(v1)

Nome e cognome .... **Num. Matr.** ....

Geometria e Algebra t
21/06/2011

Marcare con una ***crocetta*** *su* **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di* $1/2$ *punto se l'indicazione è esatta,* $-1/2$ *punto se è errata,* 0 *in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1. Il seguente sottoinsieme di vettori di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente:

F **V** a) $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$.

F **V** b) $\{(1,2,1),(1,-2,1)\}$.

F **V** c) $\{(0,2,0),(1,0,1),(2,3,2)\}$.

F **V** d) $\{(3,1,1),(0,-1,1),(0,-3,1),(10,3,20)\}$.

2. Il sottoinsieme U è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale V, con

F **V** a) $V=\mathbb{R}^3$ e $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2y=3z+1\}$

F **V** b) $V=\mathbb{R}[t]$ e $U=\{p(t)\in\mathbb{R}[t] \mid p(1)=p(0)\}$

F **V** c) $V=\mathbb{R}^4$ e $U=\{(1,1,x,y)\in\mathbb{R}^4 \mid x,y\in\mathbb{R}\}$

F **V** d) $V=M_2(\mathbb{R})$ e $U=\{A\in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}({}^tA)=0\}$

3. Sia $G: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una trasformazione lineare.

F **V** a) G non può essere un isomorfismo.

F **V** b) G non è mai iniettiva.

F **V** c) $\dim(\operatorname{Im} G)=3$.

F **V** d) Se $G\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=(0,0,0)$, allora $\dim(\ker G)\geq 2$.

4. La seguente applicazione T è lineare:

F **V** a) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, con $T(x_1,x_2)=x_1x_2$.

F **V** b) $T: M_2(\mathbb{R})\to M_{3,1}(\mathbb{R})$, con $T\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\ b-c\\ d-a\end{pmatrix}$.

F **V** c) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, con $T(x,y)=(x+y,y-x)$.

F **V** d) $T:\mathbb{R}\to M_2(\mathbb{R})$, con $T(x)=\begin{pmatrix}x & 3x\\ 0 & x^2\end{pmatrix}$.

5. Sia $S : AX = b$ un sistema lineare con A matrice dei coefficienti e b matrice dei termini noti. Sia poi $S_0 : AX = 0$ il sistema omogeneo associato. Allora

F **V** a) se S ha 4 equazioni e 2 incognite, allora è impossibile.

F **V** b) se S ha 4 incognite e il rango di A è 4, allora il sistema è compatibile.

F **V** c) se S è impossibile, lo è anche S_0.

F **V** d) se A è una matrice quadrata, allora S è determinato.

6. Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ e ϕ la forma bilineare simmetrica associata. Allora:

F **V** a) ϕ ha segnatura $(1, 1)$.

F **V** b) la forma quadratica associata è $q(x, y) = -x^2 - 4xy - 3y^2$.

F **V** c) ϕ è definita negativa.

F **V** d) A è congruente a $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che: $F(1, 0, 0) = (-2, 0, 0)$, $F(10, 0, 1) = (10, 0, 1)$, $F(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$ e A una matrice di F rispetto a qualche base di $\mathbb{R}^3$. Allora

F **V** a) F è diagonalizzabile.

F **V** b) F ammette una base spettrale ortonormale.

F **V** c) uno degli autospazi di F ha dimensione 2.

F **V** d) F ha solo 2 autovalori.

8. Le seguenti equazioni sono quelle di un sottospazio euclideo di $\mathbb{R}^4$ di dimensione minore o uguale a 2 (oppure dell'insieme vuoto):

F **V** a) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$

F **V** b) $\begin{cases} x_1 = 6t + u - 1 \\ x_2 = -t + 3u \\ x_3 = t + u + 3 \\ x_4 = 4 \end{cases}$ (con $t, u \in \mathbb{R}$).

F **V** c) $x_1 = 20$.

F **V** d) $\begin{cases} x_1 = -\alpha + \beta + 3\gamma - 1 \\ x_2 = \alpha - \beta - 3\gamma + 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 3\alpha - 3\beta + 9\gamma - 2 \end{cases}$ (con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

9. Sia π un piano e r una retta dello spazio euclideo tridimensionale.

F **V** a) Se π è parallelo a r, esso non contiene alcuna retta sghemba con r.

F **V** b) Se π e r si intersecano in un unico punto, esistono infiniti piani paralleli a π e secanti r.

F **V** c) Se π e r sono ortogonali, esiste un solo piano contenente r e ortogonale a π.

F **V** d) Se r e π hanno più di un punto in comune, allora $r \subset \pi$.

(v2)

Nome e cognome .... **Num. Matr.** ....

Geometria e Algebra t
21/06/2011

Marcare con una **crocetta** *su* **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di* 1/2 *punto se l'indicazione è esatta,* −1/2 *punto se è errata,* 0 *in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1. Il seguente sottoinsieme di vettori di $\mathbb{R}^3$ è un sistema di generatori:

F **V** a) $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$.

F **V** b) $\{(1,2,1),(1,-2,1)\}$.

F **V** c) $\{(0,2,0),(1,0,1),(2,3,2)\}$.

F **V** d) $\{(3,1,1),(0,-1,1),(0,-3,1),(10,3,20)\}$.

2. Il sottoinsieme U è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale V, con

F **V** a) $V=\mathbb{R}^3$ e $U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x=3z\}$

F **V** b) $V=\mathbb{R}[t]$ e $U=\{p(t)\in\mathbb{R}[t] \mid p(1)=p(0)-1\}$

F **V** c) $V=\mathbb{R}^4$ e $U=\{(x,0,0,x+2y)\in\mathbb{R}^4 \mid x,y\in\mathbb{R}\}$

F **V** d) $V=M_2(\mathbb{R})$ e $U=\{A\in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A-1=0\}$

3. Sia $G:\mathbb{R}^3 \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ una trasformazione lineare.

F **V** a) G può essere un isomorfismo.

F **V** b) G è sempre iniettiva.

F **V** c) $\dim \mathrm{Im} G \leq 3$.

F **V** d) Se $G(1,1,1)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, allora $\mathrm{Im} G\leq 2$.

4. La seguente applicazione T è lineare:

F **V** a) $T: M_2(\mathbb{R})\to M_{3,1}(\mathbb{R})$, con $T\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+1\\b-2\\d-3\end{pmatrix}$.

F **V** b) $T:\mathbb{R}\to M_2(\mathbb{R})$, con $T(x)=\begin{pmatrix}x&3x\\0&x\end{pmatrix}$.

F **V** c) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, con $T(x,y)=(x+2y,2y-x)$.

F **V** d) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, con $T(x_1,x_2)=4x_1-x_2$.

5. Sia $S : AX = b$ un sistema lineare con A matrice dei coefficienti e b matrice dei termini noti. Sia poi $S_0 : AX = 0$ il sistema omogeneo associato. Allora

F **V** a) se S ha 2 equazioni e 4 incognite, allora ha infinite soluzioni.

F **V** b) se S ha 4 incognite e il rango di A è 4, allora il sistema non è compatibile.

F **V** c) se S_0 è determinato, lo è anche S.

F **V** d) se A non è una matrice quadrata, allora S è indeterminato.

6. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ e ϕ la forma bilineare simmetrica associata. Allora:

F **V** a) ϕ ha segnatura $(1, 1)$.

F **V** b) la forma quadratica associata è $q(x, y) = x^2 - 2xy + 5y^2$.

F **V** c) ϕ è definita positiva.

F **V** d) A è congruente a $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che: $F(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$, $F(10, 1, 0) = (10, 1, 0)$, $F(1, -10, 0) = (0, 0, 0)$ e A una matrice di F rispetto a qualche base di $\mathbb{R}^3$. Allora

F **V** a) F non è diagonalizzabile.

F **V** b) F ammette una base spettrale ortonormale.

F **V** c) uno degli autospazi di F ha dimensione 2.

F **V** d) F ha solo 2 autovalori.

8. Le seguenti equazioni sono quelle di un sottospazio euclideo di $\mathbb{R}^4$ di dimensione maggiore o uguale a 2:

F **V** a) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$

F **V** b) $\begin{cases} x_1 = 6t + u - 1 \\ x_2 = -t + 3u \\ x_3 = t + u + 3 \\ x_4 = 4 \end{cases}$ (con $t, u \in \mathbb{R}$)

F **V** c) $x_1 = 20$.

F **V** d) $\begin{cases} x_1 = -\alpha + \beta + 3\gamma - 1 \\ x_2 = \alpha - \beta - 3\gamma + 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 3\alpha - 3\beta + 9\gamma - 2 \end{cases}$ (con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

9. Sia π un piano e r una retta dello spazio euclideo tridimensionale.

F **V** a) Se π contiene r, esso non contiene alcuna retta sghemba con r.

F **V** b) Se π e r non si intersecano, esistono infiniti piani paralleli a π e secanti r.

F **V** c) Se π e r sono paralleli, esiste un solo piano contenente r e ortogonale a π.

F **V** d) Se r e π hanno un punto in comune, allora $r \subset \pi$.