10 Febbraio 2011 **Secondo Appello (v1)** **N. Matr.** ....

Nome Cognome ....

Rispondere sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti.

---

1) Si consideri la forma quadratica al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$q(x, y, z) = x^2 - 2\alpha xy + y^2 + z^2$$

a) Si calcoli la matrice di Gram associata a q. *(3 punti)*

b) Trovare la segnatura della forma quadratica q al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. *(3 punti)*

2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da

$$F(x, y, z) = (2y, 3x - y, 4x - y + z)$$

a) Dire (e giustificare) se è diagonalizzabile. *(3 punti)*

b) Sia A la matrice associata canonicamente ad F. Si calcoli una matrice H invertibile tale che $A = H^{-1}DH$ con D una matrice diagonale. *(3 punti)*

3) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & k \end{pmatrix}$$

definita al variare del parametro reale k.

a) Dato il sistema lineare $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ si calcoli la dimensione dello spazio delle soluzioni e fornire una interpretazione geometrica, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$. *(3 punti)*

b) Posto $k = -1$. Dati U la chiusura lineare delle righe di A e V la chiusura lineare delle colonne di A, calcolare una rappresentazione cartesiana di $U \cap V$ e una rappresentazione parametrica di $U + V$. *(3 punti)*

$\boxed{V1}$

1)

a) $\underset{A}{\underset{\shortparallel}{G^{\mathcal{E}}(q)}} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - \alpha^2(1-\lambda) =$

$= (1-\lambda)\cdot\left((1-\lambda)^2 - \alpha^2\right) =$

$= (1-\lambda)\cdot(\lambda-(1+\alpha))\cdot(\lambda-(1-\alpha))$

$\equiv (\lambda-1)\cdot(\lambda-(1+\alpha))\cdot(\lambda-(1-\alpha))$

Autov. $= \{1,\ 1+\alpha,\ 1-\alpha\}$

		-1		1	
$1+\alpha$	$-$		$+$		$+$
$1-\alpha$	$+$		$+$		$-$

$1-\alpha > 0$

$1 > \alpha$

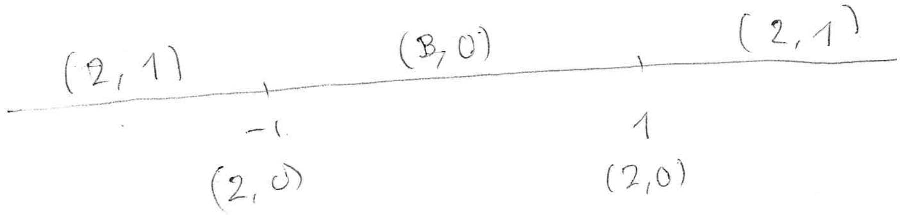
$\alpha < -1 \qquad \sigma(A) = (2,1)$

$\alpha \in (-1,1) \qquad \sigma(A) = (3,0)$

$\alpha > 1 \qquad \sigma(A) = (2,1)$

$\alpha = -1 \qquad \sigma(A) = (2,0)$

$\alpha = 1 \qquad \sigma(A) = (2,0)$



2)

a) $\underset{A}{\overset{\shortparallel}{}} M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 3 & -1-\lambda & 0 \\ 4 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda-2)(\lambda-1)$$

$Aut = \{-3, 2, 1\} \Rightarrow$ diagonali

b) $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F) = M_{\mathcal{E}}^{S}(id)\, M_{S}^{S}(F)\, M_{S}^{\mathcal{E}}(id)$

$$S = \{ \underset{V(-3)}{(1, -\tfrac{3}{2}, \tfrac{-11}{8})},\ \underset{V(2)}{(1,1,3)}\ \ \underset{V(1)}{(0,0,1)} \}$$

$$A = H^{-1} \cdot D \cdot H$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ -11/8 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 2/5 & -2/5 & 0 \\ 3/5 & 2/5 & 0 \\ -5/4 & -7/4 & 1 \end{pmatrix}$$

3)

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & k & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & k+1 & 1 \end{array}\right)$$

$\underline{k=-1} \Rightarrow \nexists$ soluz.

$\underline{k \neq -1} \Rightarrow \exists!$ soluz. $\dim S = 0$

$\underline{k=-1}$ $r: \{$ $\quad r \parallel \pi$

$\pi :$

$\underline{k \neq -1}$ $r \cap \pi = \{P\}$

b) $\mathbb{U} = L\{(1\ 1\ -1)\ (0\ 2\ -1)\ \cancel{(0\ 2\ -1)}\}$

$\mathbb{V} = L\{(1,0,0)\ (1\ 2\ 2)\ \cancel{(-1,-1,-1)}\}$

$$\mathbb{U} \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha + 2\beta \\ z = -\alpha - \beta \end{cases} \alpha,\beta \in \mathbb{R} \qquad \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 1 & 2 \\ z & -1 & -1 \end{vmatrix} = -x + 2z + 2x + y = \underline{x + y + 2z = 0}$$

$$\mathbb{V} : \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = +2\beta \\ z = +2\beta \end{cases} \alpha,\beta \in \mathbb{R} \qquad \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & 2 \\ z & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2z - 2y = 0 \qquad z - y = 0$$

$$\mathbb{U} \cap \mathbb{V} : \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ z - y = 0 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} x + 3y = 0 \\ z - y = 0 \end{cases}}$$

$$\mathbb{U} + \mathbb{V} = L\{(1\ 1\ -1)\ (0\ 2\ -1)\ (1\ 0\ 0)\ \cancel{(1\ 2\ 2)}\} = \mathbb{R}^3$$

$$\boxed{\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \gamma \end{cases} \quad \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}}$$