

1) a) la retta r è l'intersezione dei piani ρ' parallelo a ρ e passante per P ,
e τ' , parallelo a τ e passante per P :

$$\rho' \parallel \rho \rightarrow \rho': 3x + y - z + d = 0 \quad \left| \rightarrow \rho': 3x + y - z - 4 = 0 \right.$$

$$P \in \rho' \rightarrow 3 \cdot 1 + (-1) - (-2) + d = 0 \rightarrow d = -4$$

$$\tau' \parallel \tau \rightarrow \tau': y - z + d' = 0 \quad \left| \rightarrow \tau': y - z - 1 = 0 \right.$$

$$P \in \tau' \rightarrow -1 - (-2) + d' = 0 \rightarrow d' = -1$$

Quindi: $r: \begin{cases} 3x + y - z - 4 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} 0 \text{ sistemi} \\ \text{equivalenti} \end{array} \right)$

$$1) b) d(P, \rho) = d(P, \rho') = \frac{|3 \cdot 1 + (-1) + (-2) + 4|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{11}}$$

$$d(r, \tau) = d(P, \tau) = \frac{|-1 - (-2)|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2) a) $A \in M_3(\mathbb{R})$, deve essere tale che $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + y + z \\ -x + z \\ -x + y \end{pmatrix}$
per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$. Quindi:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il polin. caratt. di A è $\Delta_A(t) = \det(tI - A) = \begin{vmatrix} t+2 & -1 & -1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} =$
 $\stackrel{C_1}{=} (t+2)(t^2-1) + (t+1) + (t+1) = t(t+1)^2$

Autovalori:

Autospazi

$$\lambda_1 = 0$$

$$U_0 = \ker f = L((1, 1, 1)) \quad \text{mg}(0) = 1$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$U_{-1} = L((1, 1, 0), (1, 0, 1)) \quad \text{mg}(-1) = 2$$

$\rightarrow \sum \text{mg}(\lambda_i) = 3 \rightarrow f$ diagonal.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad P = (P^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2) b) \text{Im } f = L\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ perche' } \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $\dim(\text{Im } f) = 2 \rightarrow \dim(\text{Im } f) + \dim(\ker f) = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

2c) Una possibile base B era: $B = ((1, 1, 1); (0, 1, 0), (0, 0, 1))$

$$f(1, 1, 1) = 0 = 0(1, 1, 1) + 0(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1)$$

$$f(0, 1, 0) = (1, 0, 1) = 1 \cdot (1, 1, 1) + (-1)(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1)$$

$$f(0, 0, 1) = (1, 1, 0) = 1 \cdot (1, 1, 1) + 0(0, 1, 0) + (-1)(0, 0, 1)$$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3) Se $A := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ è la matrice canonica.

associata a ϕ , cioè: $\phi((x, y, z), (x', y', z')) = (x, y, z) A \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$,

allora ϕ è un prodotto scalare se

- è non degenere, cioè $\det A \neq 0$. Ma $\det A = -4 \neq 0$.
- è definita positiva. Ciò è falso: se A fosse defn. positiva, i suoi minori principali dovrebbero avere determinante > 0 (crit. di Sylvester) mentre $\det A < 0$.

Quindi ϕ non è un prodotto scalare.

1a) La matrice di f rispetto alla base can. di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -3 & -6 & -10 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Il polin. caratt di A : $\Delta_A(t) = \begin{vmatrix} t+1 & 2 & 4 \\ 3 & t+6 & 10 \\ -2 & -4 & t-7 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Laplace} \\ 1^{\text{a}} \text{ riga} \end{pmatrix}$

$$= (t+1)(t^2 - t - 2) - 2(3t - 21 + 20) + 4(-12 + 2t + 12)$$

$$= (t+1)(t^2 - t - 2) - 6t + 2 + 8t$$

$$= (t+1)t(t-1)$$

Gli autovalori sono 3, distinti: 0, 1, -1. $\rightarrow f$ è diagonal.

Calcol. gli autospazi:

$$\lambda_1 = 0 \rightarrow U_0 = \text{Ker } f = L(2, -1, 0)$$

$$\lambda_2 = 1 \rightarrow U_1 \text{ è soluz. del sist. di matrice } A - I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ -3 & -7 & -10 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

che si riduce con trasf. elem. di riga a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow U_1 = L(1, 1, -1)$$

$$\lambda_3 = -1 \rightarrow U_{-1} \text{ è soluz. del sist. di matr } A + I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -3 & -5 & -10 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

che si riduce con t.el. di riga a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow U_{-1} = L(0, 2, 1)$$

1) b) • Se $U = U_0 \rightarrow U + \text{Ker } f = \text{Ker } f = L(2, -1, 0)$

Eg. cartes: $\text{rango} \begin{pmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x & z \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

• Se $U = U_1 \rightarrow \text{Ker } f + U = L((2, -1, 0), (1, 1, -1))$

Eg. cartes: $\text{rango} \begin{pmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \underline{x + 2y + 3z = 0}$

• Se $U = U_{-1} \rightarrow \text{Ker } f + U = L((2, -1, 0), (0, 2, 1))$

Eg. cartes: $\text{rango} \begin{pmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \underline{-x - 2y + 4z = 0}$

1) c) Se $V = V_0 = L(2, -1, 0)$ una base orton. di V

o vetor $\frac{(v)_{\text{com}}}{v} = \frac{(2, -1, 0)}{\|(2, -1, 0)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} (2, -1, 0)$.

$$\text{So } U = U_1 \rightarrow v = \frac{(1, 1, -1)}{\|(1, 1, -1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, -1)$$

$$\text{Se } U: U_{-1} \rightarrow v = \frac{(0, 2, 1)}{\|(0, 2, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, 1)$$

2) a) $W_j = L(S_j) \neq \mathbb{R}^3$ se e solo se S_j non è una base, cioè se i suoi vett. sono lin. dipendenti, ovvero se

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & j & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \iff 2j - 1 = 0 \iff j = \frac{1}{2}$$

2 b) Scrivo $M_T^{S_1}$ per $M_T^{S_1}(\text{id})$. Allora $M_T^{S_1} = M_T^B \cdot M_B^{S_1}$, dove

$B = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ è la base nat. di $\mathbb{R}^3$. Si ha:

$$M_{\mathcal{B}}^{S_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad M_{\mathcal{B}}^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_T^{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}^T)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Quindi $M_T^{S_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -9 \\ -1 & -3 & -6 \end{pmatrix}$

3) La matrice can. associata a q è $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il polin.

caract $\Delta_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -\alpha \\ 0 & t-1 & 0 \\ -\alpha & 0 & t-1 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{\text{Laplace} \\ 2^{\text{e}} \text{ col}}}{=} \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (t-1)((t-1)^2 - \alpha^2)$
 $= (t-1)(t-1-\alpha)(t-1+\alpha)$

Gli autoval. di A sono: $1, 1+\alpha, 1-\alpha$. Ne studio il segno al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

$\begin{array}{c|cc|cc|c} & -1 & & 1 & & \\ \hline 1 & + & & + & & + \\ 1+\alpha & - & \bigcirc & + & & + \\ 1-\alpha & + & & + & \bigcirc & - \end{array}$

Di conseguenza: $\sigma = \begin{cases} (2, 1) & \text{per } \alpha < -1 \text{ o } \alpha > 1 \\ (3, 0) & \text{per } -1 < \alpha < 1 \\ (2, 0) & \text{per } \alpha = \pm 1 \end{cases}$