Nome e cognome Num. Matr.

Geometria e Algebra t

14/07/2011

Marcare con una **crocetta** su **V** le affermazioni ritenute vere e su **F** le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.

1. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Indichiamo con I la matrice identica e con $\mathbf{0}$ la matrice nulla. Se $\det A = 0$, allora

F V a) esiste $B \in M_n(\mathbb{R})$, $B \neq \mathbf{0}$, tale che $AB = \mathbf{0}$.

F V b) $A^n = \mathbf{0}$.

F V c) Per nessun $C \in M_n(\mathbb{R})$ risulta $AC = I$.

F V d) $I - A$ è invertibile.

2. Se v_1, v_2, v_3 sono vettori linearmente dipendenti di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ di dimensione 5, allora:

F V a) $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3\}$ è un insieme linearmente dipendente.

F V b) esiste $w \in V$, tale che $\dim(L(v_1, v_2, v_3, w)) = 3$.

F V c) $L(v_1 - v_2, v_3 - v_2)$ ha dimensione 2.

F V d) $v_1 \in L(v_2, v_3)$.

3. Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare sullo spazio vettoriale V . Siano $v, w \in V$ vettori non nulli.

F V a) Se $\langle v, w \rangle = 0$, allora v, w sono linearmente dipendenti.

F V b) Se $\langle v, w \rangle = 0$, allora $\langle 2v, 3w \rangle = 0$.

F V c) Se $\langle v, w \rangle = 0$, allora $\langle v + w, w \rangle = 0$.

F V d) Esiste sempre un $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\langle v + \alpha w, w \rangle = 0$.

4. Si consideri lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare naturale, e sia U il suo sottospazio di equazioni cartesiane $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ (rispetto alla base canonica). Allora

F V a) una base di ${}^\perp U$ è data da $\{(1, 1, 0)\}$.

F V b) una base di ${}^\perp U$ è data da $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

F V c) un sistema di equazioni cartesiane per ${}^\perp U$ è dato da: $\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

F V d) un sistema di equazioni cartesiane per ${}^\perp U$ è dato da: $x - y = 0$.

5. Si consideri un sistema lineare $S : AX = b$, con $A \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ e $b \in M_{4 \times 1}(\mathbb{R})$.

F V a) Se $b = 0$, allora esistono infinite soluzioni.

F V b) Scelta comunque la matrice A , esiste qualche $b \neq 0$ tale che il sistema S sia compatibile.

F V c) Se il rango di A è minore di 3, il sistema è indeterminato.

F V d) La soluzione può essere unica.

6. Il sottoinsieme U è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale V , con

F V a) $V = \mathbb{R}^3$ e $U = \{\alpha(1, 1, 0) + \beta(-1, 0, -1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

F V b) $V = M_2(\mathbb{R})$ e $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

F V c) $V = \mathbb{R}$ e $U = \{0\}$.

F V d) $V = \mathbb{R}_3[t]$ e $U = \{p(t) \in \mathbb{R}_3[t] \mid \text{grado di } p(t) > 1\}$.

7. Siano r, s due rette sghembe dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Allora

F V a) $d(r, s) = d(r, S)$, con S un punto qualunque di s .

F V b) se π è un piano e $r \subset \pi$, allora $s \cap \pi \neq \emptyset$.

F V c) si ha sempre $d(r, s) > 0$.

F V d) esiste una retta t ortogonale a r e a s .

8. Se $A \in M_4(\mathbb{R})$ è una matrice diagonalizzabile, allora

F V a) A ammette 4 autovalori reali distinti.

F V b) il polinomio caratteristico di A si può scomporre in fattori di primo grado.

F V c) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di A è 4.

F V d) $\det A \neq 0$.

9. Sia A una matrice simmetrica di autovalori $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$. Allora

F V a) A è congruente a $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

F V b) A è simile a $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

F V c) A è congruente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

F V d) A è simile a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Nome e cognome Num. Matr.

Geometria e Algebra t

14/07/2011

Marcare con una **crocetta** su **V** le affermazioni ritenute vere e su **F** le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.

1. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$. Indichiamo con I la matrice identica e con $\mathbf{0}$ la matrice nulla. Se $\det A \neq 0$, allora

F V a) esiste $B \in M_n(\mathbb{R})$, $B \neq \mathbf{0}$, tale che $AB = \mathbf{0}$.

F V b) $A^n = I$.

F V c) Per qualche $C \in M_n(\mathbb{R})$ risulta $AC = I$.

F V d) $I - A$ è invertibile.

2. Se v_1, v_2, v_3 sono vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ di dimensione 5, allora:

F V a) $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3\}$ è un insieme linearmente dipendente.

F V b) per ogni $w \in V$, si ha che $\dim(L(v_1, v_2, v_3, w)) = 4$.

F V c) $L(v_1 - v_2, v_3 - v_2)$ ha dimensione 2.

F V d) $v_1 \in L(v_2, v_3)$.

3. Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare sullo spazio vettoriale V . Siano $v, w \in V$ vettori non nulli.

F V a) Se $\langle v, w \rangle = 0$, allora v, w sono linearmente indipendenti.

F V b) Se $\langle v, w \rangle \neq 0$, allora $\langle -2v, 2w \rangle \neq 0$.

F V c) Se $\langle v, w \rangle = 0$, allora $\langle v + w, w \rangle \neq 0$.

F V d) Esiste sempre un $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\langle \alpha w, w \rangle = 0$.

4. Si consideri lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare naturale, e sia U il suo sottospazio di equazione cartesiana $x - y = 0$ (rispetto alla base canonica). Allora

F V a) una base di ${}^\perp U$ è data da $\{(1, -1, 0)\}$.

F V b) una base di ${}^\perp U$ è data da $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$.

F V c) un sistema di equazioni cartesiane per ${}^\perp U$ è dato da:
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

F V d) un sistema di equazioni cartesiane per ${}^\perp U$ è dato da: $x + y - z = 0$.

5. Si consideri un sistema lineare $S : AX = b$, con $A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ e $b \in M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$.

- F V** a) Se $b = 0$, allora esistono infinite soluzioni.
F V b) Scelta comunque la matrice A , esiste qualche $b \neq 0$ tale che il sistema S sia compatibile.
F V c) Se il rango di A è minore di 3, il sistema è impossibile.
F V d) La soluzione può essere unica.

6. Il sottoinsieme U è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale V , con

- F V** a) $V = \mathbb{R}^3$ e $U = \{\alpha(1, 1, 0) + (-1, 0, -1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.
F V b) $V = M_2(\mathbb{R})$ e $U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.
F V c) $V = \mathbb{R}$ e $U = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
F V d) $V = \mathbb{R}_3[t]$ e $U = \{p(t) \in \mathbb{R}_3[t] \mid \text{grado di } p(t) < 2\}$.

7. Siano r, s due rette parallele dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Allora

- F V** a) $d(r, s) = d(r, S)$, con S un punto qualunque di s .
F V b) se π è un piano e $r \subset \pi$ ma $s \not\subset \pi$, allora $s \cap \pi = \emptyset$.
F V c) si ha sempre $d(r, s) > 0$.
F V d) esiste un unico piano equidistante da r e da s .

8. $A \in M_4(\mathbb{R})$ è una matrice diagonalizzabile se

- F V** a) A ammette 4 autovalori reali distinti.
F V b) il polinomio caratteristico di A si può scomporre in fattori di primo grado.
F V c) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A è 4.
F V d) $\det A \neq 0$.

9. Sia A una matrice simmetrica di autovalori $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. Allora

- F V** a) A è congruente a $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
F V b) A è simile a $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
F V c) A è congruente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
F V d) A è simile a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.