Commento alle soluzioni dei quiz
Esame di Geometria e Algebra del 24 febbraio 2011

Versione 00101

1) Il seguente sottoinsieme di vettori di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente:

   a) $\{(1,2,1),(0,1,1),(2,3,1)\}$.
   b) $\{(1,2,1),(0,1,0)\}$.
   c) $\{(0,2,0),(1,0,1),(1,0,-1)\}$.
   d) $\{(1,2,1),(0,1,1),(0,3,1),(1,3,2)\}$.

   Soluzione: FVVF

   $(2,3,1)-2(1,2,1)=(0,-1,-1)=-(0,1,1)$, quindi $\{(1,2,1),(0,1,1),(2,3,1)\}$ è l. d.

   Due vettori non proporzionali sono l. i., dunque (b) è V.

   in (c) gli ultimi due vettori sono l. i. perché non proporzionali, inoltre il primo non può essere c.l. degli altri due. Segue che il s.s.v. generato dai tre è $\mathbb{R}^3$, quindi essi sono l.i.

   $\mathbb{R}^3$ è uno spazio di dimensione 3 (su $\mathbb{R}$). Quattro vettori sono necessariamente l.d., perciò (d) è F.

2) La seguente applicazione T è lineare:

   a) $T: M_2(\mathbb{R}) \to M_{2,1}(\mathbb{R})$, con $T\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\big) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.
   b) $T: M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, con $T\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\big) = (a+d)^2$.
   c) $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $T(x) = x-3$.
   d) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $T(x_1,x_2) = x_1 - x_2$.

   Soluzione: VFFV

   Un semplice controllo basta per verificare che le T in (a) e (d) sono lineari. Ricordo che ciò significa che $T(a_1v_1 + b_2v_2) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2)$ per ogni v_1, v_2 vettori nel dominio di T e a_1, a_2 scalari (nel nostro caso, numeri reali).

   Nel caso di (a): supponiamo che $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ e $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$. Allora, $T\big(a_1\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) + a_2\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)\big) = T\big(\left(\begin{smallmatrix} a_1a+a_2a' & a_1b+a_2b' \\ a_1c+a_2c' & a_1d+a_2d' \end{smallmatrix}\right)\big) = \begin{pmatrix} a_1c + a_2c \\ a_1d + a_2d' \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix} = a_1T\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\big) + a_2T\big(\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)\big)$.

   Il caso (d) è simile e più semplice.

   Le applicazioni in (b) e (c) non sono lineari. Per dimostrarlo nel caso (b) basta trovare una matrice A per cui $T(2A) \neq 2T(A)$. In effetti basta qualunque matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ con $a+d \neq 0$, perché risulti $T(2A) = 4T(A) \neq 2T(A)$.

   Nel caso (c) basta osservare che se T fosse lineare, $T(0)$ dovrebbe essere uguale a 0, mentre $T(0) = -3$.

3) Sia $S: AX = b$ un sistema lineare con $A \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$ matrice dei coefficienti e $b \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$ matrice dei termini noti. Sia poi $S_0: AX = 0$ il sistema omogeneo associato. Allora

   a) se X e X' sono soluzioni di S, anche $X - X'$ è una soluzione di S.
   b) se $rango(A) = 4$, allora il sistema è compatibile.
   c) se X è una soluzione di S e X' è una soluzione di S_0, allora $X + X'$ è una soluzione di S_0.
   d) $X = (0)$ (la 5-pla nulla) è una soluzione di S se e solo se $b = (0)$.

   Soluzione: FVFV

   (a) Se X e X' sono soluzioni di S, allora $AX = b$ e $AX' = b$. Sottraendo le equazioni membro a membro, si ha: $AX - AX' = b - b \to A(X - X') = 0$. Se $b \neq 0$ $X - X'$, non è soluzione di S..

   (b) Poiché $A \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$, il rango di B non può essere che 4, dunque, per il Teor. di Rouché-Capelli, il sistema è compatibile.

   (c) Ragionare come in (a).

   (d) Osservare che $A(0) = (0)$.

4) La forma bilineare simmetrica ϕ su $\mathbb{R}^2$ è definita come segue:
$\phi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 5y_1y_2$.

a) ϕ ha segnatura $(1, 1)$.
b) La forma quadratica associata a ϕ è $q(x, y) = x^2 - 4xy - 5y^2$.
c) ϕ è definita negativa.
d) La matrice di ϕ è congruente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Soluzione: VVFV

(a) La matrice associata alla forma bilineare è $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$, che ha polinomio caratteristico $\Delta_A(t) = t^2 + 4t - 9$. I coefficienti presentano una variazione, e il termine noto è non nullo, perciò $\sigma_A = (1, 1)$.

(b) $q(x, y) = \phi((x, y), (x, y))$.

(c) Se ϕ fosse definita negativa, la segnatura di A sarebbe $(0, 2)$.

(d) Due matrici simmetriche sono congruenti se e solo se hanno la stessa segnatura.

5) Sia π un piano dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, perpendicolare alla retta r, e P un punto non contenuto in r. Allora

a) esiste un solo piano parallelo a π, ortogonale a r e passante per P.
b) esiste un solo piano contenente r e ortogonale a π.
c) se un piano contiene r, esso è ortogonale a π.
d) se s è una retta sghemba con r, allora s non è contenuta in π.

Soluzioni: VFVF

(a) Esiste un solo piano parallelo a π e passante per P: è quello che ha la stessa giacitura di π. Esso è necessariamente ortogonale a r perché tale è π.

(b) e (c) Ogni piano α contenente r è ortogonale a π. Infatti la direzione ortogonale a α è contenuta nella giacitura di π, quindi è ortogonale alla direzione ortogonale a π.

(d) Ogni retta s contenuta in π, se non interseca r, è sghemba con r, perché la direzione di s è contenuta nel complemento ortogonale di quella di r.

6) Siano U e V sottospazi vettoriali, di dimensione 3 e 4 rispettivamente, di uno spazio vettoriale di dimensione n. Se $U \cap V = (0)$ allora:

a) $n = 7$.
b) $n \leq 7$.
c) $n \geqslant 7$.
d) $3 \leq n$ e $4 \leq n$.

Soluzioni: FFVV

La formula di Grassmann ci dice che $\dim(U+V) = \dim(u) + \dim(V) - \dim(U \cap V) = 3+4-0 = 7$. Quindi: $n \geq 7$, e la (c) è V.

Cosa implica che $n \geq 7$? Implica che $n > 4$, e quindi $n > 3$: anche (d) è V.

D'altra parte, n può essere strettamente maggiore di 7, e quindi (a) e (b) sono F.

7) Le seguenti equazioni sono quelle di un retta nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

a) $\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 = t + 6u - 1 \\ x_2 = -2t + 3u \\ x_3 = 3t + 3u + 1 \\ x_4 = -t - 3u + 4 \end{cases}$ (con $t, u \in \mathbb{R}$)

c) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$.

d) $\begin{cases} x_1 = \alpha - \frac{1}{2}\beta + 3\gamma - 1 \\ x_2 = -\alpha + \frac{1}{2}\beta - 3\gamma + 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 3\alpha + \frac{3}{2}\beta + 9\gamma - 2 \end{cases}$ (con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

Soluzioni: FFVF.

Una retta è un sottospazio euclideo di dimensione 1.

Conoscendo le equazioni cartesiane di un sottospazio, come in (a) e (c), la dimensione si può dedurre dal rango delle matrici completa e incompleta del sistema. In (a) il rango dell'incompleta è 1, quello della completa 2, quindi il sistema non ha soluzioni. In (c) invece i due ranghi sono uguali a 3, quindi la dimensione è 4-3=1.

Se invece le equazioni sono parametriche, si riesce facilmente a trovare un sistema di generatori per la giacitura, separando i parametri. Nel caso (b) la giacitura è generata da $(1, -2, 3, -1)$ e $(6, 3, 3, -3)$. Tali vettori sono l.i. quindi la giacitura ha dimensione 2: il sottospazio è un piano. Nel caso (d) un sistema di generatori della giacitura è dato da $\{(1, -1, 0, 3), (-1/2, 1/2, 0, 3/2), (3, -3, 0, 9)\}$, perciò essa ha dimensione 2: anche in questo caso il sottospazio è un piano.

8) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 6 e $F : V \longrightarrow V$ un endomorfismo di V. F è diagonalizzabile se

   a) ha un autovalore con molteplicità algebrica e geometrica uguali a 6.
   b) ha un autospazio di dimensione 5.
   c) il polinomio caratteristico è $P_F(\lambda) = (\lambda^3 - 1)(\lambda - 1)^3$.
   d) per ogni autovalore λ di F si verifica $1 \leq MoltGeo(\lambda) \leq MoltAlg(\lambda) \leq \dim V$.

   Soluzioni: VFFF

   (a) Se un autovalore λ ha molteplicità 6, allota $F(v) = 6v$ per ogni $v \in V$, dunque la matrice di F è diagonale (anzi, scalare) rispetto ad ogni base di V.

   (b) Se una matrice di F è $\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$, allora il $\ker F$ è un autospazio (relativo all'autovalore 0) di dimensione 5, e non ci sono altri autovalori, perché il polinomio caratteristico è $\Delta_A(t) = t^6$.

   (c) Osserviamo che $P_F(\lambda) = (\lambda^2 + \lambda + 1)(\lambda - 1)^4$. Poiché il polinomio $\lambda^2 + \lambda + 1$ è irriducibile, c'è un solo autovalore di molteplicità algebrica 4, mentre lo spazio ha dimensione 6.

   (d) La condizione è necessaria per la diagonalizzabilità, ma non sufficiente: se la somma delle molteplicità è minore di 6, F non è diagonalizzabile. Vedi anche il punto (c).

9) Sia $G : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ una trasformazione lineare.

   a) G può essere un isomorfismo.
   b) Se G è iniettiva allora G è suriettiva.
   c) Se $\dim(\ker G) = 2$ allora $\dim(\operatorname{Im} G) \leq 3$.
   d) Se $G(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0&0\\0&0 \end{smallmatrix}\right)$ allora $\operatorname{Im} G \neq M_2(\mathbb{R})$.

   Soluzioni: VVVV

   (a) La dimensione dei due spazi vettoriali $G : \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$ e $M_2(\mathbb{R})$ è 4: questo basta per dire che esiste un isomorfismo tra di essi.

   (b) Se G è iniettiva, $\ker G = (0)$. Per l'equazione dimensionale:

   $\dim(\operatorname{Im} G) = \dim(\mathbb{R}[t]_{\leq 3}) - \dim(\ker G) = 4 - 0 = 4.$

   Dunque G è suriettiva.

   (c) Se $\dim(\ker G) = 2$ allora, sempre per l'equazione dimensionale, $\dim(\operatorname{Im} G) = 4 - 2 = 2 \leq 3$.

   (d) Se $G(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0&0\\0&0 \end{smallmatrix}\right)$, allora $t \in \ker G$, quindi $\dim(\ker G) \geq 1$. Di conseguenza $\dim(\operatorname{Im} G) < 4$.

Versione 00110

1) Siano U e V sottospazi vettoriali, di dimensione 2 e 4 rispettivamente, di uno spazio vettoriale di dimensione n. Se $U \cap V = (0)$ allora:

   a) $3 \leq n$ e $4 \leq n$.
   b) $n = 6$.
   c) $n \leq 6$.
   d) $n \geqslant 7$.

   Soluzioni: VFFF

   La formula di Grassmann ci dice che $\dim(U+V) = \dim(u) + \dim(V) - \dim(U \cap V) = 2+4-0 = 6$. Quindi: $n \geq 6$.

   Cosa implica che $n \geq 6$? Implica che $n > 4$, e quindi $n > 3$: (a) è V.

   D'altra parte, n può essere strettamente maggiore di 6, e quindi (b) e (c) sono F, oppure può essere uguale a 6, e quindi (d) è F.

2) Sia $G : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ una trasformazione lineare.

   a) Se $\operatorname{Im} G = L(\{\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\})$ allora il rango di una matrice associata a G è 1.
   b) G può essere iniettiva ma non suriettiva.
   c) Se $\dim(\operatorname{Im} G) = 2$ allora $\dim(\ker G) \geq 2$.
   d) G può non essere un isomorfismo.

   Soluzioni: VVVV

   (a) Il rango di una matrice associata a una trasformazione lineare è uguale alla dimensione dell'immagine, che in questo caso è 1.

   (b) Se G è iniettiva, $\ker G = (0)$. Per l'equazione dimensionale:

   $\dim(\operatorname{Im} G) = \dim(\mathbb{R}[t]_{\leq 3}) - \dim(\ker G) = 4 - 0 = 4$.

   Dunque G è deve anche essere suriettiva.

   (c) Se $\dim(\operatorname{Im} G) = 2$ allora, sempre per l'equazione dimensionale, $\dim(\ker G) = 4 - 2 = 2 \geq 3$.

   (d) Se $G(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, allora G non è iniettiva, e quindi non è un isomorfismo.

3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 5 e $F : V \longrightarrow V$ un endomorfismo di V. F è diagonalizzabile se

   a) per ogni autovalore λ di F si verifica $1 \leq MoltGeo(\lambda) = MoltAlg(\lambda) \leq \dim V$.
   b) ha un autospazio di dimensione 5.
   c) il polinomio caratteristico è $P_F(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4)(\lambda - 5)$.
   d) ha un autovalore con molteplicità algebrica e geometrica uguali a 4.

   Soluzioni: FVVV

   (a) La condizione è necessaria per la diagonalizzabilità, ma non sufficiente: se la somma delle molteplicità è minore di 5, F non è diagonalizzabile.

   (b) Se un autovalore λ ha molteplicità 5, allota $F(v) = 6v$ per ogni $v \in V$, dunque la matrice di F è diagonale (anzi, scalare) rispetto ad ogni base di V.

   (c) L'endomorfismo ha 5 autovalori distinti, dunque ciascuno ha molteplicità algebrica uguale alla geometrica (uguale a 1), e la somma delle molteplicità è 5.

   (d) Se un autovalore λ_1 ha molteplicità algebrica 4, il polinomio cratteristico deve essere $(t-\lambda_1)^4(t-\lambda_2)$, con $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ un altro autovalore, necessariamente di molteplicità geometrica e algebrica 1.

4) La forma bilineare simmetrica ϕ su $\mathbb{R}^2$ è definita come segue:
   $\phi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5y_1y_2$.

   a) La matrice di ϕ è congruente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

b) ϕ ha segnatura $(1, 1)$.
c) La forma quadratica associata a ϕ è $q(x, y) = x^2 - 2xy + 5y^2$.
d) ϕ è definita positiva.

Soluzione: FFFV

La matrice associata alla forma bilineare è $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, che ha entrambi i minori principali positivi: per il criterio di Sylvester, A, e quindi ϕ, è definita positiva: (d) è V.

Due matrici simmetriche sono congruenti se e solo se hanno la stessa segnatura: (a) e (b) sono quindi false.

(c) La forma quadratica associata a ϕ è $q(x, y) = x^2 - 4xy + 5y^2$.

5) La seguente applicazione T è lineare:

a) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_{2,1}(\mathbb{R})$, con $T\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\big) = \begin{pmatrix} ac \\ bd \end{pmatrix}$.
b) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $T(x) = -3x$.
c) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, con $T\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\big) = a + b + c + d$.
d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $T(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Soluzione: FVVF

Un semplice controllo basta per verificare che le T in (b) e (c) sono lineari. Ricordo che ciò significa che $T(a_1v_1 + b_2v_2) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2)$ per ogni v_1, v_2 vettori nel dominio di T e a_1, a_2 scalari (nel nostro caso, numeri reali).

Nel caso di (c): supponiamo che $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ e $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$. Allora, $T\big(a_1\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) + a_2\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)\big) = T\big(\left(\begin{smallmatrix} a_1a+a_2a' & a_1b+a_2b' \\ a_1c+a_2c' & a_1d+a_2d' \end{smallmatrix}\right)\big) = a_1a + a_2a' + a_1b + a_2b' + a_1c + a_2c' + a_1d + a_2d' =$
$= a_1(a + b + c + d) + a_2(a' + b' + c' + d') = a_1T\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\big) + a_2T\big(\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)\big)$.

Il caso (b) è simile e più semplice.

Le applicazioni in (a) e (d) non sono lineari. Per dimostrarlo, nel caso (a) basta trovare una matrice A per cui $T(2A) \neq 2T(A)$. In effetti basta qualunque matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ con $ac \neq 0$, perché risulti $T(2A) = 4T(A) \neq 2T(A)$.

Nel caso (d) basta osservare che $T((-x, -y)) = T(x, y)$, mentre, se T fosse lineare, dovrebbe essere $T((-x, -y)) = -T(x, y)$.

6) Il seguente sottoinsieme di vettori di $\mathbb{R}^3$ è un sistema di generatori:

a) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (2, 3, 1)\}$.
b) $\{(0, 2, 0), (1, 0, 1), (1, 0, -1)\}$.
c) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 0)\}$.
d) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 3, 1), (1, 3, 2)\}$.

Soluzione: FVFV

(a) $(2, 3, 1) - 2(1, 2, 1) = (0, -1, -1) = -(0, 1, 1)$, quindi $\{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (2, 3, 1)\}$ è l. d: il sottospazio da esso generato ha dimensione 2.

in (b) gli ultimi due vettori sono l. i. perché non proporzionali, inoltre il primo non può essere c.l. degli altri due. Segue che il s.s.v. generato dai tre è $\mathbb{R}^3$.

$\mathbb{R}^3$ è uno spazio di dimensione 3 (su $\mathbb{R}$). Due vettori non sono sufficienti a generarlo, perciò (c) è F.

(d) I primi 3 vettori sono una base di $\mathbb{R}^3$, e quindi in particolare un s.g. Se aggiungiamo un vettore, l'insieme rimane un s.g.

7) Sia π un piano dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, parallelo alla retta r, e P un punto non contenuto in r. Allora

a) se s è una retta sghemba con r, allora s non è contenuta in π.
b) esiste un solo piano parallelo a π, ortogonale a r e passante per P.

c) un piano parallelo a π e contenente P non può contenere r.

d) se un piano contiene r, esso è parallelo a π.

Soluzioni: FFFF (a) Ogni retta s contenuta in π, se non è parallela a r, è sghemba con r, perché la direzione di s è differente da quella di r.

(b) Un piano ortogonale a r è ortogonale anche a π, quindi non può essere parallelo a π.

(c) Perché no?

(d) Ci sono infiniti piani che contengono r e intersecano π (l'intersezione è una retta parallela ad r).

8) Sia $S : AX = b$ un sistema lineare con $A \in M_{4\times5}(\mathbb{R})$ matrice dei coefficienti e $b \in M_{4\times1}(\mathbb{R})$ matrice dei termini noti. Sia poi $S_0 : AX = 0$ il sistema omogeneo associato. Allora

a) se X e X' sono soluzioni di S, anche $X + X'$ è una soluzione di S.

b) se X è una soluzione di S e X' è una soluzione di S_0, allora $X + X'$ è una soluzione di S.

c) se $rango(A) = 4$, allora il sistema è compatibile e determinato.

d) S_0 ha infinite soluzioni.

Soluzione: FVFV

(a) Se X e X' sono soluzioni di S, allora $AX = b$ e $AX' = b$. Sommando le equazioni membro a membro, si ha: $AX + AX' = b + b \to A(X + X') = 2b$. Solitamente (se $b = 0$) risulta $2b \neq b$, quindi $X + X'$ non è soluzione di S..

(b) Ragionare come in (a).

(c) e (d) Poiché $A \in M_{4\times5}(\mathbb{R})$, il rango di B non può essere che 4, dunque, per il Teor. di Rouché-Capelli, il sistema è compatibile. D'altra parte, lo spazio delle soluzioni ha dimensione $5 - 4 = 1$, quindi il sistema non è determinato: ha infinite soluzioni.

9) Le seguenti equazioni sono quelle di un retta nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

a) $\begin{cases} x_1 = \alpha - 2\beta + \gamma - 1 \\ x_2 = -\alpha + 2\beta - \gamma + 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 3\alpha - 6\beta + 3\gamma - 2 \end{cases}$ (con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

b) $\begin{cases} x_1 = t + 6u - 1 \\ x_2 = -2t + 3u \\ x_3 = 3t + 3u + 1 \\ x_4 = -t - 3u + 4 \end{cases}$ (con $t, u \in \mathbb{R}$)

c) $x_4 = 4$.

d) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$.

Soluzioni: VFFF.

Una retta è un sottospazio euclideo di dimensione 1.

Conoscendo le equazioni cartesiane di un sottospazio, come in (c) e (d), la dimensione si può dedurre dal rango delle matrici completa e incompleta del sistema. In (d) il rango dell'incompleta è 1, quello della completa 2, quindi il sistema non ha soluzioni. In (c) invece i due ranghi sono uguali a 1, quindi la dimensione è 4-1=3.

Se invece le equazioni sono parametriche, si riesce facilmente a trovare un sistema di generatori per la giacitura, separando i parametri. Nel caso (b) la giacitura è generata da $(1, -2, 3, -1)$ e $(6, 3, 3, -3)$. Tali vettori sono l.i. quindi la giacitura ha dimensione 2: il sottospazio è un piano. Nel caso (a) invece un sistema di generatori della giacitura è dato da $\{(1, -1, 0, 3), (-2, 2, 0, 3), (1, -1, 0, 3)\}$, perciò essa ha dimensione 1: in questo caso il sottospazio è una retta.