Nome e cognome .... **N. Matr.** ....

Quarto appello di Geometria e Algebra t (v1)
21/06/2011

Rispondere UNICAMENTE su questi fogli, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).*

---

1) Siano $\rho : 3x + y - z + 2 = 0$ e $\tau : y - z = 0$ due piani dello spazio euclideo tridimensionale.

a) Si determini l'equazione della retta parallela a ρ e τ passante per il punto $P = (1, -1, -2)$. *(3 punti)*

b) Si determini la distanza tra tale retta e uno dei due piani, a scelta del candidato. *(3 punti)*

2) Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ definito da:

$$f(x, y, z) = (-2x + y + z, -x + z, -x + y).$$

a) Si determini la matrice A canonicamente associata ad f. Si dimostri che f è diagonalizzabile e si determinino una matrice invertibile P e una diagonale D tali che $A = P^{-1} \times D \times P$. *(3 punti)*

b) Si verifichi per l'endomorfismo f la formula della dimensione per trasformazioni lineari. *(3 punti)*

c) Scegliere una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ diversa dalla base canonica, che non sia base spettrale e che contenga una base del nucleo di f e scrivere la matrice associata ad f rispetto a questa base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$. *(3 punti)*

3) Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare definita da

$$\phi((x, y, z); (x', y', z')) = 4xx' + 2xy' + 2x'y + 2yy' - zz'.$$

Stabilire se ϕ è un prodotto scalare, giustificando bene la risposta.*(3 punti)*

Nome e cognome .... **N. Matr.** ....

Quarto appello di Geometria e Algebra t (v2)
21/06/2011

***Rispondere UNICAMENTE su questi fogli**, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).*

---

1) Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ definito da:

$$f(x, y, z) = (-x - 2y - 4z, -3x - 6y - 10z, 2x + 4y + 7z).$$

a) Si studi la diagonalizzabilità di f. *(3 punti)*

b) Si determinino le equazioni cartesiane di $Ker(f) + U$, dove U è un autospazio di f a scelta del candidato. *(3 punti)*

c) Determinare una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico) dell'autospazio U. *(3 punti)*

2) Siano $S_j = \{(1, 2, 1), (0, j, 1), (0, 1, 2)\}$ e $T = \{(3, 1, 2), (0, 1, 0), (2, -1, 1)\}$ due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$.

a) Stabilire per quali valori di j il sottospazio vettoriale $W_j = L(S_j)$ è diverso da $\mathbb{R}^3$. *(3 punti)*

b) Si ponga $j = 1$. Dopo aver verificato che T è una base per $\mathbb{R}^3$, scrivere la matrice di passaggio

$$M_T^{S_1}(id)$$

dalla base S_1 alla base T. *(3 punti)*

3) Si consideri la forma quadratica, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$q(x, y, z) = x^2 + 2\alpha xz + y^2 + z^2.$$

Trovare la segnatura della forma quadratica q, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. *(3 punti)*

Nome e cognome .... **N. Matr.** ....

Quarto appello di Geometria e Algebra t (v3)
21/06/2011

Rispondere UNICAMENTE su questi fogli, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).*

---

1) Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare definita da

$$\phi((x, y, z); (x', y', z')) = 4xx' + 2xy' + 2x'y + 2yy' + zz'.$$

Stabilire se ϕ è un prodotto scalare, giustificando bene la risposta.*(3 punti)*

2) Siano $\rho : -x + 3y + z = 0$ e $\tau : x - z = 0$ due piani dello spazio euclideo tridimensionale.

a) Si determini l'equazione della retta parallela a ρ e τ passante per il punto $P = (1, -1, -2)$. *(3 punti)*

b) Si determini la distanza tra tale retta e uno dei due piani, a scelta del candidato. *(3 punti)*

3) Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ definito da:

$$f((x, y, z)) = (x + 4y, -y, -2y + z).$$

a) Si determini la matrice A canonicamente associata ad f. Si dimostri che f è diagonalizzabile e si determinino una matrice invertibile P e una diagonale D tali che $A = P^{-1} \times D \times P$. *(3 punti)*

b) Si verifichi per l'endomorfismo f la formula della dimensione per trasformazioni lineari. *(3 punti)*

c) Scegliere una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ diversa dalla base canonica, che non sia base spettrale e che contenga una base del nucleo di f e scrivere la matrice associata ad f rispetto a questa base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$. *(3 punti)*

Nome e cognome .... **N. Matr.** ....

Quarto appello di Geometria e Algebra t (v4)
21/06/2011

Rispondere UNICAMENTE su questi fogli, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).*

---

1) Siano $S_j = \{(1,2,1),(0,j,1),(0,1,2)\}$ e $T = \{(3,1,2),(0,1,0),(2,-1,1)\}$ due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$.

a) Stabilire per quali valori di j il sottospazio vettoriale $W_j = L(S_j)$ è diverso da $\mathbb{R}^3$. *(3 punti)*

b) Si ponga $j = 1$. Dopo aver verificato che T è una base per $\mathbb{R}^3$, scrivere la matrice di passaggio

$$M_T^{S_1}(id)$$

dalla base S_1 alla base T. *(3 punti)*

2) Si consideri la forma quadratica, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$q(x,y,z) = x^2 + 2\alpha xz + y^2 + z^2$$

Trovare la segnatura della forma quadratica q al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. *(3 punti)*

3) Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ definito da:

$$f((x,y,z)) = (-z, -3x + 3y - z, -3z)$$

a) Si studi la diagonalizzabilità di f. *(3 punti)*

b) Si determinino le equazioni cartesiane di $Ker(f) + U$, dove U è un autospazio di f a scelta del candidato. *(3 punti)*

c) Determinare una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare canonico) del sottospazio vettoriale trovato in b). *(3 punti)*