Nome Cognome: .... **Num. Matr.:** ....

I appello, 27 gennaio 2011 - v1

Marcare con **V** *le affermazioni ritenute vere e con* **F** *le affermazioni ritenute false. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1. Sia $(V, \langle \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo, $v, w \in V$. Allora:
   (a) se $\langle v, w\rangle = 0$, allora $v = 0$ oppure $w = 0$.
   (b) se $\langle v, w\rangle = 2$, allora $\langle 3v, 3w\rangle = 18$.
   (c) è sempre possibile completare $\{v\}$ a una base ortogonale di V.
   (d) risulta $\langle v, w + v\rangle \geq \langle v, w\rangle$.

2. Il sottoinsieme U è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale V, con
   (a) $V = \mathbb{R}^3$ e $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = z\}$
   (b) $V = M_2(\mathbb{R})$ e $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A = 1\}$
   (c) $V = \mathbb{R}[t]$ e $U = \{p(t) \in \mathbb{R}[t] \mid 2p(1) + p(0) = 3\}$
   (d) $V = \mathbb{R}^4$ e $U = \{(x, y, 0, y) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

3. Siano $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Allora
   (a) A ha segnatura $(1, 2)$.
   (b) A è definita negativa.
   (c) A è congruente alla matrice B.
   (d) A è congruente alla matrice C.

4. Sia F l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ tale che: $F(1, 0, 1) = (2, 0, 2)$, $F(0, 0, 1) = (0, 0, 2)$, $F(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$. Allora
   (a) F è diagonalizzabile.
   (b) F ammette una base spettrale ortonormale.
   (c) Uno degli autospazi di F ha dimensione 2.
   (d) F ha 3 autovalori distinti.

5. Siano $A, B \in M_{10}(\mathbb{R})$.
   (a) Se $A^2 = 0$, allora $A = 0$.
   (b) Se $\det A = 0$, $\det B = 0$, allora $\det(A + B) = 0$.
   (c) Se $\operatorname{tr} A \neq 0$ e $\operatorname{tr} B \neq 0$, allora $\operatorname{tr}(A + B) \neq 0$.
   (d) Se $A^2 = I_{10}$, allora $A = I_{10}$ o $A = -I_{10}$.

6. Sia $S : A(x) = (b)$ un sistema lineare in 4 incognite.

   (a) Se S ha 5 equazioni, allora è impossibile.
   (b) Se $A \in M_4(\mathbb{R})$ e $\det A \neq 0$, allora S ha un'unica soluzione.
   (c) Se S ha due soluzioni differenti, allora ha infinite soluzioni.
   (d) Se S è impossibile, allora $\rho(A) \neq 4$.

7. Le seguenti equazioni sono quelle di un piano nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

   (a) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x_1 = \alpha + 2\beta \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3\alpha + 6\beta \\ x_4 = 1 - \alpha - 2\beta \end{cases}$ (con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

   (c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} x_1 = 2\alpha + 1 \\ x_2 = \beta + 3 \\ x_3 = \alpha + 1 \\ x_4 = \beta + 4 \end{cases}$ (con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

8. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2 su $\mathbb{R}$, e $v_1, v_2, v_3 \in V$ un sistema di generatori di V. Allora

   (a) v_1, v_2 sono linearmente indipendenti.
   (b) v_1, v_2 sono un sistema di generatori di V.
   (c) v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.
   (d) $v_1, v_2, v_3 + v_2$ sono un sistema di generatori di V.

9. Se due rette r e r' di $\mathbb{R}^3$ sono sghembe, allora

   (a) esistono due piani paralleli π e π', con $r \subseteq \pi$ e $r' \subseteq \pi'$.
   (b) la distanza tra r e r' è positiva.
   (c) esiste una retta incidente e ortogonale sia a r sia a r'.
   (d) esiste una retta r'' parallela sia a r sia a r'.

Nome Cognome: .... **Num. Matr.:** ....

I appello, 27 gennaio 2011 - v2

Marcare con **V** *le affermazioni ritenute vere e con* **F** *le affermazioni ritenute false. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1. Sia $(V, \langle \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo, $v, w \in V$. Allora
   (a) se $v = 0$ oppure $w = 0$, allora $\langle v, w \rangle = 0$.
   (b) se $\langle v, w \rangle = 6$, allora $\langle 3v, 3w \rangle = 18$.
   (c) è sempre possibile completare $\{v, w\}$ a una base ortogonale di V.
   (d) risulta $\langle v, w \rangle \leq \langle v + w, w \rangle$.

2. Il sottoinsieme U è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale V, con
   (a) $V = \mathbb{R}^3$ e $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 2\}$
   (b) $V = M_2(\mathbb{R})$ e $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 0\}$
   (c) $V = \mathbb{R}[t]$ e $U = \{p(t) \in \mathbb{R}[t] \mid 2p(1) + p(3) = 0\}$
   (d) $V = \mathbb{R}^4$ e $U = \{(x, 0, y, x + y) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

3. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Allora
   (a) A ha segnatura $(1, 2)$.
   (b) A è definita negativa.
   (c) A è congruente alla matrice B.
   (d) A è congruente alla matrice C.

4. Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che: $F(1, 0, 1) = (-2, 0, -2)$, $F(1, 0, 0) = (-2, 0, 0)$, $F(0, -1, 0) = (0, 0, 0)$. Allora
   (a) F non è diagonalizzabile.
   (b) F ammette una base spettrale ortonormale.
   (c) Uno degli autovalori di F ha molteplicità geometrica 2.
   (d) F ha un solo autovalore non nullo.

5. Siano $A, B \in M_{10}(\mathbb{R})$.
   (a) Se $AB = 0$, allora $A = 0$ oppure $B = 0$.
   (b) Se $\det A = 0$ o $\det B = 0$, allora $\det(AB) = 0$.
   (c) Se $\operatorname{tr} A = 0$ e $\operatorname{tr} B \neq 0$, allora $\operatorname{tr}(A + B) \neq 0$.
   (d) Se A ha 91 elementi non nulli, allora $\det A \neq 0$.

6. Sia $S : A(x) = (b)$ un sistema lineare in 4 incognite.

   (a) Se S ha 3 equazioni, allora è indeterminato.

   (b) Se $A \in M_4(\mathbb{R})$, allora S ha un'unica soluzione.

   (c) S non può avere esattamente 3 soluzioni.

   (d) Se $\rho(A) \neq 4$, allora S è impossibile.

7. Le seguenti equazioni sono quelle di un piano nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

   (a) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3\alpha + 6\beta \\ x_4 = 1 - \alpha - 2\beta \end{cases}$ (con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

   (c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} x_1 = 2\alpha + 4\gamma + 1 \\ x_2 = \beta + 4 \\ x_3 = \alpha + 2\gamma + 1 \\ x_4 = \alpha + \beta + \gamma \end{cases}$ (con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$)

8. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 su $\mathbb{R}$, e $v_1, v_2, v_3 \in V$ un sistema di generatori di V. Allora

   (a) v_1, v_2 sono linearmente indipendenti.

   (b) v_1, v_2 sono un sistema di generatori di V.

   (c) v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.

   (d) $v_1, v_2, v_3 + v_2$ sono un sistema di generatori di V.

9. Due rette r e r' di $\mathbb{R}^3$ sono sghembe se

   (a) esistono due piani paralleli distinti π e π', con $r \subseteq \pi$ e $r' \subseteq \pi'$.

   (b) sono disgiunte e non esiste una retta r'' parallela sia a r sia a r'.

   (c) la distanza tra r e r' è positiva.

   (d) r e r' non sono complanari.

Nome Cognome: .... **Num. Matr.:** ....

I appello, 27 gennaio 2011 - v3

Marcare con **V** *le affermazioni ritenute vere e con* **F** *le affermazioni ritenute false. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1. Due rette r e r' di $\mathbb{R}^3$ sono sghembe se
   (a) sono disgiunte e non esiste una retta r'' parallela sia a r sia a r'.
   (b) r e r' non sono complanari.
   (c) la distanza tra r e r' è positiva.
   (d) esistono due piani paralleli distinti π e π', con $r \subseteq \pi$ e $r' \subseteq \pi'$.

2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2 su $\mathbb{R}$, e $v_1, v_2, v_3 \in V$ un sistema di generatori di V. Allora
   (a) $v_1, v_2, v_3 + v_2$ sono un sistema di generatori di V
   (b) v_1, v_2 sono un sistema di generatori di V.
   (c) v_1, v_2 sono linearmente indipendenti.
   (d) v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti. .

3. Le seguenti equazioni sono quelle di un piano nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:
   (a) $\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3\alpha + 6\beta \\ x_4 = 1 - \alpha - 2\beta \end{cases}$ (con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)
   (b) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$
   (c) $\begin{cases} x_1 = 2\alpha + 4\gamma + 1 \\ x_2 = \beta + 4 \\ x_3 = \alpha + 2\gamma + 1 \\ x_4 = \alpha + \beta + \gamma \end{cases}$ (con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$)
   (d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

4. Sia $S : A(x) = (b)$ un sistema lineare in 4 incognite.
   (a) Se $A \in M_4(\mathbb{R})$ e $\det A \neq 0$, allora S ha un'unica soluzione.
   (b) Se S è impossibile, allora $\rho(A) \neq 4$.
   (c) Se S ha due soluzioni differenti, allora ha infinite soluzioni.
   (d) Se S ha 5 equazioni, allora è impossibile.

5. Sia $(V, \langle \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo, $v, w \in V$. Allora

   (a) se $\langle v, w \rangle = 6$, allora $\langle 3v, 3w \rangle = 18$.
   (b) risulta $\langle v, w \rangle \leq \langle v + w, w \rangle$.
   (c) è sempre possibile completare $\{v, w\}$ a una base ortogonale di V.
   (d) se $v = 0$ oppure $w = 0$, allora $\langle v, w \rangle = 0$.

6. Sia F l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ tale che: $F(1,0,1) = (2,0,2)$, $F(0,0,1) = (0,0,2)$, $F(1,1,1) = (0,0,0)$. Allora

   (a) F ammette una base spettrale ortonormale.
   (b) F è diagonalizzabile.
   (c) F ha 3 autovalori distinti.
   (d) Uno degli autospazi di F ha dimensione 2.

7. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Allora

   (a) A è congruente alla matrice B.
   (b) A è congruente alla matrice C.
   (c) A è definita negativa.
   (d) A ha segnatura $(1,2)$.

8. Il sottoinsieme U è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale V, con

   (a) $V = \mathbb{R}[t]$ e $U = \{p(t) \in \mathbb{R}[t] \mid 2p(1) + p(0) = 3\}$
   (b) $V = M_2(\mathbb{R})$ e $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}\, A = 1\}$
   (c) $V = \mathbb{R}^4$ e $U = \{(x,y,0,y) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
   (d) $V = \mathbb{R}^3$ e $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = z\}$

9. Siano $A, B \in M_{10}(\mathbb{R})$.

   (a) Se $AB = 0$, allora $A = 0$ oppure $B = 0$.
   (b) Se $\mathrm{tr}\, A = 0$ e $\mathrm{tr}\, B \neq 0$, allora $\mathrm{tr}\,(A + B) \neq 0$.
   (c) Se $\det A = 0$ o $\det B = 0$, allora $\det(AB) = 0$.
   (d) Se A ha 91 elementi non nulli, allora $\det A \neq 0$.

Nome Cognome: .... **Num. Matr.:** ....

I appello, 27 gennaio 2011 - v4

Marcare con **V** *le affermazioni ritenute vere e con* **F** *le affermazioni ritenute false. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1. Se due rette r e r' di $\mathbb{R}^3$ sono sghembe, allora
   (a) esistono due piani paralleli π e π', con $r \subseteq \pi$ e $r' \subseteq \pi'$.
   (b) esiste una retta incidente e ortogonale sia a r sia a r'.
   (c) la distanza tra r e r' è positiva.
   (d) esiste una retta r'' parallela sia a r sia a r'.

2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 su $\mathbb{R}$, e $v_1, v_2, v_3 \in V$ un sistema di generatori di V. Allora
   (a) v_1, v_2 sono un sistema di generatori di V.
   (b) v_1, v_2 sono linearmente indipendenti.
   (c) $v_1, v_2, v_3 + v_2$ sono un sistema di generatori di V.
   (d) v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.

3. Le seguenti equazioni sono quelle di un piano nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:
   (a) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$
   (c) $\begin{cases} x_1 = \alpha + 2\beta \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3\alpha + 6\beta \\ x_4 = 1 - \alpha - 2\beta \end{cases}$ (con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)
   (d) $\begin{cases} x_1 = 2\alpha + 1 \\ x_2 = \beta + 3 \\ x_3 = \alpha + 1 \\ x_4 = \beta + 4 \end{cases}$ (con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

4. Sia $S : A(x) = (b)$ un sistema lineare in 4 incognite.
   (a) S non può avere esattamente 3 soluzioni.
   (b) Se S ha 3 equazioni, allora è indeterminato.
   (c) Se $A \in M_4(\mathbb{R})$, allora S ha un'unica soluzione.
   (d) Se $\rho(A) \neq 4$, allora S è impossibile.

5. Sia $(V, \langle \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo, $v, w \in V$. Allora:

   (a) risulta $\langle v, w + v\rangle \geq \langle v, w\rangle$.

   (b) se $\langle v, w\rangle = 0$, allora $v = 0$ oppure $w = 0$.

   (c) è sempre possibile completare $\{v\}$ a una base ortogonale di V.

   (d) se $\langle v, w\rangle = 2$, allora $\langle 3v, 3w\rangle = 18$.

6. Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che: $F(1, 0, 1) = (-2, 0, -2)$, $F(1, 0, 0) = (-2, 0, 0)$, $F(0, -1, 0) = (0, 0, 0)$. Allora

   (a) F ha un solo autovalore non nullo.

   (b) F ammette una base spettrale ortonormale.

   (c) F non è diagonalizzabile.

   (d) Uno degli autovalori di F ha molteplicità geometrica 2.

7. Siano $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Allora

   (a) A è definita negativa.

   (b) A è congruente alla matrice B.

   (c) A ha segnatura $(1, 2)$.

   (d) A è congruente alla matrice C.

8. Il sottoinsieme U è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale V, con

   (a) $V = \mathbb{R}^3$ e $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 2\}$

   (b) $V = M_2(\mathbb{R})$ e $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det A = 0\}$

   (c) $V = \mathbb{R}[t]$ e $U = \{p(t) \in \mathbb{R}[t] \mid 2p(1) + p(3) = 0\}$

   (d) $V = \mathbb{R}^4$ e $U = \{(x, 0, y, x + y) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

9. Siano $A, B \in M_{10}(\mathbb{R})$.

   (a) Se $A^2 = 0$, allora $A = 0$.

   (b) Se $\det A = 0$, $\det B = 0$, allora $\det(A + B) = 0$.

   (c) Se $\operatorname{tr} A \neq 0$ e $\operatorname{tr} B \neq 0$, allora $\operatorname{tr}(A + B) \neq 0$.

   (d) Se $A^2 = I_{10}$, allora $A = I_{10}$ o $A = -I_{10}$.

Nome Cognome: .... **Num. Matr.:** ....

I appello, 27 gennaio 2011 - v5

Marcare con **V** *le affermazioni ritenute vere e con* **F** *le affermazioni ritenute false. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Allora
   (a) A è congruente alla matrice C.
   (b) A ha segnatura $(1, 2)$.
   (c) A è congruente alla matrice B.
   (d) A è definita negativa.

2. Siano $A, B \in M_{10}(\mathbb{R})$.
   (a) Se A ha 91 elementi non nulli, allora $\det A \neq 0$.
   (b) Se $\det A = 0$ o $\det B = 0$, allora $\det(AB) = 0$.
   (c) Se $AB = 0$, allora $A = 0$ oppure $B = 0$.
   (d) Se $\operatorname{tr} A = 0$ e $\operatorname{tr} B \neq 0$, allora $\operatorname{tr}(A + B) \neq 0$.

3. Sia $S : A(x) = (b)$ un sistema lineare in 4 incognite.
   (a) Se S è impossibile, allora $\rho(A) \neq 4$.
   (b) Se $A \in M_4(\mathbb{R})$ e $\det A \neq 0$, allora S ha un'unica soluzione.
   (c) Se S ha due soluzioni differenti, allora ha infinite soluzioni.
   (d) Se S ha 5 equazioni, allora è impossibile.

4. Il sottoinsieme U è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale V, con
   (a) $V = \mathbb{R}^3$ e $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = z\}$
   (b) $V = \mathbb{R}^4$ e $U = \{(x, y, 0, y) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
   (c) $V = M_2(\mathbb{R})$ e $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A = 1\}$
   (d) $V = \mathbb{R}[t]$ e $U = \{p(t) \in \mathbb{R}[t] \mid 2p(1) + p(0) = 3\}$

5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 su $\mathbb{R}$, e $v_1, v_2, v_3 \in V$ un sistema di generatori di V. Allora
   (a) v_1, v_2 sono linearmente indipendenti.
   (b) v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.
   (c) $v_1, v_2, v_3 + v_2$ sono un sistema di generatori di V.
   (d) v_1, v_2 sono un sistema di generatori di V.

6. Due rette r e r' di $\mathbb{R}^3$ sono sghembe se

(a) la distanza tra r e r' è positiva.

(b) r e r' non sono complanari.

(c) esistono due piani paralleli distinti π e π', con $r \subseteq \pi$ e $r' \subseteq \pi'$.

(d) sono disgiunte e non esiste una retta r'' parallela sia a r sia a r'.

7. Sia $(V, \langle \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo, $v, w \in V$. Allora:

(a) se $\langle v, w \rangle = 2$, allora $\langle 3v, 3w \rangle = 18$.

(b) è sempre possibile completare $\{v\}$ a una base ortogonale di V.

(c) se $\langle v, w \rangle = 0$, allora $v = 0$ oppure $w = 0$.

(d) risulta $\langle v, w + v \rangle \geq \langle v, w \rangle$.

8. Le seguenti equazioni sono quelle di un piano nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

(a) $\begin{cases} x_1 = \alpha + 2\beta \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3\alpha + 6\beta \\ x_4 = 1 - \alpha - 2\beta \end{cases}$ (con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

(b) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 = 2\alpha + 1 \\ x_2 = \beta + 3 \\ x_3 = \alpha + 1 \\ x_4 = \beta + 4 \end{cases}$ (con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

(d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

9. Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che: $F(1,0,1) = (-2,0,-2)$, $F(1,0,0) = (-2,0,0)$, $F(0,-1,0) = (0,0,0)$. Allora

(a) F non è diagonalizzabile.

(b) F ha un solo autovalore non nullo.

(c) F ammette una base spettrale ortonormale.

(d) Uno degli autovalori di F ha molteplicità geometrica 2.

Nome Cognome: .... **Num. Matr.:** ....

I appello, 27 gennaio 2011 - v6

Marcare con **V** *le affermazioni ritenute vere e con* **F** *le affermazioni ritenute false. Per ognuno dei nove quesiti vi possono essere da 0 a 4 affermazioni vere. Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 in caso di astensione. Non è consentito l'utilizzo di alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.*

1. Sia $S : A(x) = (b)$ un sistema lineare in 4 incognite.
   (a) Se S ha 5 equazioni, allora è impossibile.
   (b) Se S è impossibile, allora $\rho(A) \neq 4$.
   (c) Se S ha due soluzioni differenti, allora ha infinite soluzioni.
   (d) Se $A \in M_4(\mathbb{R})$ e $\det A \neq 0$, allora S ha un'unica soluzione.

2. Se due rette r e r' di $\mathbb{R}^3$ sono sghembe, allora
   (a) esiste una retta incidente e ortogonale sia a r sia a r'.
   (b) esiste una retta r'' parallela sia a r sia a r'.
   (c) esistono due piani paralleli π e π', con $r \subseteq \pi$ e $r' \subseteq \pi'$.
   (d) la distanza tra r e r' è positiva.

3. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Allora
   (a) A ha segnatura $(1, 2)$.
   (b) A è congruente alla matrice C.
   (c) A è definita negativa.
   (d) A è congruente alla matrice B.

4. Le seguenti equazioni sono quelle di un piano nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:
   (a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3\alpha + 6\beta \\ x_4 = 1 - \alpha - 2\beta \end{cases}$ (con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)
   (c) $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$
   (d) $\begin{cases} x_1 = 2\alpha + 4\gamma + 1 \\ x_2 = \beta + 4 \\ x_3 = \alpha + 2\gamma + 1 \\ x_4 = \alpha + \beta + \gamma \end{cases}$ (con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$)

5. Il sottoinsieme U è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale V, con

   (a) $V = \mathbb{R}^3$ e $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = z\}$
   (b) $V = \mathbb{R}^4$ e $U = \{(x, y, 0, y) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
   (c) $V = \mathbb{R}[t]$ e $U = \{p(t) \in \mathbb{R}[t] \mid 2p(1) + p(0) = 3\}$
   (d) $V = M_2(\mathbb{R})$ e $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A = 1\}$

6. Sia $(V, \langle \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo, $v, w \in V$. Allora:

   (a) se $\langle v, w \rangle = 0$, allora $v = 0$ oppure $w = 0$.
   (b) è sempre possibile completare $\{v\}$ a una base ortogonale di V.
   (c) se $\langle v, w \rangle = 2$, allora $\langle 3v, 3w \rangle = 18$.
   (d) risulta $\langle v, w + v \rangle \geq \langle v, w \rangle$.

7. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 su $\mathbb{R}$, e $v_1, v_2, v_3 \in V$ un sistema di generatori di V. Allora

   (a) v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.
   (b) v_1, v_2 sono linearmente indipendenti.
   (c) $v_1, v_2, v_3 + v_2$ sono un sistema di generatori di V.
   (d) v_1, v_2 sono un sistema di generatori di V.

8. Sia F l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che: $F(1, 0, 1) = (-2, 0, -2)$, $F(1, 0, 0) = (-2, 0, 0)$, $F(0, -1, 0) = (0, 0, 0)$. Allora

   (a) Uno degli autovalori di F ha molteplicità geometrica 2.
   (b) F non è diagonalizzabile.
   (c) F ammette una base spettrale ortonormale.
   (d) F ha un solo autovalore non nullo.

9. Siano $A, B \in M_{10}(\mathbb{R})$.

   (a) Se $\operatorname{tr} A \neq 0$ e $\operatorname{tr} B \neq 0$, allora $\operatorname{tr}(A + B) \neq 0$.
   (b) Se $A^2 = 0$, allora $A = 0$.
   (c) Se $A^2 = I_{10}$, allora $A = I_{10}$ o $A = -I_{10}$.
   (d) Se $\det A = 0$, $\det B = 0$, allora $\det(A + B) = 0$.