Nome Cognome:

Num. Matr.:

Marcare con una crocetta su **V** le affermazioni ritenute vere e su **F** le affermazioni ritenute false. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.

Versione 7

1. Due rette r e r' di $\mathbb{R}^3$ sono sghembe se
 - (a) la distanza tra r e r' è positiva.
 - (b) r e r' non sono complanari.
 - (c) esistono due piani paralleli distinti π e π' , con $r \subseteq \pi$ e $r' \subseteq \pi'$.
 - (d) sono disgiunte e non esiste una retta r'' parallela sia a r sia a r' .

2. In $\mathbb{R}^4$, con il prodotto scalare standard, sia U il sottospazio vettoriale generato da $(1, 0, 2, -1)$ e $(3, 1, 0, 0)$. Allora
 - (a) il vettore $(0, 0, 1, 2)$ appartiene a $U^\perp$.
 - (b) $\dim(U^\perp) = 4 - \dim U$.
 - (c) il sottospazio $U^\perp$ ha equazioni cartesiane $x + 2z - t = 0, 4x + y + 2z - t = 0$
 - (d) non esiste un vettore non nullo di U , ortogonale a $(1, 0, 2, -1)$.

3. Siano $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Allora
 - (a) B ha segnatura $(1, 2)$.
 - (b) B è definita negativa.
 - (c) B è congruente alla matrice C .
 - (d) B è congruente alla matrice D .

4. Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che: $F(1, 0, 1) = (-2, 0, -2)$, $F(1, 0, 0) = (-2, 0, 0)$, $F(0, -1, 0) = (0, 0, 0)$. Allora
 - (a) F non è diagonalizzabile.
 - (b) F ammette una base spettrale ortonormale.
 - (c) Uno degli autovalori di F ha molteplicità geometrica 2.
 - (d) F ha un solo autovalore non nullo.

5. L'endomorfismo T di $\mathbb{R}^4$ che ha

- (a) un autospazio di dimensione 3 è diagonalizzabile;
- (b) come polinomio caratteristico $p_T(\lambda) = \lambda^4 + 5\lambda^2 + 4$ è diagonalizzabile;
- (c) come equazioni $T(x, y, z, t) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t)$ è diagonalizzabile;
- (d) come polinomio caratteristico $p_T(\lambda) = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1)$ non è diagonalizzabile;

6. Siano $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Allora

- (a) C e D sono simili.
- (b) C e D sono congruenti.
- (c) C non è definita positiva.
- (d) D è definita negativa.

7. Le seguenti equazioni sono quelle di un piano nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

- (a)
$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$
- (b)
$$\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3\alpha + 6\beta \\ x_4 = 1 - \alpha - 2\beta \end{cases} \quad (\text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R})$$
- (c)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$
- (d)
$$\begin{cases} x_1 = 2\alpha + 4\gamma + 1 \\ x_2 = \beta + 4 \\ x_3 = \alpha + 2\gamma + 1 \\ x_4 = \alpha + \beta + \gamma \end{cases} \quad (\text{con } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$$

8. Sia r la retta di $\mathbb{R}^3$ di equazioni $\begin{cases} x + z = 2 \\ x - z = 4 \end{cases}$. Allora

- (a) r è parallela all'asse z
- (b) r è ortogonale all'asse y
- (c) r è parallela al piano xy
- (d) r è ortogonale al piano xz

9. Sia $(V, \langle \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo, e $v, w \in V$. Allora

- (a) risulta $\langle v, w \rangle \leq \langle v + w, w \rangle$.
- (b) se $v = 0$ oppure $w = 0$, allora $\langle v, w \rangle = 0$.
- (c) se $\langle v, w \rangle = 6$, allora $\langle 3v, 3w \rangle = 18$.
- (d) è sempre possibile completare $\{v, w\}$ a una base ortogonale di V .