Soluzioni commentate dei quiz del 27 gennaio 2011 (versione 1)

Quiz del primo appello.

1. Sia $(V, \langle \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo, $v, w \in V$. Allora:

   (a) se $\langle v, w\rangle = 0$, allora $v = 0$ oppure $w = 0$.

   (b) se $\langle v, w\rangle = 2$, allora $\langle 3v, 3w\rangle = 18$.

   (c) è sempre possibile completare $\{v\}$ a una base ortogonale di V.

   (d) risulta $\langle v, w + v\rangle \geq \langle v, w\rangle$.

   Commento.

   (a) Falsa. Affinché $\langle v, w\rangle = 0$ basta che $v \perp w$, per es. $\langle (1, 2), (2, -1)\rangle = 0$ in $\mathbb{R}^2$ con il prod. sc. standard.

   (b) Vera. Il prod. scal. è bilineare, ovvero lineare in ciascuna delle componenti, quindi $\langle 3v, 3w\rangle = 3\langle v, 3w\rangle = 3 \cdot 3\langle v, w\rangle = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$.

   (c) Vera. Si completa $\{v\}$ a una base qualunque, e poi si applica il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, senza normalizzare, in modo da lasciare invariato il primo vettore.

   (d) Vera. Per linearità nella seconda componente $\langle v, w + v\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, v\rangle$. Ma $\langle v, v\rangle = \|v\|^2 \geq 0$.

2. Il sottoinsieme U è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale V, con

   (a) $V = \mathbb{R}^3$ e $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = z\}$

   (b) $V = M_2(\mathbb{R})$ e $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A = 1\}$

   (c) $V = \mathbb{R}[t]$ e $U = \{p(t) \in \mathbb{R}[t] \mid 2p(1) + p(0) = 3\}$

   (d) $V = \mathbb{R}^4$ e $U = \{(x, y, 0, y) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

   Commento.

   (a) Vero. La condizione che caratterizza l'insieme U è un sistema lineare omogeneo nelle (x, y, z).

   (b) Falso. Se $\operatorname{tr} A = 1$ e $\operatorname{tr} B = 1$, allora $\operatorname{tr}(A + B) = 2$.

   (c) Falso. Se $2p(1) + p(0) = 3$, allora, detto $q(t) = 10p(t)$, risulta $2q(1) + q(0) = 10 \cdot 3$. Quindi $p(t) \in U \nRightarrow 10p(t) \in U$.

   (d) Vero. Infatti:

$$\begin{aligned} U &= \{(x, 0, 0, 0) + (0, y, 0, y) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0, 0, 0) + y(0, 1, 0, 1) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= L((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1)). \end{aligned}$$

3. Siano $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Allora

   (a) A ha segnatura $(1, 2)$.

(b) A è definita negativa.
(c) A è congruente alla matrice B.
(d) A è congruente alla matrice C.

Commento.

(a) Vero. Il polinomio caratteristico di A è $\Delta_A(t) = (t+1)(t^2 - 3t - 7)$. Il polinomio $(t^2 - 3t - 7)$ ha una variazione dei segni dei coefficienti, quindi ha una radice positiva e una negativa. Di conseguenza $\Delta_A(t)$ ha due radici negative e una positiva: $\sigma_A = (1, 2)$.
(b) Falso. Dovrebbe essere $\sigma_A = (0, 3)$.
(c) Falso. Due matrici dello stesso ordine sono congruenti se e solo se hanno la stessa segnatura, ma $\sigma_B = (2, 1)$.
(d) Vero. Gli autovalori di una matrice diagonale sono gli elementi della diagonale principale. Quindi è chiaro che $\sigma_C = (1, 2) = \sigma_A$, e dunque A e C sono congruenti.

4. Sia F l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ tale che: $F(1, 0, 1) = (2, 0, 2)$, $F(0, 0, 1) = (0, 0, 2)$, $F(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$. Allora

(a) F è diagonalizzabile.
(b) F ammette una base spettrale ortonormale.
(c) Uno degli autospazi di F ha dimensione 2.
(d) F ha 3 autovalori distinti.

Commento.

(a) Vero. Dalla definizione di F (e di autovettore) segue che $(1, 0, 1)$ e $(0, 0, 1)$ sono due autovettori linearmente indipendenti, relativi all'autovalore 2, mentre $(1, 1, 1)$ è un autovettore non nullo relativo all'autovalore 0 (in altre parole, $(1, 1, 1)$ sta nel nucleo di F). L'endomorfismo F ammette quindi una base spettrale, perciò è diagonalizzabile.
(b) Falso. Se F ammettesse una base spettrale ortonormale, l'autospazio relativo all'autovalore 2 dovrebbe essere il complemento ortogonale di $(1, 1, 1)$, e ciò non è vero.
(c) Vero. L'autospazio U_2 ha come base $((1, 0, 1), (0, 0, 1))$
(d) Falso. Gli autovalori sono solo due: $\lambda_1 = 2$ con molteplicità (alg. e geom.) 2 e $\lambda_2 = 0$ con moltepl. 1.

5. Siano $A, B \in M_{10}(\mathbb{R})$.

(a) Se $A^2 = 0$, allora $A = 0$.
(b) Se $\det A = 0$, $\det B = 0$, allora $\det(A + B) = 0$.
(c) Se $\operatorname{tr} A \neq 0$ e $\operatorname{tr} B \neq 0$, allora $\operatorname{tr}(A + B) \neq 0$.
(d) Se $A^2 = I_{10}$, allora $A = I_{10}$ o $A = -I_{10}$.

Commento.

(a) Falso. Controesempio: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$, ovvero $a^1_2 = 1$, mentre $a^i_j = 0$ per ogni $(i, j) \neq (1, 2)$.

(b) Falso. Controesempio: si considerino le matrici diagonali $A = \mathrm{diag}(1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ e $B = \mathrm{diag}(0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, -1)$. Hanno entrambe determinante nullo, ma $A + B = \mathrm{diag}(1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, -1)$ è invertibile.

(c) Falso. Controesempio: lo stesso di (b).

(d) Falso. Controesempio: la matrice $A + B$ di (b).

6. Sia $S : A(x) = (b)$ un sistema lineare in 4 incognite.

   (a) Se S ha 5 equazioni, allora è impossibile.

   (b) Se $A \in M_4(\mathbb{R})$ e $\det A \neq 0$, allora S ha un'unica soluzione.

   (c) Se S ha due soluzioni differenti, allora ha infinite soluzioni.

   (d) Se S è impossibile, allora $\rho(A) \neq 4$.

   Commento

   (a) Falso. Se il rango di A è uguale a quello di $(A|b)$ (in tal caso sarà ≤ 4), allora per il Teor. di Rouché-Capelli il sistema è risolubile.

   (b) Vero. In tal caso il sistema è di Cramer. La soluzione è $(x) = A^{-1}(b)$.

   (c) Vero. Se il sistema non ha un'unica soluzione, esso ne ha per lo meno tante quanti gli elementi del campo degli scalari, che, per quanto ci riguarda[1], è infinito $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$.

   (d) Vero. Se fosse $\rho(A) \neq 4$, allora il sistema sarebbe di Cramer.

7. Le seguenti equazioni sono quelle di un piano nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

   (a) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x_1 = \alpha + 2\beta \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3\alpha + 6\beta \\ x_4 = 1 - \alpha - 2\beta \end{cases}$ (con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

   (c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} x_1 = 2\alpha + 1 \\ x_2 = \beta + 3 \\ x_3 = \alpha + 1 \\ x_4 = \beta + 4 \end{cases}$ (con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

   Commento

   (a) Vero. Sono due equazioni indipendenti in 4 incognite. Il sistema è quindi risolubile, e la dimensione del sottospazio delle soluzioni è $4 - 2 = 2$.

   (b) Falso. La giacitura del sottospazio descritto da tali equazioni parametriche è generata dai vettori $(1, 0, 3, -1)$ e $(2, 0, 6, -2)$, quindi ha dimensione 1 perché essi sono linearmente dipendenti.

   (c) Falso. Il sistema è incompatibile: l'insieme delle soluzioni è vuoto.

[1] Ad essere pignoli, esistono anche campi con un numero finito di elementi (ne abbiamo anche visti a lezione, gli $\mathbb{Z}_p$ con p un numero primo). Non fanno però parte dell'universo degli ingegneri (civili e ambientali).

(d) Vero. La giacitura del sottospazio descritto da tali equazioni parametriche è generata dai vettori $(2,0,1,0)$ e $(0,1,0,1)$, quindi ha dimensione 2 perché essi sono linearmente indipendenti.

8. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2 su $\mathbb{R}$, e $v_1, v_2, v_3 \in V$ un sistema di generatori di V. Allora

   (a) v_1, v_2 sono linearmente indipendenti.

   (b) v_1, v_2 sono un sistema di generatori di V.

   (c) v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.

   (d) $v_1, v_2, v_3 + v_2$ sono un sistema di generatori di V.

   Commento.

   (a) Falso. Controesempio in $\mathbb{R}^2$: $v_1 = (1,0), v_2 = (1,0), v_3 = (0,1)$.

   (b) Falso. Controesempio in $\mathbb{R}^2$: $v_1 = (1,0), v_2 = (1,0), v_3 = (0,1)$.

   (c) Vero. Un sistema di generatori con più elementi di una base è sempre lin. dip.

   (d) Vero. $L(v_1, v_2, v_3 + v_2)$ contiene evidentemente v_1 e v_2, ma anche $v_3 = -v_2 + (v_3 + v_2)$, quindi contiene anche $L(v_1, v_2, v_3) = V$.

9. Se due rette r e r' di $\mathbb{R}^3$ sono sghembe, allora

   (a) esistono due piani paralleli π e π', con $r \subseteq \pi$ e $r' \subseteq \pi'$.

   (b) la distanza tra r e r' è positiva.

   (c) esiste una retta incidente e ortogonale sia a r sia a r'.

   (d) esiste una retta r'' parallela sia a r sia a r'.

   Commento.

   (a) Vero. Vedi per es. Prop. 11.13 a pag 214 di *Geometria*, Casali et al., 2010.

   (b) Vero. Segue da (a): $\mathrm{d}(r, r') = \mathrm{d}(\pi, \pi') > 0$.

   (c) Vero. Vedi per es. Prop. 11.14. a pag. 215 di *Geometria*, Casali et al., 2010.

   (d) Falso. Se $r \parallel r''$ e $r' \parallel r''$, allora $r \parallel r'$.

Quiz del secondo parziale che differivano da quelli del primo appello.

2. In $\mathbb{R}^4$, con il prodotto scalare standard, sia U il sottospazio vettoriale generato da $(1,0,2,-1)$ e $(3,1,0,0)$. Allora

   (a) il vettore $(0,1,1,2)$ appartiene a ${}^{\perp}U$.

   (b) il sottospazio ${}^{\perp}U$ ha equazioni cartesiane $\begin{cases} x+2z-t=0 \\ 3x+y=0. \end{cases}$

   (c) esiste un vettore non nullo di U, ortogonale a $(1,0,2,-1)$.

   (d) $\dim({}^{\perp}U) = \dim U$.

   Commento.

   (a) Falso. $(0,1,1,2)$ è ortogonale a $(1,0,2,-1)$ ma non a $(3,1,0,0)$.

   (b) Vero. Le equazioni date sono le condizioni di perpendicolarità a $(1,0,2,-1)$ e a $(3,1,0,0)$ per il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^4$.

   (c) Vero. Basta sottrarre a $(3,1,0,0)$ la sua proiezione su $(1,0,2,-1)$ (procedimento di Gram-Schmidt).
   $(3,1,0,0) - \frac{\langle(3,1,0,0),(1,0,2,-1)\rangle}{\langle(1,0,2,-1),(1,0,2,-1)\rangle}(1,0,2,-1) = (3,1,0,0) - \frac{3}{6}(1,0,2,-1) = (\frac{5}{2},1,-1,\frac{1}{2})$

   (d) Vero. Infatti $\dim U = 2$, e $\dim({}^{\perp}U) = 4 - \dim U = 2 = \dim U$.

5. Un endomorfismo T di $\mathbb{R}^4$ che ha

   (a) come polinomio caratteristico $p_T(\lambda) = \lambda^4 - 1$ è diagonalizzabile.

   (b) come polinomio caratteristico $p_T(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3)$ non è diagonalizzabile.

   (c) un autovalore di molteplicità algebrica 3 e $\dim\ker(T) = 3$ è diagonalizzabile.

   (d) come polinomio caratteristico $\lambda^4 - 5\lambda^2 + 4$ è diagonalizzabile.

   Commento.

   (a) Falso. Poiché la fattorizzazione in $\mathbb{R}$ di $p_T(\lambda)$ è $(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda^2+1)$, e λ^2+1 non ha zeri reali, si deduce che T ha solo due autovalori (1 e -1) con molteplicità 1, quindi non è diagonalizzabile.

   (b) Falso. Il polinomio $(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-3)$ non può essere il polinomio caratteristico di un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$.

   (c) Vero. Se $\dim\ker(T) = 3$, il numero 0 è un autovalore di molteplicità geometrica 3. Ma allora deve avere molteplicità algebrica maggiore o uguale a 3: per l'ipotesi, deve avere molt. alg. esattamente 3. Ne segue che il polinomio caratteristico è del tipo $\lambda^3(\lambda-\lambda_1)$ con $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ non nullo. Quindi λ_1 è un autovalore di molteplicità algebrica (e quindi geometrica) 1. Di conseguenza T è diagonalizzabile.

   (d) Vero. Poiché $\lambda^4-5\lambda^2+4 = (\lambda^2-1)(\lambda^2-4) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+2)$, l'endomorfismo T ha 4 autovalori distinti, quindi è diagonalizzabile.

6. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Allora

   (a) A e B sono simili.

   (b) A e B sono congruenti.

(c) A è definita positiva.

(d) B è definita negativa.

Commento.

(a) Vero. A e B sono simmetriche e hanno lo stesso polinomio caratteristico, perché hanno stessa traccia e stesso determinante: dunque sono simili.

(b) Vero. A e B hanno gli stessi autovalori (di segno opposto, perché il determinante è negativo).

(c) Falso. Gli autovalori dovrebbero essere tutti positivi. Oppure: $\det A < 0$, quindi il criterio di Sylvester non è verificato.

(d) Falso. Gli autovalori dovrebbero essere tutti negativi. Oppure: $\det A < 0$, quindi il criterio di Sylvester non è verificato.

8. Sia r la retta di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=4 \end{cases}$. Allora

(a) r è ortogonale all'asse x (equazioni cartesiane: $y=0$, $z=0$).

(b) r è parallela all'asse z (equazioni cartesiane: $x=0$, $y=0$).

(c) r è parallela al piano xy (equazione cartesiana $z=0$).

(d) r è ortogonale al piano xy (equazione cartesiana $z=0$).

Commento.

Osserviamo che la retta può essere descritta anche dalle equazioni $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$, quindi è la retta che passa per il punto $(3,-1,0)$ e ha direzione $(0,0,1)$.

(a) Vero. L'asse x ha direzione $L(1,0,0)$ che è ortogonale a $(1,0,0)$

(b) Vero. L'asse z ha direzione $L((0,0,1))$.

(c) Falso. La giacitura del piano xy è $L((1,0,0),(0,1,0))$.

(d) Vero. Vedi (c).