

1) a) Sistema $\pi \begin{cases} kx + y - z = -3 \\ 3x + (k+1)y = 1 \\ y + z = 2 \end{cases} \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & -3 \\ 3 & k+1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$

$$\det A = k(k+1) - 3 \cdot 1 = k^2 + k - 6 = (k+3)(k-2)$$

$$\det A \neq 0 \iff k \neq -3 \wedge k \neq 2 \iff \pi \text{ e } r \text{ secanti.}$$

$$k = -3 \rightarrow B = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{a^2 + a^1} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\rho(A) = \rho(B) = 2 \rightarrow r \subseteq \pi$$

$$k = 2 \rightarrow B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{a^2 - \frac{3}{2}a^1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{17}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\rho(A) = 2 < \rho(B) = 3 \rightarrow r \parallel \pi, r \cap \pi = \emptyset$$

b) $k = -1 \rightarrow \pi: -x + y - z + 3 = 0$; $Q = (1, 1, 1)$

$$d(\pi, Q) = \frac{|-1 + 1 - 1 + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$d(Q, r) = d(Q, Q')$ con Q' proiezz. ortog di Q su r , quindi

$Q' = r \cap \pi'$, dove π' è il piano per Q , ortog. a r .

$$r: \begin{cases} 3x = 1 \\ y + z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 2 - z \end{cases} \quad (l, m, n) = (0, 1, -1)$$

$\pi': y - z = 0$. Per trovare Q' , sostituisco le eq. param. di r nell'eq. cartes. di π' : $(2 - z) - (-z) = 0 \rightarrow z = 1 \rightarrow Q' = (\frac{1}{3}, 1, 1)$

$$d(Q, r) = d(Q, Q') = \frac{2}{3}$$

2) a) Osservo che: $F(1, 0, -1) = \frac{1}{2}(4, -4) = (2, -2)$. Inoltre:

$$F(1, 0, 0) = F\left(\frac{1}{2}((1, 0, -1) + (1, 0, 1))\right) = \frac{1}{2}((2, 4) + (2, -2)) = (2, 1)$$

$$F(0, 1, 0) = F(-(0, -1, 0)) = (0, -1)$$

$$F(0, 0, 1) = F((1, 0, 1) - (1, 0, 0)) = (2, 4) - (2, 1) = (0, 3)$$

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $\ker F: \begin{cases} 2x = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases} \rightarrow \ker F = L((0, 3, 1))$ base di $\ker F = \{(0, 3, 1)\}$

$\text{Im } F = \mathbb{R}^2 \rightarrow$ base di $\text{Im } F = \{(1, 0), (0, 1)\}$ o qualunque altra base di $\mathbb{R}^2$. ①

(v1)

3) a) Per il criterio di Sylvester, A è def.ta pos. se e solo se i suoi minori principali hanno determ. positivo;

$$\begin{cases} 1 > 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{vmatrix} > 0 \\ \det A > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4 - k^2 > 0 \\ (4 - k^2)(k - 1) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4 - k^2 > 0 \\ k - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -2 < k < 2 \\ k > 1 \end{cases} \rightarrow \underline{1 < k < 2}$$

b) Il polinomio caratt. di A è

$$\Delta_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -k & 0 \\ -k & 4 & 0 \\ 0 & 0 & t-k+1 \end{vmatrix} = (4(t-1) - k^2)(t-k+1)$$

La matrice A ha autovalore 1 se e solo se $\Delta_A(1) = 0$,

cioè se e solo se:

$$(4(1-1) - k^2)(1 - k + 1) = 0 \rightarrow -k^2(k-2) = 0$$

$$\text{ovvero: } \underline{k = 2 \vee k = 0}$$

1) a) Sistema $\begin{cases} \pi: (k-1)x + 2y - z = -1 \\ r: 2x + (k-3)y = -2 \\ z = 0 \end{cases} \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} k-1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & k-3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$

$$\det A = (k-1)(k-3) - 4 + k - 3 = k^2 - 3k - 4 = (k-4)(k+1)$$

$\det A \neq 0 \iff k \neq 4 \wedge k \neq -1 \implies \pi \text{ e } r \text{ secanti.}$

$k = 4 \rightarrow B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{a' - 3a^3 \\ a^2 - 2a^3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$

$\rho(A) = 2 < \rho(B) = 3 \rightarrow r \parallel \pi, r \cap \pi = \emptyset$

$k = -1 \rightarrow B = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{a' + 2a^3 \\ a^2 - 2a^3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$

$\rho(A) = 2 < \rho(B) = 3 \rightarrow r \parallel \pi, r \cap \pi = \emptyset$

b) $\pi: -2x + 2y - z + 1 = 0$; $Q = (1, -1, 1)$

$d(\pi, Q) = \frac{|-2 - 2 - 1 + 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{4}{3}$ ortog

$d(r, Q) = d(Q', Q)$, con Q' proiezione di Q su r .

$r: \begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ x + z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2y - 1 = 2\alpha - 1 \\ y = \alpha \\ z = -2\alpha + 1 \end{cases}, (p, m, n) = (2, 1, -2)$

Il piano π' per Q e $\perp r \implies \pi': 2x + y - 2z = -1$

Intersezione $\pi' \cap r$: sostituisco nelle eq param. di r nelle eq cart.

di π' : $2(2\alpha - 1) + \alpha - 2(-2\alpha + 1) = -1 \rightarrow 9\alpha = 3 \rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$

$Q' = (-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$, $d(Q, Q') = \sqrt{(\frac{4}{3})^2 + (\frac{4}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2} = \sqrt{\frac{36}{9}} = 2$

2) a) $F(1, 0, 0) = F(\frac{1}{2}((1, 0, -1) + F(1, 0, 1))) = \frac{1}{2}((8, 2) + (2, 2)) = (5, 2)$

$F(0, 1, 0) = F(-\frac{1}{3}(0, -3, 0)) = (0, -2)$

$F(0, 0, 1) = F((1, 0, 1) - (1, 0, 0)) = (2, 2) - (5, 2) = (-3, 0)$

$\implies A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\ker F: \begin{cases} 5x - 3z = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \ker F = L(\underbrace{(3, 3, 5)}_{\text{base}})$

$\text{Im } F = \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{base}: ((1, 0), (0, 1))$ o qualunque base di $\mathbb{R}^2$.

3) a) A non è def. ta neg per alcun valore di k: se così fosse, per il criterio di Sylvester i minori princip. dispari dovrebbero essere negativi; ma già il primo è $1 > 0$.

b) Il polin. caratt. di A è

$$\Delta_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -k & 0 \\ -k & t-9 & 0 \\ 0 & 0 & t-2+k \end{vmatrix} = ((t-1)(t-9) + k^2)(t-2+k).$$

La matrice A ha autovalore -2 se e solo se $\Delta_A(-2) = 0$,
cioè se e solo se:

$$((-2-1)(-2-9) - k^2)(-2-2+k) = 0$$

$$(33 - k^2)(k - 4) = 0$$

ovvero se e solo se: $k = 4 \vee k = \pm \sqrt{33}$.