u_1, u_2 \in V$ tali che $\dim(L(v,w,u_1,u_2)) = 2$.

F **V** c) per ogni $u_1, u_2 \in V$, l'insieme $\{u_1, u_2, v, w\}$ è linearmente dipendente.

F **V** d) $\dim(L(v,w,v+w)) \leq 2$.

7) Sia $S : A(x) = (b)$ un sistema lineare con $A \in M_4(\mathbb{R})$ matrice incompleta e $C = (A|(b))$ matrice completa. Allora

F **V** a) se $\rho(C) = 3$, S può essere impossibile.

F **V** b) S può avere infinite soluzioni.

F **V** c) $\rho(C) \geq \rho(A)$.

F **V** d) S ha un'unica soluzione se $\rho(C) = 4$.

8) La seguente applicazione T è lineare:

F **V** a) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, con $T(A) = 4\,{}^tA$.

F **V** b) $T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(R)$, con $T(A) = A^2$.

F **V** c) $T : M_{3,1}(\mathbb{R}) \to M_{2,1}(\mathbb{R})$, con $T(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot X$.

F **V** d) $T : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$, con $T(p(t)) = p(t) + t - 4$.

9) Le seguenti equazioni sono quelle di un piano nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

F **V** a) $\begin{cases} x_1 = 2t + 6u - 4v - 1 \\ x_2 = t + 3u - 2v \\ x_3 = t + 3u - 2v + 1 \\ x_4 = -t - 3u + 2v + 4 \end{cases}$ (con $t, u \in \mathbb{R}$)

F **V** b) $\begin{cases} x_1 = u + v \\ x_2 = u + v \\ x_3 = u - v \\ x_4 = 1 - u - v \end{cases}$ (con $u, v \in \mathbb{R}$)

F **V** c) $\begin{cases} x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

F **V** d) $\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

Nome e cognome .... **Num. Matr.** ....

Geometria e Algebra t
10/02/2011

Marcare con una **crocetta** *su* **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di* 1/2 *punto se l'indicazione è esatta,* −1/2 *punto se è errata,* 0 *in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1) Date le matrici quadrate $A, B \in M_5(\mathbb{R})$,

F **V** a) se B si ottiene da A scambiando la terza e la quarta riga, allora $\det A = -\det B$.

F **V** b) $\det(A + 3B) = \det(A) + 3\det(B)$.

F **V** c) $\det(A - I) = \det A - 1$ (dove I è la matrice identica).

F **V** d) se $\det A = 0$, allora $\det AB = 0$.

2) Sia $S : A(x) = (b)$ un sistema lineare con $A \in M_4(\mathbb{R})$ matrice dei coefficienti e $C = (A|\, b)$ matrice completa. Allora

F **V** a) se $\rho(C) = 3$, S è indeterminato.

F **V** b) S può essere impossibile.

F **V** c) $\rho(C) \leq \rho(A) + 1$.

F **V** d) S ha un'unica soluzione.

3) Sia r la retta dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ di equazioni $\begin{cases} x + y = 5 \\ z = 7. \end{cases}$ Allora

F **V** a) r è perpendicolare al piano di equazione $x - 2y = 9$.

F **V** b) r è parallela al piano di equazione $x + y + 2z = 1$.

F **V** c) r è ortogonale all'asse x (equazioni $y = z = 0$)

F **V** d) r è parallela al piano Oxy (equazione $z = 0$).

4) Le seguenti equazioni sono quelle di un piano nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

F **V** a) $\begin{cases} 2x_2 - 2x_3 = -2 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

F **V** b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

F **V** c) $\begin{cases} x_1 = 2t + 6u - 1 \\ x_2 = t + 3u \\ x_3 = t + 3u + 1 \\ x_4 = -t - 3u + 4 \end{cases}$ (con $t, u \in \mathbb{R}$)

F **V** d) $\begin{cases} x_1 = u + v \\ x_2 = u \\ x_3 = v \\ x_4 = 1 - u - 2v \end{cases}$ (con $u, v \in \mathbb{R}$)

5) La seguente applicazione T è lineare:

F **V** a) $T : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$, con $T(p(t)) = (t-4)p(t)$.

F **V** b) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, con $T(A) = {}^tA - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

F **V** c) $T : M_{3,1}(\mathbb{R}) \to M_{2,1}(\mathbb{R})$, con $T(X) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 30 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$.

F **V** d) $T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(R)$, con $T(A) = (\operatorname{tr} A) \cdot I$ (dove $\operatorname{tr} A$ è la traccia di A e I è la matrice identica).

6) Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che: $F(1,0,0) = (2,0,0)$, $F(0,1,0) = (0,1,1)$, $F(0,0,1) = (0,0,1)$. Allora

F **V** a) F ha 2 autovalori distinti.

F **V** b) Uno degli autospazi di F ha dimensione 2.

F **V** c) F è iniettiva.

F **V** d) F è diagonalizzabile.

7) Siano r e s due rette parallele nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Allora

F **V** a) Si possono trovare 4 punti affinemente indipendenti su $r \cup s$.

F **V** b) r e s non possono avere punti in comune.

F **V** c) esiste un piano π equidistante da r e s (cioè tale che $\mathrm{d}(\pi, r) = \mathrm{d}(\pi, s)$).

F **V** d) esiste un piano ortogonale a r e contenente s.

8) Siano r e r' due rette nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Allora

F **V** a) esistono sempre due punti $R \in r$ e $R' \in r'$ tali che $\mathrm{d}(r, r') = 2\,\mathrm{d}(R, R')$.

F **V** b) per ogni punto P vale la disuguaglianza $\mathrm{d}(r, r') \leq \mathrm{d}(r, P) + \mathrm{d}(P, r')$.

F **V** c) per ogni retta s vale la disuguaglianza $\mathrm{d}(r, r') \leq \mathrm{d}(r, s) + \mathrm{d}(s, r')$.

F **V** d) la distanza tra r e r' è positiva se e solo se $r \cap r' = \varnothing$.

9) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3, e $v, w \in V$. Allora:

F **V** a) $\dim(L(v, w)) \leq 2$.

F **V** b) se $\dim(L(v, w)) = 2$, esiste un $u \in V$, tale che $L(v, w, u) = V$.

F **V** c) per ogni $u \in V$, l'insieme $\{u, v, w\}$ è linearmente dipendente.

F **V** d) possono esistere due vettori $u_1, u_2 \in V$ tali che $\dim(L(v, w, u_1, u_2)) = 4$.

Nome e cognome .... **Num. Matr.** ....

Geometria e Algebra t
10/02/2011

*Marcare con una **crocetta** su **V** le affermazioni ritenute vere e su **F** le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, −1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1) Siano r e r' due rette nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Allora

F **V** a) la distanza tra r e r' è nulla se e solo se $r \cap r' = \varnothing$.

F **V** b) per ogni piano π vale la disuguaglianza $\mathrm{d}(r, r') \leq \mathrm{d}(r, \pi) + \mathrm{d}(\pi, r')$.

F **V** c) per qualche retta s vale la disuguaglianza $\mathrm{d}(r, r') \leq \mathrm{d}(r, s) + \mathrm{d}(s, r')$.

F **V** d) esistono due punti $R \in r$ e $R' \in r'$ tali che $2\,\mathrm{d}(r, r') = \mathrm{d}(R, R')$.

2) Sia $S : A(x) = (b)$ un sistema lineare con $A \in M_4(\mathbb{R})$ matrice incompleta e $C = (A|(b))$ matrice completa. Allora

F **V** a) S ha un'unica soluzione se $\rho(C) = 4$.

F **V** b) $\rho(C) \geq \rho(A)$.

F **V** c) S può avere infinite soluzioni.

F **V** d) se $\rho(C) = 3$, S può essere impossibile.

3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3, e $v, w \in V$. Allora:

F **V** a) $\dim(L(v, w, v + w)) \leq 2$.

F **V** b) possono esistere due vettori $u_1, u_2 \in V$ tali che $\dim(L(v, w, u_1, u_2)) = 2$.

F **V** c) se $\dim(L(v, w)) = 2$, allora per ogni $u \in V$ risulta $L(v, w, u) = V$.

F **V** d) per ogni $u_1, u_2 \in V$, l'insieme $\{u_1, u_2, v, w\}$ è linearmente dipendente.

4) Sia r la retta dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ di equazioni $\begin{cases} x + z = 5 \\ y = 8. \end{cases}$ Allora

F **V** a) r è parallela al piano di equazione $x + y + 2z = 0$.

F **V** b) r è ortogonale all'asse y (equazioni $x = z = 0$)

F **V** c) r è parallela al piano Oxy (equazione $z = 0$).

F **V** d) r è perpendicolare al piano di equazione $x - z = 9$.

5) Siano r e s due rette sghembe nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Allora

F **V** a) esiste un unico piano parallelo a r e contenente s.

F **V** b) r può essere ortogonale a s.

F **V** c) ogni piano che interseca r deve intersecare anche s.

F **V** d) Si possono trovare 4 punti affinemente indipendenti su $r \cup s$.

6) Le seguenti equazioni sono quelle di un piano nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

F **V** a) $\begin{cases} x_1 = u+v \\ x_2 = u+v \\ x_3 = u-v \\ x_4 = 1-u-v \end{cases}$ (con $u, v \in \mathbb{R}$)

F **V** b) $\begin{cases} x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

F **V** c) $\begin{cases} x_1 = 2t + 6u - 4v - 1 \\ x_2 = t + 3u - 2v \\ x_3 = t + 3u - 2v + 1 \\ x_4 = -t - 3u + 2v + 4 \end{cases}$ (con $t, u \in \mathbb{R}$)

F **V** d) $\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

7) La seguente applicazione T è lineare:

F **V** a) $T : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$, con $T(p(t)) = p(t) + t - 4$.

F **V** b) $T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(R)$, con $T(A) = A^2$.

F **V** c) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, con $T(A) = 4\,{}^tA$.

F **V** d) $T : M_{3,1}(\mathbb{R}) \to M_{2,1}(\mathbb{R})$, con $T(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot X$.

8) Date le matrici quadrate $A, B \in M_4(\mathbb{R})$,

F **V** a) se B si ottiene da A sottraendo alla terza riga la quarta, allora $\det A = -\det B$.

F **V** b) se $\det AB \neq 0$, allora $\det B \neq 0$.

F **V** c) $\det(AB^3) = (\det A) \cdot (\det B)^3$.

F **V** d) $\det(-A) = -\det A$.

9) Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che: $F(1,0,0) = (2,0,0)$, $F(0,1,0) = (0,1,1)$, $F(0,0,1) = (0,1,1)$. Allora

F **V** a) Uno degli autospazi di F ha dimensione 2.

F **V** b) F è iniettiva.

F **V** c) F è diagonalizzabile.

F **V** d) F ha 2 autovalori distinti.

Nome e cognome .... **Num. Matr.** ....

Geometria e Algebra t
10/02/2011

Marcare con una ***crocetta*** *su* **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di* $1/2$ *punto se l'indicazione è esatta,* $-1/2$ *punto se è errata,* 0 *in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1) Date le matrici quadrate $A, B \in M_5(\mathbb{R})$,

F **V** a) se B si ottiene da A scambiando la terza e la quarta riga, allora $\det A = -\det B$.

F **V** b) $\det(A + 3B) = \det(A) + 3\det(B)$.

F **V** c) se $\det A = 0$, allora $\det AB = 0$.

F **V** d) $\det(A - I) = \det A - 1$ (dove I è la matrice identica).

2) La seguente applicazione T è lineare:

F **V** a) $T : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$, con $T(p(t)) = (t - 4)p(t)$.

F **V** b) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, con $T(A) = {}^tA - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

F **V** c) $T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(R)$, con $T(A) = (\operatorname{tr} A) \cdot I$ (dove $\operatorname{tr} A$ è la traccia di A e I è la matrice identica).

F **V** d) $T : M_{3,1}(\mathbb{R}) \to M_{2,1}(\mathbb{R})$, con $T(X) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 30 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$.

3) Siano r e s due rette parallele nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Allora

F **V** a) esiste un piano ortogonale a r e contenente s.

F **V** b) esiste un piano π equidistante da r e s (cioè tale che $\mathrm{d}(\pi, r) = \mathrm{d}(\pi, s)$).

F **V** c) Si possono trovare 4 punti affinemente indipendenti su $r \cup s$.

F **V** d) r e s non possono avere punti in comune.

4) Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che: $F(1,0,0) = (2,0,0)$, $F(0,1,0) = (0,1,1)$, $F(0,0,1) = (0,0,1)$. Allora

F **V** a) F è iniettiva.

F **V** b) F è diagonalizzabile.

F **V** c) F ha 2 autovalori distinti.

F **V** d) Uno degli autospazi di F ha dimensione 2.

5) Sia $S : A(x) = (b)$ un sistema lineare con $A \in M_4(\mathbb{R})$ matrice dei coefficienti e $C = (A|\, b)$ matrice completa. Allora

F **V** a) $\rho(C) \leq \rho(A) + 1$.

F **V** b) S ha un'unica soluzione.

F **V** c) se $\rho(C) = 3$, S è indeterminato.

F **V** d) S può essere impossibile.

6) Sia r la retta dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ di equazioni $\begin{cases} x+y=5 \\ z=7. \end{cases}$ Allora

F **V** a) r è ortogonale all'asse x (equazioni $y=z=0$)

F **V** b) r è parallela al piano Oxy (equazione $z=0$).

F **V** c) r è perpendicolare al piano di equazione $x-2y=9$.

F **V** d) r è parallela al piano di equazione $x+y+2z=1$.

7) Le seguenti equazioni sono quelle di un piano nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

F **V** a) $\begin{cases} x_1=u+v \\ x_2=u \\ x_3=v \\ x_4=1-u-2v \end{cases}$ (con $u,v\in\mathbb{R}$)

F **V** b) $\begin{cases} x_1=2t+6u-1 \\ x_2=t+3u \\ x_3=t+3u+1 \\ x_4=-t-3u+4 \end{cases}$ (con $t,u\in\mathbb{R}$)

F **V** c) $\begin{cases} 2x_2-2x_3=-2 \\ x_2-x_3=-1 \\ x_4=0 \end{cases}$

F **V** d) $\begin{cases} x_1+x_2+x_4=1 \\ 3x_1+3x_2+3x_4=2 \\ 2x_1+2x_2+2x_3=3 \end{cases}$

8) Siano r e r' due rette nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Allora

F **V** a) la distanza tra r e r' è positiva se e solo se $r\cap r'=\varnothing$.

F **V** b) per ogni retta s vale la disuguaglianza $\mathrm{d}(r,r')\leq \mathrm{d}(r,s)+\mathrm{d}(s,r')$.

F **V** c) esistono sempre due punti $R\in r$ e $R'\in r'$ tali che $\mathrm{d}(r,r')=2\,\mathrm{d}(R,R')$.

F **V** d) per ogni punto P vale la disuguaglianza $\mathrm{d}(r,r')\leq \mathrm{d}(r,P)+\mathrm{d}(P,r')$.

9) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3, e $v,w\in V$. Allora:

F **V** a) $\dim(L(v,w))\leq 2$.

F **V** b) se $\dim(L(v,w))=2$, esiste un $u\in V$, tale che $L(v,w,u)=V$.

F **V** c) possono esistere due vettori $u_1,u_2\in V$ tali che $\dim(L(v,w,u_1,u_2))=4$.

F **V** d) per ogni $u\in V$, l'insieme $\{u,v,w\}$ è linearmente dipendente.

01010

Nome e cognome .... **Num. Matr.** ....

Geometria e Algebra t
10/02/2011

Marcare con una **crocetta** *su* **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, −1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1) Le seguenti equazioni sono quelle di un piano nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

F **V** a) $\begin{cases} x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

F **V** b) $\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

F **V** c) $\begin{cases} x_1 = u + v \\ x_2 = u + v \\ x_3 = u - v \\ x_4 = 1 - u - v \end{cases}$ (con $u, v \in \mathbb{R}$)

F **V** d) $\begin{cases} x_1 = 2t + 6u - 4v - 1 \\ x_2 = t + 3u - 2v \\ x_3 = t + 3u - 2v + 1 \\ x_4 = -t - 3u + 2v + 4 \end{cases}$ (con $t, u \in \mathbb{R}$)

2) Sia r la retta dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ di equazioni $\begin{cases} x + z = 5 \\ y = 8. \end{cases}$ Allora

F **V** a) r è parallela al piano Oxy (equazione $z = 0$).

F **V** b) r è perpendicolare al piano di equazione $x - z = 9$.

F **V** c) r è ortogonale all'asse y (equazioni $x = z = 0$)

F **V** d) r è parallela al piano di equazione $x + y + 2z = 0$.

3) Date le matrici quadrate $A, B \in M_4(\mathbb{R})$,

F **V** a) $\det(-A) = -\det A$.

F **V** b) se $\det AB \neq 0$, allora $\det B \neq 0$.

F **V** c) $\det(AB^3) = (\det A) \cdot (\det B)^3$.

F **V** d) se B si ottiene da A sottraendo alla terza riga la quarta, allora $\det A = -\det B$.

4) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3, e $v, w \in V$. Allora:

F **V** a) per ogni $u_1, u_2 \in V$, l'insieme $\{u_1, u_2, v, w\}$ è linearmente dipendente.

F **V** b) possono esistere due vettori $u_1, u_2 \in V$ tali che $\dim(L(v, w, u_1, u_2)) = 2$.

F **V** c) se $\dim(L(v, w)) = 2$, allora per ogni $u \in V$ risulta $L(v, w, u) = V$.

F **V** d) $\dim(L(v, w, v + w)) \leq 2$.

5) Siano r e s due rette sghembe nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Allora

F **V** a) r può essere ortogonale a s.

F **V** b) Si possono trovare 4 punti affinemente indipendenti su $r \cup s$.

F **V** c) esiste un unico piano parallelo a r e contenente s.

F **V** d) ogni piano che interseca r deve intersecare anche s.

6) Siano r e r' due rette nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Allora

F **V** a) per ogni piano π vale la disuguaglianza $\mathrm{d}(r, r') \leq \mathrm{d}(r, \pi) + \mathrm{d}(\pi, r')$.

F **V** b) esistono due punti $R \in r$ e $R' \in r'$ tali che $2\,\mathrm{d}(r, r') = \mathrm{d}(R, R')$.

F **V** c) la distanza tra r e r' è nulla se e solo se $r \cap r' = \varnothing$.

F **V** d) per qualche retta s vale la disuguaglianza $\mathrm{d}(r, r') \leq \mathrm{d}(r, s) + \mathrm{d}(s, r')$.

7) Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che: $F(1,0,0) = (2,0,0)$, $F(0,1,0) = (0,1,1)$, $F(0,0,1) = (0,1,1)$. Allora

F **V** a) F è diagonalizzabile.

F **V** b) F ha 2 autovalori distinti.

F **V** c) F è iniettiva.

F **V** d) Uno degli autospazi di F ha dimensione 2.

8) La seguente applicazione T è lineare:

F **V** a) $T : M_{3,1}(\mathbb{R}) \to M_{2,1}(\mathbb{R})$, con $T(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot X$.

F **V** b) $T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(R)$, con $T(A) = A^2$.

F **V** c) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, con $T(A) = 4\,{}^tA$.

F **V** d) $T : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$, con $T(p(t)) = p(t) + t - 4$.

9) Sia $S : A(x) = (b)$ un sistema lineare con $A \in M_4(\mathbb{R})$ matrice incompleta e $C = (A|(b))$ matrice completa. Allora

F **V** a) S può avere infinite soluzioni.

F **V** b) se $\rho(C) = 3$, S può essere impossibile.

F **V** c) $\rho(C) \geq \rho(A)$.

F **V** d) S ha un'unica soluzione se $\rho(C) = 4$.

Nome e cognome .... **Num. Matr.** ....

Geometria e Algebra t
10/02/2011

Marcare con una ***crocetta*** *su* **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, −1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1) Date le matrici quadrate $A, B \in M_5(\mathbb{R})$,

F **V** a) se $\det A = 0$, allora $\det AB = 0$.

F **V** b) $\det(A - I) = \det A - 1$ (dove I è la matrice identica).

F **V** c) se B si ottiene da A scambiando la terza e la quarta riga, allora $\det A = -\det B$.

F **V** d) $\det(A + 3B) = \det(A) + 3\det(B)$.

2) La seguente applicazione T è lineare:

F **V** a) $T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(R)$, con $T(A) = (\operatorname{tr} A) \cdot I$ (dove $\operatorname{tr} A$ è la traccia di A e I è la matrice identica).

F **V** b) $T : M_{3,1}(\mathbb{R}) \to M_{2,1}(\mathbb{R})$, con $T(X) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 30 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot X$.

F **V** c) $T : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$, con $T(p(t)) = (t - 4)p(t)$.

F **V** d) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, con $T(A) = {}^tA - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che: $F(1, 0, 0) = (2, 0, 0)$, $F(0, 1, 0) = (0, 1, 1)$, $F(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$. Allora

F **V** a) F è iniettiva.

F **V** b) Uno degli autospazi di F ha dimensione 2.

F **V** c) F è diagonalizzabile.

F **V** d) F ha 2 autovalori distinti.

4) Sia $S : A(x) = (b)$ un sistema lineare con $A \in M_4(\mathbb{R})$ matrice dei coefficienti e $C = (A|\, b)$ matrice completa. Allora

F **V** a) $\rho(C) \leq \rho(A) + 1$.

F **V** b) S può essere impossibile.

F **V** c) S ha un'unica soluzione.

F **V** d) se $\rho(C) = 3$, S è indeterminato.

5) Siano r e r' due rette nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Allora

F **V** a) esistono sempre due punti $R \in r$ e $R' \in r'$ tali che $d(r, r') = 2\,d(R, R')$.

F **V** b) per ogni retta s vale la disuguaglianza $d(r, r') \leq d(r, s) + d(s, r')$.

F **V** c) la distanza tra r e r' è positiva se e solo se $r \cap r' = \varnothing$.

F **V** d) per ogni punto P vale la disuguaglianza $d(r, r') \leq d(r, P) + d(P, r')$.

6) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3, e $v, w \in V$. Allora:

F **V** a) possono esistere due vettori $u_1, u_2 \in V$ tali che $\dim(L(v, w, u_1, u_2)) = 4$.

F **V** b) per ogni $u \in V$, l'insieme $\{u, v, w\}$ è linearmente dipendente.

F **V** c) $\dim(L(v, w)) \leq 2$.

F **V** d) se $\dim(L(v, w)) = 2$, esiste un $u \in V$, tale che $L(v, w, u) = V$.

7) Sia r la retta dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ di equazioni $\begin{cases} x + y = 5 \\ z = 7. \end{cases}$ Allora

F **V** a) r è ortogonale all'asse x (equazioni $y = z = 0$)

F **V** b) r è parallela al piano di equazione $x + y + 2z = 1$.

F **V** c) r è parallela al piano Oxy (equazione $z = 0$).

F **V** d) r è perpendicolare al piano di equazione $x - 2y = 9$.

8) Le seguenti equazioni sono quelle di un piano nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

F **V** a) $\begin{cases} 2x_2 - 2x_3 = -2 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

F **V** b) $\begin{cases} x_1 = 2t + 6u - 1 \\ x_2 = t + 3u \\ x_3 = t + 3u + 1 \\ x_4 = -t - 3u + 4 \end{cases}$ (con $t, u \in \mathbb{R}$)

F **V** c) $\begin{cases} x_1 = u + v \\ x_2 = u \\ x_3 = v \\ x_4 = 1 - u - 2v \end{cases}$ (con $u, v \in \mathbb{R}$)

F **V** d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

9) Siano r e s due rette parallele nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Allora

F **V** a) Si possono trovare 4 punti affinemente indipendenti su $r \cup s$.

F **V** b) esiste un piano π equidistante da r e s (cioè tale che $\mathrm{d}(\pi, r) = \mathrm{d}(\pi, s)$).

F **V** c) esiste un piano ortogonale a r e contenente s.

F **V** d) r e s non possono avere punti in comune.

Nome e cognome .... **Num. Matr.** ....

Geometria e Algebra t
10/02/2011

Marcare con una **crocetta** *su* **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, −1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1) Sia $S : A(x) = (b)$ un sistema lineare con $A \in M_4(\mathbb{R})$ matrice incompleta e $C = (A|(b))$ matrice completa. Allora

F **V** a) se $\rho(C) = 3$, S può essere impossibile.

F **V** b) $\rho(C) \geq \rho(A)$.

F **V** c) S ha un'unica soluzione se $\rho(C) = 4$.

F **V** d) S può avere infinite soluzioni.

2) Siano r e s due rette sghembe nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Allora

F **V** a) r può essere ortogonale a s.

F **V** b) esiste un unico piano parallelo a r e contenente s.

F **V** c) Si possono trovare 4 punti affinemente indipendenti su $r \cup s$.

F **V** d) ogni piano che interseca r deve intersecare anche s.

3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3, e $v, w \in V$. Allora:

F **V** a) se $\dim(L(v, w)) = 2$, allora per ogni $u \in V$ risulta $L(v, w, u) = V$.

F **V** b) per ogni $u_1, u_2 \in V$, l'insieme $\{u_1, u_2, v, w\}$ è linearmente dipendente.

F **V** c) $\dim(L(v, w, v + w)) \leq 2$.

F **V** d) possono esistere due vettori $u_1, u_2 \in V$ tali che $\dim(L(v, w, u_1, u_2)) = 2$.

4) Siano r e r' due rette nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Allora

F **V** a) per ogni piano π vale la disuguaglianza $\mathrm{d}(r, r') \leq \mathrm{d}(r, \pi) + \mathrm{d}(\pi, r')$.

F **V** b) la distanza tra r e r' è nulla se e solo se $r \cap r' = \varnothing$.

F **V** c) esistono due punti $R \in r$ e $R' \in r'$ tali che $2\,\mathrm{d}(r, r') = \mathrm{d}(R, R')$.

F **V** d) per qualche retta s vale la disuguaglianza $\mathrm{d}(r, r') \leq \mathrm{d}(r, s) + \mathrm{d}(s, r')$.

5) La seguente applicazione T è lineare:

F **V** a) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, con $T(A) = 4\,{}^tA$.

F **V** b) $T : M_{3,1}(\mathbb{R}) \to M_{2,1}(\mathbb{R})$, con $T(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot X$.

F **V** c) $T : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$, con $T(p(t)) = p(t) + t - 4$.

F **V** d) $T : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(R)$, con $T(A) = A^2$.

6) Date le matrici quadrate $A, B \in M_4(\mathbb{R})$,

F **V** a) $\det(AB^3) = (\det A) \cdot (\det B)^3$.

F **V** b) $\det(-A) = -\det A$.

F **V** c) se B si ottiene da A sottraendo alla terza riga la quarta, allora $\det A = -\det B$.

F **V** d) se $\det AB \neq 0$, allora $\det B \neq 0$.

7) Sia r la retta dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ di equazioni $\begin{cases} x + z = 5 \\ y = 8. \end{cases}$ Allora

F **V** a) r è perpendicolare al piano di equazione $x - z = 9$.

F **V** b) r è ortogonale all'asse y (equazioni $x = z = 0$)

F **V** c) r è parallela al piano di equazione $x + y + 2z = 0$.

F **V** d) r è parallela al piano Oxy (equazione $z = 0$).

8) Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che: $F(1,0,0) = (2,0,0)$, $F(0,1,0) = (0,1,1)$, $F(0,0,1) = (0,1,1)$. Allora

F **V** a) F ha 2 autovalori distinti.

F **V** b) F è iniettiva.

F **V** c) Uno degli autospazi di F ha dimensione 2.

F **V** d) F è diagonalizzabile.

9) Le seguenti equazioni sono quelle di un piano nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

F **V** a) $\begin{cases} x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

F **V** b) $\begin{cases} x_1 = u + v \\ x_2 = u + v \\ x_3 = u - v \\ x_4 = 1 - u - v \end{cases}$ (con $u, v \in \mathbb{R}$)

F **V** c) $\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

F **V** d) $\begin{cases} x_1 = 2t + 6u - 4v - 1 \\ x_2 = t + 3u - 2v \\ x_3 = t + 3u - 2v + 1 \\ x_4 = -t - 3u + 2v + 4 \end{cases}$ (con $t, u \in \mathbb{R}$)