Nome e cognome .... **Num. Matr.** ....

Geometria e Algebra t
24/02/2011

Marcare con una **crocetta** *su* **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, −1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1) Il seguente sottoinsieme di vettori di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente:

F **V** a) $\{(1,2,1),(0,1,1),(2,3,1)\}$.

F **V** b) $\{(1,2,1),(0,1,0)\}$.

F **V** c) $\{(0,2,0),(1,0,1),(1,0,-1)\}$.

F **V** d) $\{(1,2,1),(0,1,1),(0,3,1),(1,3,2)\}$.

2) La seguente applicazione T è lineare:

F **V** a) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_{2,1}(\mathbb{R})$, con $T\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\big) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

F **V** b) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, con $T\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\big) = (a+d)^2$.

F **V** c) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $T(x) = x - 3$.

F **V** d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $T(x_1, x_2) = x_1 - x_2$.

3) Sia $S : AX = b$ un sistema lineare con $A \in M_{4\times5}(\mathbb{R})$ matrice dei coefficienti e $b \in M_{4\times1}(\mathbb{R})$ matrice dei termini noti. Sia poi $S_0 : AX = 0$ il sistema omogeneo associato. Allora

F **V** a) se X e X' sono soluzioni di S, anche $X - X'$ è una soluzione di S.

F **V** b) se $rango(A) = 4$, allora il sistema è compatibile.

F **V** c) se X è una soluzione di S e X' è una soluzione di S_0, allora $X + X'$ è una soluzione di S_0.

F **V** d) $X = (0)$ (la 5-pla nulla) è una soluzione di S se e solo se $b = (0)$.

4) La forma bilineare simmetrica ϕ su $\mathbb{R}^2$ è definita come segue:
$\phi((x_1, y_1),(x_2, y_2)) = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 5y_1y_2$.

F **V** a) ϕ ha segnatura $(1,1)$.

F **V** b) La forma quadratica associata a ϕ è $q(x,y) = x^2 - 4xy - 5y^2$.

F **V** c) ϕ è definita negativa.

F **V** d) La matrice di ϕ è congruente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

5) Sia π un piano dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, perpendicolare alla retta r, e P un punto non contenuto in r. Allora

F **V** a) esiste un solo piano parallelo a π, ortogonale a r e passante per P.

F **V** b) esiste un solo piano contenente r e ortogonale a π.

F **V** c) se un piano contiene r, esso è ortogonale a π.

F **V** d) se s è una retta sghemba con r, allora s non è contenuta in π.

6) Siano U e V sottospazi vettoriali, di dimensione 3 e 4 rispettivamente, di uno spazio vettoriale di dimensione n. Se $U \cap V = (0)$ allora:

F **V** a) $n = 7$.

F **V** b) $n \leq 7$.

F **V** c) $n \geqslant 7$.

F **V** d) $3 \leq n$ e $4 \leq n$.

7) Le seguenti equazioni sono quelle di un retta nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

F **V** a) $\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$

F **V** b) $\begin{cases} x_1 = t + 6u - 1 \\ x_2 = -2t + 3u \\ x_3 = 3t + 3u + 1 \\ x_4 = -t - 3u + 4 \end{cases}$ (con $t, u \in \mathbb{R}$)

F **V** c) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$.

F **V** d) $\begin{cases} x_1 = \alpha - \frac{1}{2}\beta + 3\gamma - 1 \\ x_2 = -\alpha + \frac{1}{2}\beta - 3\gamma + 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 3\alpha + \frac{3}{2}\beta + 9\gamma - 2 \end{cases}$ (con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

8) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 6 e $F : V \longrightarrow V$ un endomorfismo di V. F è diagonalizzabile se

F **V** a) ha un autovalore con molteplicità algebrica e geometrica uguali a 6.

F **V** b) ha un autospazio di dimensione 5.

F **V** c) il polinomio caratteristico è $P_F(\lambda) = (\lambda^3 - 1)(\lambda - 1)^3$.

F **V** d) per ogni autovalore λ di F si verifica $1 \leq MoltGeo(\lambda) \leq MoltAlg(\lambda) \leq \dim V$.

9) Sia $G : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ una trasformazione lineare.

F **V** a) G può essere un isomorfismo.

F **V** b) Se G è iniettiva allora G è suriettiva.

F **V** c) Se $\dim(\ker G) = 2$ allora $\dim(\operatorname{Im} G) \leq 3$.

F **V** d) Se $G(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ allora $\operatorname{Im} G \neq M_2(\mathbb{R})$.

Nome e cognome .... **Num. Matr.** ....

Geometria e Algebra t
24/02/2011

Marcare con una **crocetta** *su* **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di* 1/2 *punto se l'indicazione è esatta,* −1/2 *punto se è errata,* 0 *in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1) Siano U e V sottospazi vettoriali, di dimensione 2 e 4 rispettivamente, di uno spazio vettoriale di dimensione n. Se $U \cap V = (0)$ allora:

F **V** a) $3 \leq n$ e $4 \leq n$.

F **V** b) $n = 6$.

F **V** c) $n \leq 6$.

F **V** d) $n \geqslant 7$.

2) Sia $G : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ una trasformazione lineare.

F **V** a) Se $\operatorname{Im} G = L(\{\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\})$ allora il rango di una matrice associata a G è 1.

F **V** b) G può essere iniettiva ma non suriettiva.

F **V** c) Se $\dim(\operatorname{Im} G) = 2$ allora $\dim(\ker G) \geq 2$.

F **V** d) G può non essere un isomorfismo.

3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 5 e $F : V \longrightarrow V$ un endomorfismo di V. F è diagonalizzabile se

F **V** a) per ogni autovalore λ di F si verifica $1 \leq MoltGeo(\lambda) = MoltAlg(\lambda) \leq \dim V$.

F **V** b) ha un autospazio di dimensione 5.

F **V** c) il polinomio caratteristico è $P_F(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4)(\lambda - 5)$.

F **V** d) ha un autovalore con molteplicità algebrica e geometrica uguali a 4.

4) La forma bilineare simmetrica ϕ su $\mathbb{R}^2$ è definita come segue:
$\phi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5y_1y_2$.

F **V** a) La matrice di ϕ è congruente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

F **V** b) ϕ ha segnatura $(1, 1)$.

F **V** c) La forma quadratica associata a ϕ è $q(x, y) = x^2 - 2xy + 5y^2$.

F **V** d) ϕ è definita positiva.

5) La seguente applicazione T è lineare:

F **V** a) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_{2,1}(\mathbb{R})$, con $T\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} ac \\ bd \end{pmatrix}$.

F **V** b) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $T(x) = -3x$.

F **V** c) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, con $T\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = a + b + c + d$.

F **V** d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $T(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

6) Il seguente sottoinsieme di vettori di $\mathbb{R}^3$ è un sistema di generatori:

F **V** a) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (2, 3, 1)\}$.

F **V** b) $\{(0, 2, 0), (1, 0, 1), (1, 0, -1)\}$.

F **V** c) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 0)\}$.

F **V** d) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 3, 1), (1, 3, 2)\}$.

7) Sia π un piano dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, parallelo alla retta r, e P un punto non contenuto in r. Allora

F **V** a) se s è una retta sghemba con r, allora s non è contenuta in π.

F **V** b) esiste un solo piano parallelo a π, ortogonale a r e passante per P.

F **V** c) un piano parallelo a π e contenente P non può contenere r.

F **V** d) se un piano contiene r, esso è parallelo a π.

8) Sia $S : AX = b$ un sistema lineare con $A \in M_{4\times5}(\mathbb{R})$ matrice dei coefficienti e $b \in M_{4\times1}(\mathbb{R})$ matrice dei termini noti. Sia poi $S_0 : AX = 0$ il sistema omogeneo associato. Allora

F **V** a) se X e X' sono soluzioni di S, anche $X + X'$ è una soluzione di S.

F **V** b) se X è una soluzione di S e X' è una soluzione di S_0, allora $X + X'$ è una soluzione di S.

F **V** c) se $rango(A) = 4$, allora il sistema è compatibile e determinato.

F **V** d) S_0 ha infinite soluzioni.

9) Le seguenti equazioni sono quelle di un retta nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

F **V** a) $\begin{cases} x_1 = \alpha - 2\beta + \gamma - 1 \\ x_2 = -\alpha + 2\beta - \gamma + 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 3\alpha - 6\beta + 3\gamma - 2 \end{cases}$ (con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

F **V** b) $\begin{cases} x_1 = t + 6u - 1 \\ x_2 = -2t + 3u \\ x_3 = 3t + 3u + 1 \\ x_4 = -t - 3u + 4 \end{cases}$ (con $t, u \in \mathbb{R}$)

F **V** c) $x_4 = 4$.

F **V** d) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$

Nome e cognome .... **Num. Matr.** ....

Geometria e Algebra t
24/02/2011

Marcare con una ***crocetta*** *su* **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di* 1/2 *punto se l'indicazione è esatta,* −1/2 *punto se è errata,* 0 *in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici. . .). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1) La seguente applicazione T è lineare:

F V a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $T(x_1, x_2) = x_1 - x_2$.

F V b) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_{2,1}(\mathbb{R})$, con $T\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\big) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

F V c) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, con $T\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\big) = (a + d)^2$.

F V d) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $T(x) = x - 3$.

2) Sia π un piano dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, perpendicolare alla retta r, e P un punto non contenuto in r. Allora

F V a) se s è una retta sghemba con r, allora s non è contenuta in π.

F V b) se un piano contiene r, esso è ortogonale a π.

F V c) esiste un solo piano contenente r e ortogonale a π.

F V d) esiste un solo piano parallelo a π, ortogonale a r e passante per P.

3) Siano U e V sottospazi vettoriali, di dimensione 3 e 4 rispettivamente, di uno spazio vettoriale di dimensione n. Se $U \cap V = (0)$ allora:

F V a) $3 \leq n$ e $4 \leq n$.

F V b) $n \geqslant 7$.

F V c) $n \leq 7$.

F V d) $n = 7$.

4) Le seguenti equazioni sono quelle di un retta nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

F V a) $\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$

F V b) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$.

F V c) $\begin{cases} x_1 = \alpha - \frac{1}{2}\beta + 3\gamma - 1 \\ x_2 = -\alpha + \frac{1}{2}\beta - 3\gamma + 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 3\alpha + \frac{3}{2}\beta + 9\gamma - 2 \end{cases}$ (con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

F **V** d) $\begin{cases} x_1 = t + 6u - 1 \\ x_2 = -2t + 3u \\ x_3 = 3t + 3u + 1 \\ x_4 = -t - 3u + 4 \end{cases}$ (con $t, u \in \mathbb{R}$)

5) Sia $S : AX = b$ un sistema lineare con $A \in M_{4\times5}(\mathbb{R})$ matrice dei coefficienti e $b \in M_{4\times1}(\mathbb{R})$ matrice dei termini noti. Sia poi $S_0 : AX = 0$ il sistema omogeneo associato. Allora

F **V** a) $X = (0)$ (la 5-pla nulla) è una soluzione di S se e solo se $b = (0)$.

F **V** b) se X e X' sono soluzioni di S, anche $X - X'$ è una soluzione di S.

F **V** c) se $rango(A) = 4$, allora il sistema è compatibile.

F **V** d) se X è una soluzione di S e X' è una soluzione di S_0, allora $X + X'$ è una soluzione di S_0.

6) La forma bilineare simmetrica ϕ su $\mathbb{R}^2$ è definita come segue:
$\phi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 5y_1y_2$.

F **V** a) La matrice di ϕ è congruente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

F **V** b) ϕ è definita negativa.

F **V** c) La forma quadratica associata a ϕ è $q(x, y) = x^2 - 4xy - 5y^2$.

F **V** d) ϕ ha segnatura $(1, 1)$.

7) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 6 e $F : V \longrightarrow V$ un endomorfismo di V. F è diagonalizzabile se

F **V** a) ha un autovalore con molteplicità algebrica e geometrica uguali a 6.

F **V** b) il polinomio caratteristico è $P_F(\lambda) = (\lambda^3 - 1)(\lambda - 1)^3$.

F **V** c) per ogni autovalore λ di F si verifica $1 \leq MoltGeo(\lambda) \leq MoltAlg(\lambda) \leq \dim V$.

F **V** d) ha un autospazio di dimensione 5.

8) Sia $G : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ una trasformazione lineare.

F **V** a) G può essere un isomorfismo.

F **V** b) Se $\dim(\ker G) = 2$ allora $\dim(\operatorname{Im} G) \leq 3$.

F **V** c) Se $G(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ allora $\operatorname{Im} G \neq M_2(\mathbb{R})$.

F **V** d) Se G è iniettiva allora G è suriettiva.

9) Il seguente sottoinsieme di vettori di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente:

F **V** a) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 3, 1), (1, 3, 2)\}$.

F **V** b) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (2, 3, 1)\}$.

F **V** c) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 0)\}$.

F **V** d) $\{(0, 2, 0), (1, 0, 1), (1, 0, -1)\}$.

Nome e cognome .... **Num. Matr.** ....

Geometria e Algebra t
24/02/2011

Marcare con una **crocetta** *su* **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di* 1/2 *punto se l'indicazione è esatta,* −1/2 *punto se è errata,* 0 *in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1) Sia $G : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ una trasformazione lineare.

F V a) G può essere iniettiva ma non suriettiva.

F V b) Se $\dim(\operatorname{Im} G) = 2$ allora $\dim(\ker G) \geq 2$.

F V c) Se $\operatorname{Im} G = L(\{\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\})$ allora il rango di una matrice associata a G è 1.

F V d) G può non essere un isomorfismo.

2) Sia π un piano dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, parallelo alla retta r, e P un punto non contenuto in r. Allora

F V a) se un piano contiene r, esso è parallelo a π.

F V b) un piano parallelo a π e contenente P non può contenere r.

F V c) esiste un solo piano parallelo a π, ortogonale a r e passante per P.

F V d) se s è una retta sghemba con r, allora s non è contenuta in π.

3) Il seguente sottoinsieme di vettori di $\mathbb{R}^3$ è un sistema di generatori:

F V a) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 3, 1), (1, 3, 2)\}$.

F V b) $\{(0, 2, 0), (1, 0, 1), (1, 0, -1)\}$.

F V c) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (2, 3, 1)\}$.

F V d) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 0)\}$.

4) Siano U e V sottospazi vettoriali, di dimensione 2 e 4 rispettivamente, di uno spazio vettoriale di dimensione n. Se $U \cap V = (0)$ allora:

F V a) $n \geqslant 7$.

F V b) $n \leq 6$.

F V c) $n = 6$.

F V d) $3 \leq n$ e $4 \leq n$.

5) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 5 e $F : V \longrightarrow V$ un endomorfismo di V. F è diagonalizzabile se

F V a) ha un autospazio di dimensione 5.

F V b) il polinomio caratteristico è $P_F(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4)(\lambda - 5)$.

F V c) per ogni autovalore λ di F si verifica $1 \leq MoltGeo(\lambda) = MoltAlg(\lambda) \leq \dim V$.

F V d) ha un autovalore con molteplicità algebrica e geometrica uguali a 4.

6) Le seguenti equazioni sono quelle di un retta nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

F **V** a) $\begin{cases} x_1 = t + 6u - 1 \\ x_2 = -2t + 3u \\ x_3 = 3t + 3u + 1 \\ x_4 = -t - 3u + 4 \end{cases}$ (con $t, u \in \mathbb{R}$)

F **V** b) $x_4 = 4$.

F **V** c) $\begin{cases} x_1 = \alpha - 2\beta + \gamma - 1 \\ x_2 = -\alpha + 2\beta - \gamma + 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 3\alpha - 6\beta + 3\gamma - 2 \end{cases}$ (con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

F **V** d) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$

7) Sia $S : AX = b$ un sistema lineare con $A \in M_{4\times5}(\mathbb{R})$ matrice dei coefficienti e $b \in M_{4\times1}(\mathbb{R})$ matrice dei termini noti. Sia poi $S_0 : AX = 0$ il sistema omogeneo associato. Allora

F **V** a) S_0 ha infinite soluzioni.

F **V** b) se X è una soluzione di S e X' è una soluzione di S_0, allora $X + X'$ è una soluzione di S.

F **V** c) se X e X' sono soluzioni di S, anche $X + X'$ è una soluzione di S.

F **V** d) se $rango(A) = 4$, allora il sistema è compatibile e determinato.

8) La seguente applicazione T è lineare:

F **V** a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $T(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

F **V** b) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $T(x) = -3x$.

F **V** c) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_{2,1}(\mathbb{R})$, con $T\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} ac \\ bd \end{pmatrix}$.

F **V** d) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, con $T\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = a + b + c + d$.

9) La forma bilineare simmetrica ϕ su $\mathbb{R}^2$ è definita come segue:
$\phi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5y_1y_2$.

F **V** a) ϕ è definita positiva.

F **V** b) La forma quadratica associata a ϕ è $q(x, y) = x^2 - 2xy + 5y^2$.

F **V** c) ϕ ha segnatura $(1, 1)$.

F **V** d) La matrice di ϕ è congruente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Nome e cognome .... **Num. Matr.** ....

Geometria e Algebra t
24/02/2011

Marcare con una **crocetta** *su* **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, −1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1) La seguente applicazione T è lineare:

F V a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $T(x_1, x_2) = x_1 - x_2$.

F V b) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_{2,1}(\mathbb{R})$, con $T\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

F V c) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $T(x) = x - 3$.

F V d) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, con $T\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = (a + d)^2$.

2) Sia $S : AX = b$ un sistema lineare con $A \in M_{4\times5}(\mathbb{R})$ matrice dei coefficienti e $b \in M_{4\times1}(\mathbb{R})$ matrice dei termini noti. Sia poi $S_0 : AX = 0$ il sistema omogeneo associato. Allora

F V a) $X = (0)$ (la 5-pla nulla) è una soluzione di S se e solo se $b = (0)$.

F V b) se X e X' sono soluzioni di S, anche $X - X'$ è una soluzione di S.

F V c) se X è una soluzione di S e X' è una soluzione di S_0, allora $X + X'$ è una soluzione di S_0.

F V d) se $rango(A) = 4$, allora il sistema è compatibile.

3) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 6 e $F : V \longrightarrow V$ un endomorfismo di V. F è diagonalizzabile se

F V a) ha un autospazio di dimensione 5.

F V b) per ogni autovalore λ di F si verifica $1 \le MoltGeo(\lambda) \le MoltAlg(\lambda) \le \dim V$.

F V c) ha un autovalore con molteplicità algebrica e geometrica uguali a 6.

F V d) il polinomio caratteristico è $P_F(\lambda) = (\lambda^3 - 1)(\lambda - 1)^3$.

4) La forma bilineare simmetrica ϕ su $\mathbb{R}^2$ è definita come segue:
$\phi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 5y_1y_2$.

F V a) La forma quadratica associata a ϕ è $q(x, y) = x^2 - 4xy - 5y^2$.

F V b) ϕ ha segnatura $(1, 1)$.

F V c) La matrice di ϕ è congruente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

F V d) ϕ è definita negativa.

5) Sia π un piano dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, perpendicolare alla retta r, e P un punto non contenuto in r. Allora

F **V** a) esiste un solo piano contenente r e ortogonale a π.

F **V** b) esiste un solo piano parallelo a π, ortogonale a r e passante per P.

F **V** c) se s è una retta sghemba con r, allora s non è contenuta in π.

F **V** d) se un piano contiene r, esso è ortogonale a π.

6) Siano U e V sottospazi vettoriali, di dimensione 3 e 4 rispettivamente, di uno spazio vettoriale di dimensione n. Se $U \cap V = (0)$ allora:

F **V** a) $n \leq 7$.

F **V** b) $n = 7$.

F **V** c) $3 \leq n$ e $4 \leq n$.

F **V** d) $n \geqslant 7$.

7) Le seguenti equazioni sono quelle di un retta nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

F **V** a) $\begin{cases} x_1 = t + 6u - 1 \\ x_2 = -2t + 3u \\ x_3 = 3t + 3u + 1 \\ x_4 = -t - 3u + 4 \end{cases}$ (con $t, u \in \mathbb{R}$)

F **V** b) $\begin{cases} x_1 = \alpha - \frac{1}{2}\beta + 3\gamma - 1 \\ x_2 = -\alpha + \frac{1}{2}\beta - 3\gamma + 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 3\alpha + \frac{3}{2}\beta + 9\gamma - 2 \end{cases}$ (con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

F **V** c) $\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$

F **V** d) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$.

8) Sia $G : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ una trasformazione lineare.

F **V** a) Se G è iniettiva allora G è suriettiva.

F **V** b) Se $G(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ allora $\operatorname{Im} G \neq M_2(\mathbb{R})$.

F **V** c) G può essere un isomorfismo.

F **V** d) Se $\dim(\ker G) = 2$ allora $\dim(\operatorname{Im} G) \leq 3$.

9) Il seguente sottoinsieme di vettori di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente:

F **V** a) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 3, 1), (1, 3, 2)\}$.

F **V** b) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (2, 3, 1)\}$.

F **V** c) $\{(0, 2, 0), (1, 0, 1), (1, 0, -1)\}$.

F **V** d) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 0)\}$.

Nome e cognome .... **Num. Matr.** ....

Geometria e Algebra t
24/02/2011

Marcare con una **crocetta** *su* **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, −1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici. . .). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1) Le seguenti equazioni sono quelle di un retta nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

F V a) $x_4 = 4$.

F V b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$

F V c) $\begin{cases} x_1 = t + 6u - 1 \\ x_2 = -2t + 3u \\ x_3 = 3t + 3u + 1 \\ x_4 = -t - 3u + 4 \end{cases}$ (con $t, u \in \mathbb{R}$)

F V d) $\begin{cases} x_1 = \alpha - 2\beta + \gamma - 1 \\ x_2 = -\alpha + 2\beta - \gamma + 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 3\alpha - 6\beta + 3\gamma - 2 \end{cases}$ (con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

2) Siano U e V sottospazi vettoriali, di dimensione 2 e 4 rispettivamente, di uno spazio vettoriale di dimensione n. Se $U \cap V = (0)$ allora:

F V a) $n = 6$.

F V b) $3 \leq n$ e $4 \leq n$.

F V c) $n \leq 6$.

F V d) $n \geqslant 7$.

3) La seguente applicazione T è lineare:

F V a) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, con $T\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\big) = a + b + c + d$.

F V b) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $T(x) = -3x$.

F V c) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_{2,1}(\mathbb{R})$, con $T\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\big) = \begin{pmatrix} ac \\ bd \end{pmatrix}$.

F V d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $T(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4) Il seguente sottoinsieme di vettori di $\mathbb{R}^3$ è un sistema di generatori:

F V a) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 0)\}$.

F V b) $\{(0, 2, 0), (1, 0, 1), (1, 0, -1)\}$.

F V c) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (2, 3, 1)\}$.

F V d) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 3, 1), (1, 3, 2)\}$.

5) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 5 e $F : V \longrightarrow V$ un endomorfismo di V. F è diagonalizzabile se

F V a) il polinomio caratteristico è $P_F(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4)(\lambda - 5)$.

F V b) ha un autovalore con molteplicità algebrica e geometrica uguali a 4.

F V c) ha un autospazio di dimensione 5.

F V d) per ogni autovalore λ di F si verifica $1 \leq MoltGeo(\lambda) = MoltAlg(\lambda) \leq \dim V$.

6) Sia $G : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ una trasformazione lineare.

F V a) Se $\dim(\operatorname{Im} G) = 2$ allora $\dim(\ker G) \geq 2$.

F V b) G può non essere un isomorfismo.

F V c) G può essere iniettiva ma non suriettiva.

F V d) Se $\operatorname{Im} G = L(\{\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\})$ allora il rango di una matrice associata a G è 1.

7) La forma bilineare simmetrica ϕ su $\mathbb{R}^2$ è definita come segue:
$\phi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5y_1y_2$.

F V a) ϕ ha segnatura $(1, 1)$.

F V b) La matrice di ϕ è congruente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

F V c) La forma quadratica associata a ϕ è $q(x, y) = x^2 - 2xy + 5y^2$.

F V d) ϕ è definita positiva.

8) Sia $S : AX = b$ un sistema lineare con $A \in M_{4\times5}(\mathbb{R})$ matrice dei coefficienti e $b \in M_{4\times1}(\mathbb{R})$ matrice dei termini noti. Sia poi $S_0 : AX = 0$ il sistema omogeneo associato. Allora

F V a) se $rango(A) = 4$, allora il sistema è compatibile e determinato.

F V b) se X è una soluzione di S e X' è una soluzione di S_0, allora $X + X'$ è una soluzione di S.

F V c) se X e X' sono soluzioni di S, anche $X + X'$ è una soluzione di S.

F V d) S_0 ha infinite soluzioni.

9) Sia π un piano dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, parallelo alla retta r, e P un punto non contenuto in r. Allora

F V a) esiste un solo piano parallelo a π, ortogonale a r e passante per P.

F V b) se s è una retta sghemba con r, allora s non è contenuta in π.

F V c) un piano parallelo a π e contenente P non può contenere r.

F V d) se un piano contiene r, esso è parallelo a π.

Nome e cognome .... **Num. Matr.** ....

Geometria e Algebra t
24/02/2011

Marcare con una **crocetta** *su* **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di* 1/2 *punto se l'indicazione è esatta,* −1/2 *punto se è errata,* 0 *in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1) La seguente applicazione T è lineare:

F **V** a) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $T(x) = x - 3$.

F **V** b) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, con $T\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\big) = (a + d)^2$.

F **V** c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $T(x_1, x_2) = x_1 - x_2$.

F **V** d) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_{2,1}(\mathbb{R})$, con $T\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\big) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

2) Sia $S : AX = b$ un sistema lineare con $A \in M_{4\times5}(\mathbb{R})$ matrice dei coefficienti e $b \in M_{4\times1}(\mathbb{R})$ matrice dei termini noti. Sia poi $S_0 : AX = 0$ il sistema omogeneo associato. Allora

F **V** a) se X è una soluzione di S e X' è una soluzione di S_0, allora $X + X'$ è una soluzione di S_0.

F **V** b) se $rango(A) = 4$, allora il sistema è compatibile.

F **V** c) $X = (0)$ (la 5-pla nulla) è una soluzione di S se e solo se $b = (0)$.

F **V** d) se X e X' sono soluzioni di S, anche $X - X'$ è una soluzione di S.

3) La forma bilineare simmetrica ϕ su $\mathbb{R}^2$ è definita come segue:
$\phi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 5y_1y_2$.

F **V** a) La forma quadratica associata a ϕ è $q(x, y) = x^2 - 4xy - 5y^2$.

F **V** b) ϕ è definita negativa.

F **V** c) ϕ ha segnatura $(1, 1)$.

F **V** d) La matrice di ϕ è congruente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

4) Sia π un piano dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, perpendicolare alla retta r, e P un punto non contenuto in r. Allora

F **V** a) esiste un solo piano contenente r e ortogonale a π.

F **V** b) se un piano contiene r, esso è ortogonale a π.

F **V** c) esiste un solo piano parallelo a π, ortogonale a r e passante per P.

F **V** d) se s è una retta sghemba con r, allora s non è contenuta in π.

5) Sia $G : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ una trasformazione lineare.

F **V** a) G può essere un isomorfismo.

F **V** b) Se $G(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ allora $\operatorname{Im} G \neq M_2(\mathbb{R})$.

F **V** c) Se G è iniettiva allora G è suriettiva.

F **V** d) Se $\dim(\ker G) = 2$ allora $\dim(\operatorname{Im} G) \leq 3$.

6) Il seguente sottoinsieme di vettori di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente:

F **V** a) $\{(0,2,0),(1,0,1),(1,0,-1)\}$.

F **V** b) $\{(1,2,1),(0,1,0)\}$.

F **V** c) $\{(1,2,1),(0,1,1),(0,3,1),(1,3,2)\}$.

F **V** d) $\{(1,2,1),(0,1,1),(2,3,1)\}$.

7) Siano U e V sottospazi vettoriali, di dimensione 3 e 4 rispettivamente, di uno spazio vettoriale di dimensione n. Se $U \cap V = (0)$ allora:

F **V** a) $n \leq 7$.

F **V** b) $n \geqslant 7$.

F **V** c) $n = 7$.

F **V** d) $3 \leq n$ e $4 \leq n$.

8) Le seguenti equazioni sono quelle di un retta nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

F **V** a) $\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$

F **V** b) $\begin{cases} x_1 = \alpha - \frac{1}{2}\beta + 3\gamma - 1 \\ x_2 = -\alpha + \frac{1}{2}\beta - 3\gamma + 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 3\alpha + \frac{3}{2}\beta + 9\gamma - 2 \end{cases}$ (con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

F **V** c) $\begin{cases} x_1 = t + 6u - 1 \\ x_2 = -2t + 3u \\ x_3 = 3t + 3u + 1 \\ x_4 = -t - 3u + 4 \end{cases}$ (con $t, u \in \mathbb{R}$)

F **V** d) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$.

9) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 6 e $F : V \longrightarrow V$ un endomorfismo di V. F è diagonalizzabile se

F **V** a) ha un autovalore con molteplicità algebrica e geometrica uguali a 6.

F **V** b) per ogni autovalore λ di F si verifica $1 \leq MoltGeo(\lambda) \leq MoltAlg(\lambda) \leq \dim V$.

F **V** c) ha un autospazio di dimensione 5.

F **V** d) il polinomio caratteristico è $P_F(\lambda) = (\lambda^3 - 1)(\lambda - 1)^3$.

Nome e cognome .... **Num. Matr.** ....

Geometria e Algebra t
24/02/2011

Marcare con una **crocetta** *su* **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di* 1/2 *punto se l'indicazione è esatta,* −1/2 *punto se è errata,* 0 *in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1) Sia π un piano dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, parallelo alla retta r, e P un punto non contenuto in r. Allora

F V a) se s è una retta sghemba con r, allora s non è contenuta in π.

F V b) un piano parallelo a π e contenente P non può contenere r.

F V c) se un piano contiene r, esso è parallelo a π.

F V d) esiste un solo piano parallelo a π, ortogonale a r e passante per P.

2) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 5 e $F : V \longrightarrow V$ un endomorfismo di V. F è diagonalizzabile se

F V a) il polinomio caratteristico è $P_F(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4)(\lambda - 5)$.

F V b) ha un autospazio di dimensione 5.

F V c) ha un autovalore con molteplicità algebrica e geometrica uguali a 4.

F V d) per ogni autovalore λ di F si verifica $1 \leq MoltGeo(\lambda) = MoltAlg(\lambda) \leq \dim V$.

3) Il seguente sottoinsieme di vettori di $\mathbb{R}^3$ è un sistema di generatori:

F V a) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (2, 3, 1)\}$.

F V b) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 0)\}$.

F V c) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 3, 1), (1, 3, 2)\}$.

F V d) $\{(0, 2, 0), (1, 0, 1), (1, 0, -1)\}$.

4) Sia $G : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ una trasformazione lineare.

F V a) Se $\dim(\operatorname{Im} G) = 2$ allora $\dim(\ker G) \geq 2$.

F V b) G può essere iniettiva ma non suriettiva.

F V c) G può non essere un isomorfismo.

F V d) Se $\operatorname{Im} G = L(\{\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\})$ allora il rango di una matrice associata a G è 1.

5) Sia $S : AX = b$ un sistema lineare con $A \in M_{4\times5}(\mathbb{R})$ matrice dei coefficienti e $b \in M_{4\times1}(\mathbb{R})$ matrice dei termini noti. Sia poi $S_0 : AX = 0$ il sistema omogeneo associato. Allora

F **V** a) se X e X' sono soluzioni di S, anche $X + X'$ è una soluzione di S.

F **V** b) se $rango(A) = 4$, allora il sistema è compatibile e determinato.

F **V** c) S_0 ha infinite soluzioni.

F **V** d) se X è una soluzione di S e X' è una soluzione di S_0, allora $X + X'$ è una soluzione di S.

6) La seguente applicazione T è lineare:

F **V** a) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_{2,1}(\mathbb{R})$, con $T\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} ac \\ bd \end{pmatrix}$.

F **V** b) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, con $T\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = a + b + c + d$.

F **V** c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $T(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

F **V** d) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $T(x) = -3x$.

7) Siano U e V sottospazi vettoriali, di dimensione 2 e 4 rispettivamente, di uno spazio vettoriale di dimensione n. Se $U \cap V = (0)$ allora:

F **V** a) $3 \leq n$ e $4 \leq n$.

F **V** b) $n \leq 6$.

F **V** c) $n \geqslant 7$.

F **V** d) $n = 6$.

8) La forma bilineare simmetrica ϕ su $\mathbb{R}^2$ è definita come segue:
$\phi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5y_1y_2$.

F **V** a) La matrice di ϕ è congruente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

F **V** b) La forma quadratica associata a ϕ è $q(x, y) = x^2 - 2xy + 5y^2$.

F **V** c) ϕ è definita positiva.

F **V** d) ϕ ha segnatura $(1, 1)$.

9) Le seguenti equazioni sono quelle di un retta nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

F **V** a) $x_4 = 4$.

F **V** b) $\begin{cases} x_1 = t + 6u - 1 \\ x_2 = -2t + 3u \\ x_3 = 3t + 3u + 1 \\ x_4 = -t - 3u + 4 \end{cases}$ (con $t, u \in \mathbb{R}$)

F **V** c) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$

F **V** d) $\begin{cases} x_1 = \alpha - 2\beta + \gamma - 1 \\ x_2 = -\alpha + 2\beta - \gamma + 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 3\alpha - 6\beta + 3\gamma - 2 \end{cases}$ (con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

Nome e cognome .... **Num. Matr.** ....

Geometria e Algebra t
24/02/2011

Marcare con una **crocetta** *su* **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di* 1/2 *punto se l'indicazione è esatta,* −1/2 *punto se è errata,* 0 *in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1) Sia $S : AX = b$ un sistema lineare con $A \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$ matrice dei coefficienti e $b \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$ matrice dei termini noti. Sia poi $S_0 : AX = 0$ il sistema omogeneo associato. Allora

F **V** a) se $rango(A) = 4$, allora il sistema è compatibile.

F **V** b) $X = (0)$ (la 5-pla nulla) è una soluzione di S se e solo se $b = (0)$.

F **V** c) se X è una soluzione di S e X' è una soluzione di S_0, allora $X + X'$ è una soluzione di S_0.

F **V** d) se X e X' sono soluzioni di S, anche $X - X'$ è una soluzione di S.

2) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 6 e $F : V \longrightarrow V$ un endomorfismo di V. F è diagonalizzabile se

F **V** a) ha un autospazio di dimensione 5.

F **V** b) ha un autovalore con molteplicità algebrica e geometrica uguali a 6.

F **V** c) il polinomio caratteristico è $P_F(\lambda) = (\lambda^3 - 1)(\lambda - 1)^3$.

F **V** d) per ogni autovalore λ di F si verifica $1 \leq MoltGeo(\lambda) \leq MoltAlg(\lambda) \leq \dim V$.

3) Sia $G : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ una trasformazione lineare.

F **V** a) Se G è iniettiva allora G è suriettiva.

F **V** b) G può essere un isomorfismo.

F **V** c) Se $\dim(\ker G) = 2$ allora $\dim(\operatorname{Im} G) \leq 3$.

F **V** d) Se $G(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ allora $\operatorname{Im} G \neq M_2(\mathbb{R})$.

4) La forma bilineare simmetrica ϕ su $\mathbb{R}^2$ è definita come segue:
$\phi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 5y_1y_2$.

F **V** a) La matrice di ϕ è congruente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

F **V** b) ϕ è definita negativa.

F **V** c) ϕ ha segnatura $(1, 1)$.

F **V** d) La forma quadratica associata a ϕ è $q(x, y) = x^2 - 4xy - 5y^2$.

5) Sia π un piano dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, perpendicolare alla retta r, e P un punto non contenuto in r. Allora

F **V** a) se s è una retta sghemba con r, allora s non è contenuta in π.

F **V** b) se un piano contiene r, esso è ortogonale a π.

F **V** c) esiste un solo piano parallelo a π, ortogonale a r e passante per P.

F **V** d) esiste un solo piano contenente r e ortogonale a π.

6) Siano U e V sottospazi vettoriali, di dimensione 3 e 4 rispettivamente, di uno spazio vettoriale di dimensione n. Se $U \cap V = (0)$ allora:

F **V** a) $3 \leq n$ e $4 \leq n$.

F **V** b) $n \geqslant 7$.

F **V** c) $n = 7$.

F **V** d) $n \leq 7$.

7) Le seguenti equazioni sono quelle di un retta nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

F **V** a) $\begin{cases} x_1 = t + 6u - 1 \\ x_2 = -2t + 3u \\ x_3 = 3t + 3u + 1 \\ x_4 = -t - 3u + 4 \end{cases}$ (con $t, u \in \mathbb{R}$)

F **V** b) $\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$

F **V** c) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$.

F **V** d) $\begin{cases} x_1 = \alpha - \frac{1}{2}\beta + 3\gamma - 1 \\ x_2 = -\alpha + \frac{1}{2}\beta - 3\gamma + 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 3\alpha + \frac{3}{2}\beta + 9\gamma - 2 \end{cases}$ (con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

8) Il seguente sottoinsieme di vettori di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente:

F **V** a) $\{(1,2,1), (0,1,0)\}$.

F **V** b) $\{(1,2,1), (0,1,1), (0,3,1), (1,3,2)\}$.

F **V** c) $\{(0,2,0), (1,0,1), (1,0,-1)\}$.

F **V** d) $\{(1,2,1), (0,1,1), (2,3,1)\}$.

9) La seguente applicazione T è lineare:

F **V** a) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, con $T\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = (a+d)^2$.

F **V** b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $T(x_1, x_2) = x_1 - x_2$.

F **V** c) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $T(x) = x - 3$.

F **V** d) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_{2,1}(\mathbb{R})$, con $T\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Nome e cognome .... **Num. Matr.** ....

Geometria e Algebra t
24/02/2011

Marcare con una **crocetta** *su* **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di* 1/2 *punto se l'indicazione è esatta,* −1/2 *punto se è errata,* 0 *in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 5 e $F : V \longrightarrow V$ un endomorfismo di V. F è diagonalizzabile se

F **V** a) il polinomio caratteristico è $P_F(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-5)$.

F **V** b) ha un autospazio di dimensione 5.

F **V** c) per ogni autovalore λ di F si verifica $1 \leq MoltGeo(\lambda) = MoltAlg(\lambda) \leq \dim V$.

F **V** d) ha un autovalore con molteplicità algebrica e geometrica uguali a 4.

2) Le seguenti equazioni sono quelle di un retta nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

F **V** a) $x_4 = 4$.

F **V** b) $\begin{cases} x_1 = t + 6u - 1 \\ x_2 = -2t + 3u \\ x_3 = 3t + 3u + 1 \\ x_4 = -t - 3u + 4 \end{cases}$ (con $t, u \in \mathbb{R}$)

F **V** c) $\begin{cases} x_1 = \alpha - 2\beta + \gamma - 1 \\ x_2 = -\alpha + 2\beta - \gamma + 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 3\alpha - 6\beta + 3\gamma - 2 \end{cases}$ (con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

F **V** d) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$

3) La seguente applicazione T è lineare:

F **V** a) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, con $T\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = a + b + c + d$.

F **V** b) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_{2,1}(\mathbb{R})$, con $T\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} ac \\ bd \end{pmatrix}$.

F **V** c) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $T(x) = -3x$.

F **V** d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $T(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

4) Il seguente sottoinsieme di vettori di $\mathbb{R}^3$ è un sistema di generatori:

F **V** a) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 0)\}$.

F **V** b) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (2, 3, 1)\}$.

F **V** c) $\{(0, 2, 0), (1, 0, 1), (1, 0, -1)\}$.

F **V** d) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 3, 1), (1, 3, 2)\}$.

5) Sia $S : AX = b$ un sistema lineare con $A \in M_{4\times 5}(\mathbb{R})$ matrice dei coefficienti e $b \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$ matrice dei termini noti. Sia poi $S_0 : AX = 0$ il sistema omogeneo associato. Allora

F **V** a) se $rango(A) = 4$, allora il sistema è compatibile e determinato.

F **V** b) se X e X' sono soluzioni di S, anche $X + X'$ è una soluzione di S.

F **V** c) se X è una soluzione di S e X' è una soluzione di S_0, allora $X + X'$ è una soluzione di S.

F **V** d) S_0 ha infinite soluzioni.

6) Siano U e V sottospazi vettoriali, di dimensione 2 e 4 rispettivamente, di uno spazio vettoriale di dimensione n. Se $U \cap V = (0)$ allora:

F **V** a) $n = 6$.

F **V** b) $3 \leq n$ e $4 \leq n$.

F **V** c) $n \leq 6$.

F **V** d) $n \geqslant 7$.

7) Sia π un piano dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, parallelo alla retta r, e P un punto non contenuto in r. Allora

F **V** a) esiste un solo piano parallelo a π, ortogonale a r e passante per P.

F **V** b) se s è una retta sghemba con r, allora s non è contenuta in π.

F **V** c) un piano parallelo a π e contenente P non può contenere r.

F **V** d) se un piano contiene r, esso è parallelo a π.

8) La forma bilineare simmetrica ϕ su $\mathbb{R}^2$ è definita come segue:
$\phi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5y_1y_2$.

F **V** a) ϕ ha segnatura $(1, 1)$.

F **V** b) La matrice di ϕ è congruente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

F **V** c) La forma quadratica associata a ϕ è $q(x, y) = x^2 - 2xy + 5y^2$.

F **V** d) ϕ è definita positiva.

9) Sia $G : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ una trasformazione lineare.

F **V** a) Se $\dim(\operatorname{Im} G) = 2$ allora $\dim(\ker G) \geq 2$.

F **V** b) G può essere iniettiva ma non suriettiva.

F **V** c) Se $\operatorname{Im} G = L(\{\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\})$ allora il rango di una matrice associata a G è 1.

F **V** d) G può non essere un isomorfismo.

Nome e cognome .... **Num. Matr.** ....

Geometria e Algebra t
24/02/2011

Marcare con una **crocetta** *su* **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, −1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1) La forma bilineare simmetrica ϕ su $\mathbb{R}^2$ è definita come segue:
$\phi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 5y_1y_2$.

F V a) La matrice di ϕ è congruente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

F V b) ϕ ha segnatura $(1, 1)$.

F V c) La forma quadratica associata a ϕ è $q(x, y) = x^2 - 4xy - 5y^2$.

F V d) ϕ è definita negativa.

2) Siano U e V sottospazi vettoriali, di dimensione 3 e 4 rispettivamente, di uno spazio vettoriale di dimensione n. Se $U \cap V = (0)$ allora:

F V a) $3 \leq n$ e $4 \leq n$.

F V b) $n = 7$.

F V c) $n \leq 7$.

F V d) $n \geqslant 7$.

3) Le seguenti equazioni sono quelle di un retta nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

F V a) $\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 - 3x_3 = -1 \end{cases}$

F V b) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$.

F V c) $\begin{cases} x_1 = t + 6u - 1 \\ x_2 = -2t + 3u \\ x_3 = 3t + 3u + 1 \\ x_4 = -t - 3u + 4 \end{cases}$ (con $t, u \in \mathbb{R}$)

F V d) $\begin{cases} x_1 = \alpha - \frac{1}{2}\beta + 3\gamma - 1 \\ x_2 = -\alpha + \frac{1}{2}\beta - 3\gamma + 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 3\alpha + \frac{3}{2}\beta + 9\gamma - 2 \end{cases}$ (con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

4) Sia π un piano dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, perpendicolare alla retta r, e P un punto non contenuto in r. Allora

F **V** a) se s è una retta sghemba con r, allora s non è contenuta in π.

F **V** b) esiste un solo piano parallelo a π, ortogonale a r e passante per P.

F **V** c) esiste un solo piano contenente r e ortogonale a π.

F **V** d) se un piano contiene r, esso è ortogonale a π.

5) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 6 e $F : V \longrightarrow V$ un endomorfismo di V. F è diagonalizzabile se

F **V** a) ha un autovalore con molteplicità algebrica e geometrica uguali a 6.

F **V** b) il polinomio caratteristico è $P_F(\lambda) = (\lambda^3 - 1)(\lambda - 1)^3$.

F **V** c) ha un autospazio di dimensione 5.

F **V** d) per ogni autovalore λ di F si verifica $1 \leq MoltGeo(\lambda) \leq MoltAlg(\lambda) \leq \dim V$.

6) Sia $G : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ una trasformazione lineare.

F **V** a) G può essere un isomorfismo.

F **V** b) Se $\dim(\ker G) = 2$ allora $\dim(\operatorname{Im} G) \leq 3$.

F **V** c) Se G è iniettiva allora G è suriettiva.

F **V** d) Se $G(t) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ allora $\operatorname{Im} G \neq M_2(\mathbb{R})$.

7) Il seguente sottoinsieme di vettori di $\mathbb{R}^3$ è linearmente indipendente:

F **V** a) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 3, 1), (1, 3, 2)\}$.

F **V** b) $\{(0, 2, 0), (1, 0, 1), (1, 0, -1)\}$.

F **V** c) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 0)\}$.

F **V** d) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (2, 3, 1)\}$.

8) La seguente applicazione T è lineare:

F **V** a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $T(x_1, x_2) = x_1 - x_2$.

F **V** b) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $T(x) = x - 3$.

F **V** c) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, con $T\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\big) = (a + d)^2$.

F **V** d) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_{2,1}(\mathbb{R})$, con $T\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\big) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

9) Sia $S : AX = b$ un sistema lineare con $A \in M_{4\times5}(\mathbb{R})$ matrice dei coefficienti e $b \in M_{4\times1}(\mathbb{R})$ matrice dei termini noti. Sia poi $S_0 : AX = 0$ il sistema omogeneo associato. Allora

F **V** a) $X = (0)$ (la 5-pla nulla) è una soluzione di S se e solo se $b = (0)$.

F **V** b) se X è una soluzione di S e X' è una soluzione di S_0, allora $X + X'$ è una soluzione di S_0.

F **V** c) se $rango(A) = 4$, allora il sistema è compatibile.

F **V** d) se X e X' sono soluzioni di S, anche $X - X'$ è una soluzione di S.

Nome e cognome .... **Num. Matr.** ....

Geometria e Algebra t
24/02/2011

Marcare con una **crocetta** *su* **V** *le affermazioni ritenute vere e su* **F** *le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, −1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1) La seguente applicazione T è lineare:

F **V** a) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $T(x) = -3x$.

F **V** b) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, con $T\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\big) = a + b + c + d$.

F **V** c) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_{2,1}(\mathbb{R})$, con $T\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\big) = \begin{pmatrix} ac \\ bd \end{pmatrix}$.

F **V** d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $T(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2) Siano U e V sottospazi vettoriali, di dimensione 2 e 4 rispettivamente, di uno spazio vettoriale di dimensione n. Se $U \cap V = (0)$ allora:

F **V** a) $n = 6$.

F **V** b) $3 \leq n$ e $4 \leq n$.

F **V** c) $n \geqslant 7$.

F **V** d) $n \leq 6$.

3) Le seguenti equazioni sono quelle di un retta nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

F **V** a) $\begin{cases} x_1 = t + 6u - 1 \\ x_2 = -2t + 3u \\ x_3 = 3t + 3u + 1 \\ x_4 = -t - 3u + 4 \end{cases}$ (con $t, u \in \mathbb{R}$)

F **V** b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$

F **V** c) $\begin{cases} x_1 = \alpha - 2\beta + \gamma - 1 \\ x_2 = -\alpha + 2\beta - \gamma + 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 3\alpha - 6\beta + 3\gamma - 2 \end{cases}$ (con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

F **V** d) $x_4 = 4$.

4) Sia $S : AX = b$ un sistema lineare con $A \in M_{4\times5}(\mathbb{R})$ matrice dei coefficienti e $b \in M_{4\times1}(\mathbb{R})$ matrice dei termini noti. Sia poi $S_0 : AX = 0$ il sistema omogeneo associato. Allora

F **V** a) se X è una soluzione di S e X' è una soluzione di S_0, allora $X + X'$ è una soluzione di S.

F **V** b) se $rango(A) = 4$, allora il sistema è compatibile e determinato.

F **V** c) se X e X' sono soluzioni di S, anche $X + X'$ è una soluzione di S.

F **V** d) S_0 ha infinite soluzioni.

5) Il seguente sottoinsieme di vettori di $\mathbb{R}^3$ è un sistema di generatori:

F **V** a) $\{(0, 2, 0), (1, 0, 1), (1, 0, -1)\}$.

F **V** b) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 0)\}$.

F **V** c) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (2, 3, 1)\}$.

F **V** d) $\{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 3, 1), (1, 3, 2)\}$.

6) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 5 e $F : V \longrightarrow V$ un endomorfismo di V. F è diagonalizzabile se

F **V** a) ha un autospazio di dimensione 5.

F **V** b) ha un autovalore con molteplicità algebrica e geometrica uguali a 4.

F **V** c) per ogni autovalore λ di F si verifica $1 \leq MoltGeo(\lambda) = MoltAlg(\lambda) \leq \dim V$.

F **V** d) il polinomio caratteristico è $P_F(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4)(\lambda - 5)$.

7) Sia π un piano dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, parallelo alla retta r, e P un punto non contenuto in r. Allora

F **V** a) esiste un solo piano parallelo a π, ortogonale a r e passante per P.

F **V** b) se s è una retta sghemba con r, allora s non è contenuta in π.

F **V** c) se un piano contiene r, esso è parallelo a π.

F **V** d) un piano parallelo a π e contenente P non può contenere r.

8) La forma bilineare simmetrica ϕ su $\mathbb{R}^2$ è definita come segue:
$\phi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5y_1y_2$.

F **V** a) ϕ ha segnatura $(1, 1)$.

F **V** b) La matrice di ϕ è congruente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

F **V** c) ϕ è definita positiva.

F **V** d) La forma quadratica associata a ϕ è $q(x, y) = x^2 - 2xy + 5y^2$.

9) Sia $G : \mathbb{R}[t]_{\leq 3} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ una trasformazione lineare.

F **V** a) G può essere iniettiva ma non suriettiva.

F **V** b) G può non essere un isomorfismo.

F **V** c) Se $\operatorname{Im} G = L(\{\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\})$ allora il rango di una matrice associata a G è 1.

F **V** d) Se $\dim(\operatorname{Im} G) = 2$ allora $\dim(\ker G) \geq 2$.