27 Gennaio 2011 QUIZ SECONDO PARZIALE

Nome Cognome: **Num. Matr.:**

Marcare con una crocetta su **V** le affermazioni ritenute vere e su **F** le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.

Versione 1

1. Sia $(V, \langle \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo, e $v, w \in V$. Allora:
   (a) se $\langle v, w\rangle = 0$, allora $v = 0$ oppure $w = 0$.
   (b) se $\langle v, w\rangle = 2$, allora $\langle 3v, 3w\rangle = 18$.
   (c) è sempre possibile completare $\{v\}$ a una base ortogonale di V.
   (d) risulta $\langle v, w + v\rangle \geq \langle v, w\rangle$.

2. In $\mathbb{R}^4$, con il prodotto scalare standard, sia U il sottospazio vettoriale generato da $(1, 0, 2, -1)$ e $(3, 1, 0, 0)$. Allora
   (a) il vettore $(0, 1, 1, 2)$ appartiene a $U^\perp$.
   (b) il sottospazio $U^\perp$ ha equazioni cartesiane $x + 2z - t = 0, 3x + y = 0$
   (c) esiste un vettore non nullo di U, ortogonale a $(1, 0, 2, -1)$.
   (d) $\dim(U^\perp) = \dim U$.

3. Siano $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Allora
   (a) A ha segnatura $(1, 2)$.
   (b) A è definita negativa.
   (c) A è congruente alla matrice B.
   (d) A è congruente alla matrice C.

4. Sia F l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ tale che: $F(1, 0, 1) = (2, 0, 2)$, $F(0, 0, 1) = (0, 0, 2)$, $F(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$. Allora
   (a) F è diagonalizzabile.
   (b) F ammette una base spettrale ortonormale.
   (c) Uno degli autospazi di F ha dimensione 2.
   (d) F ha 3 autovalori distinti.

5. L'endomorfismo T di $\mathbb{R}^4$ che ha
   (a) come polinomio caratteristico $p_T(\lambda) = \lambda^4 - 1$ è diagonalizzabile;
   (b) come polinomio caratteristico $p_T(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3)$ non è diagonalizzabile;
   (c) un autovalore di molteplicità algebrica 3 e $\dim \ker(T) = 3$ è diagonalizzabile;
   (d) come polinomio caratteristico $p_T(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 + 4$ è diagonalizzabile;

6. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Allora
   (a) A e B sono simili.
   (b) A e B sono congruenti.
   (c) A è definita positiva.
   (d) B è definita negativa.

7. Le seguenti equazioni sono quelle di un piano nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:
   (a) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} x_1 = \alpha + 2\beta \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3\alpha + 6\beta \\ x_4 = 1 - \alpha - 2\beta \end{cases}$ (con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)
   (c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$
   (d) $\begin{cases} x_1 = 2\alpha + 1 \\ x_2 = \beta + 3 \\ x_3 = \alpha + 1 \\ x_4 = \beta + 4 \end{cases}$ (con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

8. Sia r la retta di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$. Allora
   (a) r è ortogonale all'asse x
   (b) r è parallela all'asse z
   (c) r è parallela al piano xy
   (d) r è ortogonale al piano xy

9. Se due rette r e r' di $\mathcal{E}^3$ sono sghembe, allora
   (a) esistono due piani paralleli π e π', con $r \subseteq \pi$ e $r' \subseteq \pi'$.
   (b) la distanza tra r e r' è positiva.
   (c) esiste una retta incidente e ortogonale sia a r sia a r'.
   (d) esiste una retta r'' parallela sia a r sia a r'.