

3. Le coniche come luoghi geometrici

Nel presente paragrafo daremo alcuni cenni relativi alle coniche (non degeneri) del piano euclideo $\mathcal{E}^2$, intese come particolari luoghi geometrici. Elementi più dettagliati della teoria delle coniche verranno esposti nel Capitolo 12.

◆ **Definizione 10.4.** Si dice *circonferenza* il luogo geometrico dei punti del piano $\mathcal{E}^2$ che sono equidistanti da un punto fisso C , detto *centro*. La comune distanza tra il centro ed i punti della circonferenza si dice *raggio* della circonferenza.

Fissato in $\mathcal{E}^2$ un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, se il centro è $C \equiv_{\mathcal{R}} (\alpha, \beta)$ ed il raggio è $r > 0$, allora la circonferenza $\mathcal{C} = \{P \in \mathcal{E}^2 \mid d(P, C) = r\}$ ha equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

Infatti, $P \equiv_{\mathcal{R}} (x, y) \in \mathcal{C}$ se e soltanto se $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$; sviluppando i calcoli si perviene alla equazione considerata.

In particolare, se si sceglie un riferimento cartesiano $\mathcal{R}'$ avente origine nel centro C , allora la circonferenza di centro C e raggio $r > 0$ assume equazione cartesiana:

$$(x')^2 + (y')^2 = r^2$$

◆ **Definizione 10.5.** Si dice *ellisse* il luogo geometrico dei punti del piano $\mathcal{E}^2$ che hanno costante (uguale a $2a > 0$) la somma delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2 , detti *fuochi*.

Fissato in $\mathcal{E}^2$ il riferimento cartesiano $\bar{\mathcal{R}}$ tale che $F_1 \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} (-c, 0)$ e $F_2 \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} (c, 0)$ (con $d(F_1, F_2) = 2c < 2a$), allora la ellisse $\mathcal{E} = \{P \in \mathcal{E}^2 \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}$ ha equazione cartesiana ²:

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{dove } b = \sqrt{a^2 - c^2} > 0.$$

(si veda la Figura 10.2).

Infatti, $P \equiv (x, y) \in \mathcal{E}$ se e soltanto se

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a;$$

sviluppando i calcoli (isolando i radicali ed elevando al quadrato due volte), si perviene alla equazione considerata.

Si noti che la circonferenza può essere considerata come una particolare ellisse, in cui i due fuochi coincidono.

²Per analogia, il luogo geometrico rappresentato dalla equazione

$$(1') \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

(che risulta vuoto perchè la equazione scritta non può essere verificata dalle coordinate di alcuni punto del piano euclideo), viene usualmente indicato come *ellisse vuota (o immaginaria)* di $\mathcal{E}^2$.

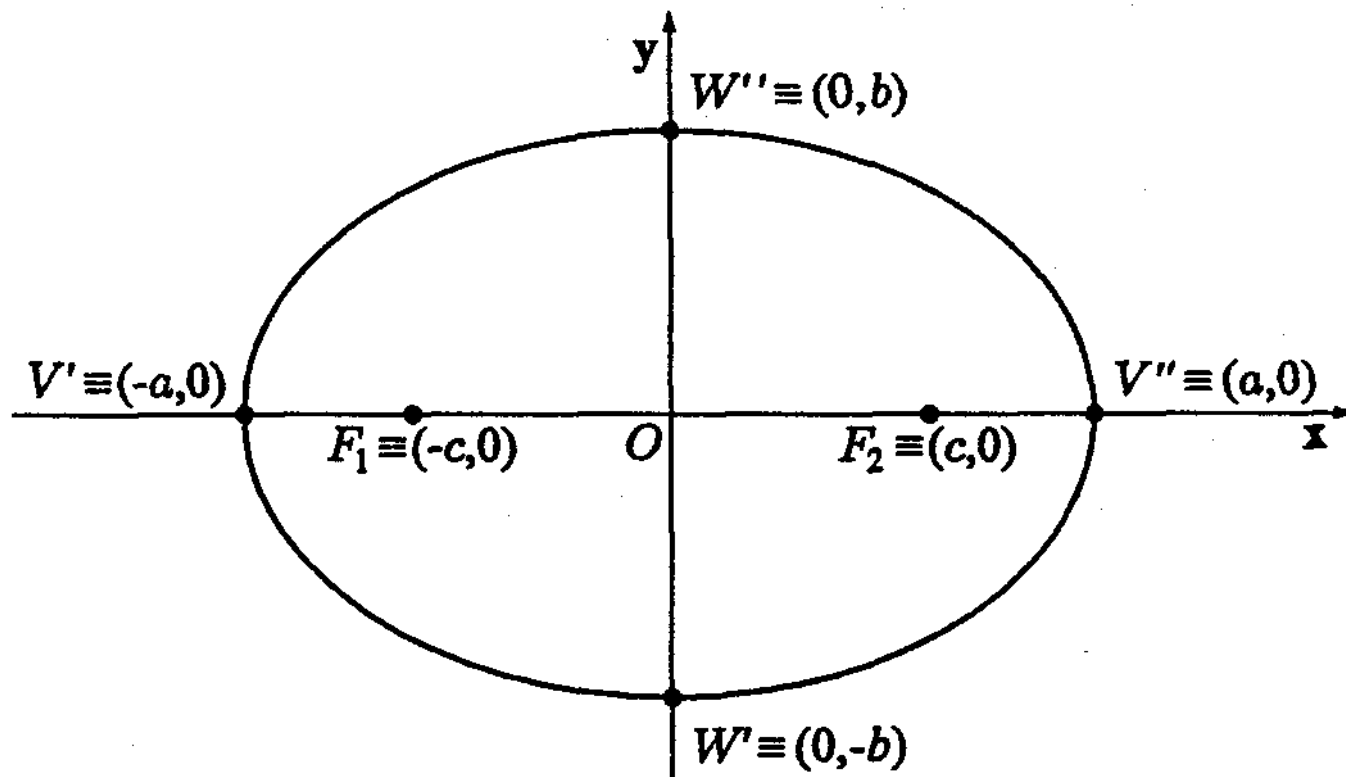


Figura 10.2

◆ **Definizione 10.6.** Si dice *iperbole* il luogo geometrico dei punti del piano $\mathcal{E}^2$ che hanno costante (uguale a $2a > 0$) la differenza - in valore assoluto - delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2 , detti *fuochi*.

Fissato in $\mathcal{E}^2$ il riferimento cartesiano $\bar{\mathcal{R}}$ tale che $F_1 \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} (-c, 0)$ e $F_2 \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} (c, 0)$ (con $d(F_1, F_2) = 2c > 2a$), allora la iperbole $\mathcal{I} = \{P \in \mathcal{E}^2 \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$

ha equazione cartesiana:

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{dove } b = \sqrt{c^2 - a^2} > 0$$

Infatti, $P \equiv (x, y) \in \mathcal{I}$ se e soltanto se

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a;$$

sviluppando i calcoli (isolando i radicali ed elevando al quadrato due volte), si perviene alla equazione considerata.

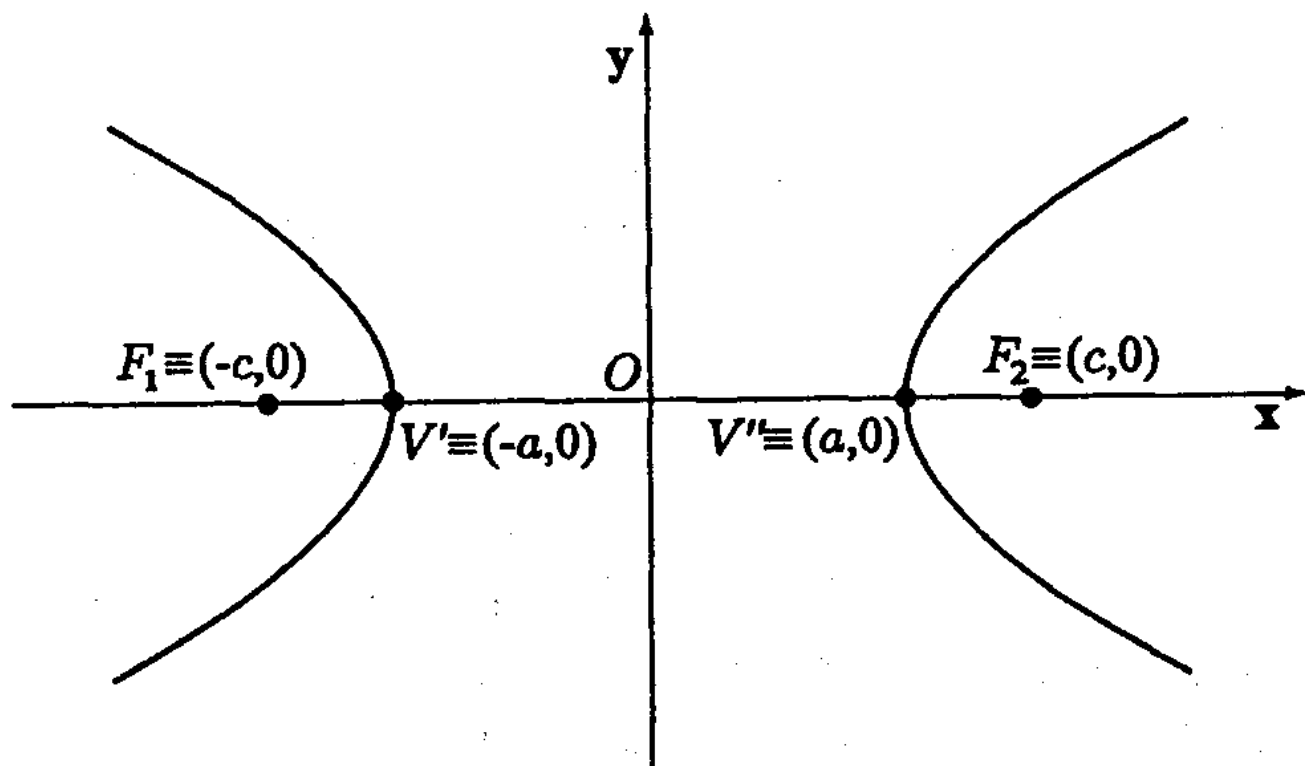


Figura 10.3

♦ **Definizione 10.7.** Si dice *parabola* il luogo geometrico dei punti del piano $\mathcal{E}^2$ che sono equidistanti da un punto fisso F , detto *fuoco*, e da una retta fissa δ , detta *direttrice*.

Fissato in $\mathcal{E}^2$ il riferimento cartesiano $\bar{\mathcal{R}}$ tale che $F \equiv_{\bar{\mathcal{R}}} (0, \frac{p}{2})$ e δ abbia equazione $y = -\frac{p}{2}$ (dove $p = d(F, \delta)$), allora la parabola $\mathcal{P} = \{P \in \mathcal{E}^2 \mid d(P, F) = d(P, \delta)\}$ ha equazione cartesiana:

$$(3) \quad y = \frac{1}{2p}x^2$$

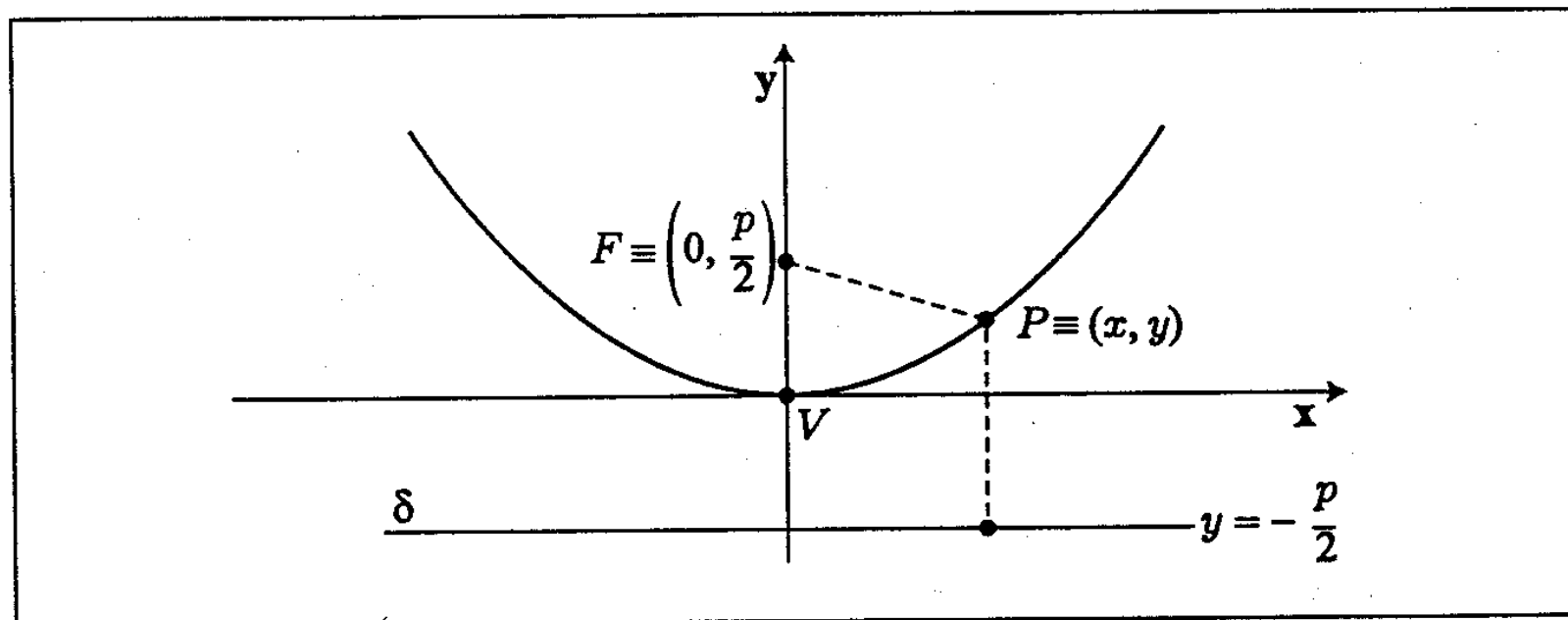


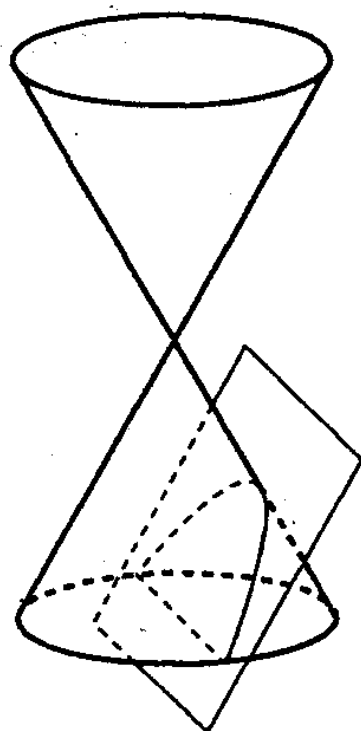
Figura 10.4

Infatti, $P \equiv (x, y) \in \mathcal{P}$ se e soltanto se

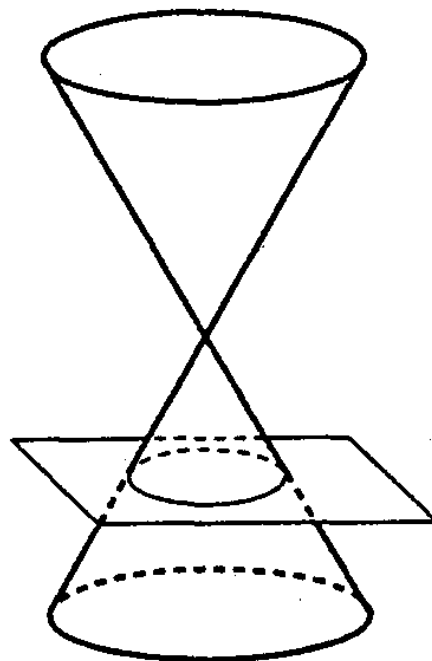
$$\sqrt{(x)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \left|y + \frac{p}{2}\right|;$$

sviluppando i calcoli (elevando al quadrato ambo i membri), si perviene alla equazione considerata.

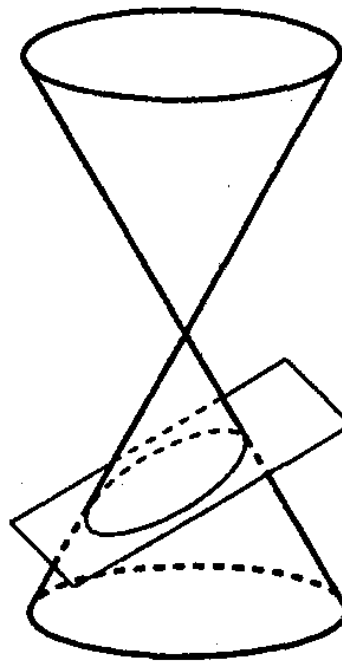
In realtà, è possibile provare che, a parte qualche caso particolare facilmente individuabile, ogni equazione algebrica di secondo grado nelle coordinate x e y rappresenta o una ellisse, o una iperbole, o una parabola del piano euclideo $\mathcal{E}^2$. Tali curve vengono globalmente indicate con il termine *coniche (non degeneri)* del piano euclideo, poichè esse sono state storicamente considerate e studiate come intersezioni tra un piano ed un cono (si veda la Figura 10.5). Le equazione del tipo (1), (1'), (2), o (3) vengono usualmente dette *equazioni canoniche* delle coniche del piano euclideo.



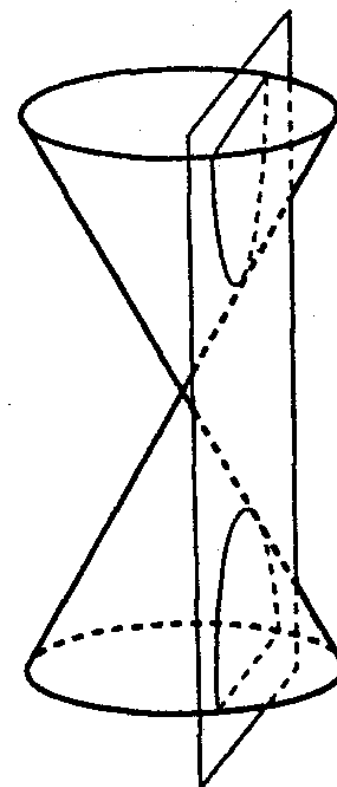
Parabola



Circonferenza



Ellisse



Iperbole

Figura 10.5

■ **Proposizione 10.9.** *Fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$ del piano euclideo $\mathcal{E}^2$, si consideri una generica equazione algebrica di secondo grado nelle coordinate x e y :*

$$(4) \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0 \quad (*)$$

Posto

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad e \quad M_{00} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

e supposto $\det A \neq 0$,³ allora la equazione (4) rappresenta - rispetto ad $\mathcal{R}$ - una conica $\mathcal{C}$ del piano euclideo $\mathcal{E}^2$.

In particolare:

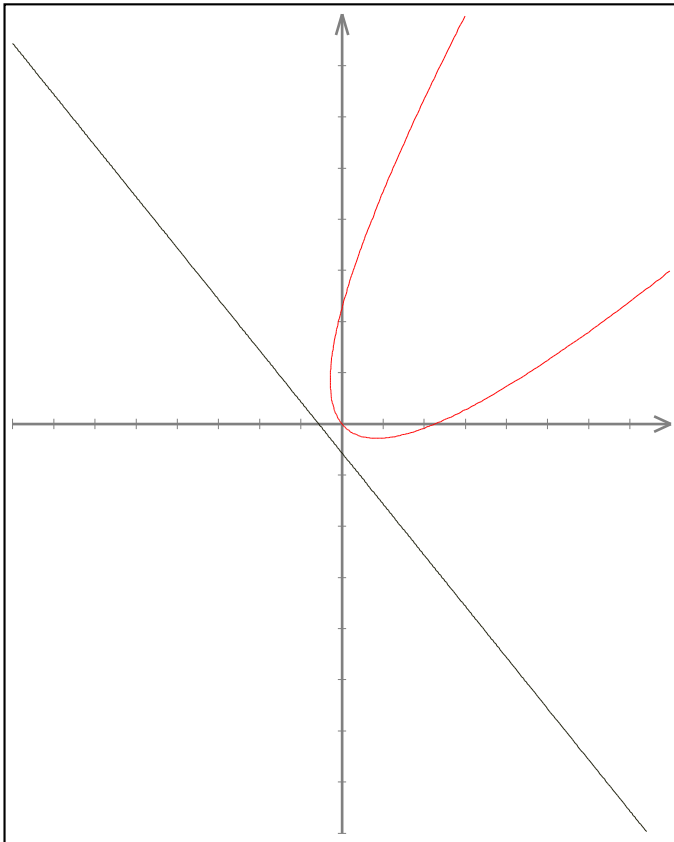
- (i) *se $\det M_{00} = 0$, allora $\mathcal{C}$ è una parabola;*
- (ii) *se $\det M_{00} < 0$, allora $\mathcal{C}$ è una iperbole;*
- (iii) *se $\det M_{00} > 0$, allora $\mathcal{C}$ è una ellisse (vuota se e solo se $a_{22} \cdot \det A > 0$).*

³Se $\det(A) = 0$, allora la equazione (4) rappresenta - rispetto ad $\mathcal{R}$ - o l'unione di due rette, o una sola retta (contata due volte), o un solo punto; poichè anche questi sottoinsiemi di $\mathcal{E}^2$ si possono ottenere come particolari intersezioni tra un piano ed un cono, essi vengono solitamente denominate *coniche degeneri* del piano euclideo $\mathcal{E}^2$

$$x^2 + y^2 - 2xy - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$$

Che cosa rappresenta questa equazione? una parabola

Come faccio a disegnarla? Devo capire qual è il riferimento buono
quello in cui l'equazione diventa "canonica".



$$\begin{cases} x = \cos(\pi/4)X + \sin(\pi/4)Y \\ y = -\sin(\pi/4)X + \cos(\pi/4)Y \end{cases}$$



$$X^2 - Y = 0$$

♦ **Definizione 12.6.** Data una conica C di $\mathcal{E}^2$ di equazione $(*)$ (~~e di equazione omogenea $(**)$~~), si dice *matrice associata a C* (o *discriminante di C*) rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ la matrice simmetrica ²

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbf{R})$$

Tramite la matrice associata a C , è possibile scrivere in forma matriciale le equazioni $(*)$ e ~~$(**)$~~ di C :

$$(*) \quad (1 \quad x \quad y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \text{(o, più sinteticamente, } {}^t(u) \cdot A \cdot (u) = \mathbf{0} \text{)}$$

con $u = (1 \ x \ y)$

■ **Proposizione 12.4.** Sia C una conica di $\mathcal{E}^2$ avente, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, matrice associata $A \in S_3(\mathbb{R})$. Se $\mathcal{R}'$ è un altro riferimento cartesiano su $\mathcal{E}^2$, ed

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_2^1 \\ e_1^2 & e_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad E = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_2^1 \\ e_1^2 & e_2^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}),$$

sono le equazioni del cambiamento di riferimento da $\mathcal{R}$ ad $\mathcal{R}'$, allora la conica C ha, rispetto ad $\mathcal{R}'$, matrice associata A' tale che

$$A = {}^t \bar{E} \cdot A' \cdot \bar{E}, \quad \text{con} \quad \bar{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b^1 & e_1^1 & e_2^1 \\ b^2 & e_1^2 & e_2^2 \end{pmatrix}$$

■ **Proposizione 12.5.** Tutti i discriminanti di una stessa conica C hanno lo stesso rango.

Per rango $\rho(C)$ di C si intenderà il rango di un suo qualsiasi discriminante.

◆ **Definizione 12.7.** Una conica C di $\mathcal{E}^2$ si dice *non specializzata* o *non degenera* se $\rho(C) = 3$. In caso contrario, si dice che C è una *conica specializzata* o *degenera* di $\mathcal{E}^2$. Quindi, se A è un discriminante di C , si ha che C è degenera se e solo se $\det A = 0$.

Definizione Sia $\mathcal{C}$ una conica non specializzata di $\mathcal{E}^2$. Si chiama *centro* di $\mathcal{C}$ un punto C di simmetria centrale per $\mathcal{C}$, cioè tale che $s_C(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ (si veda Definizione 9.20). Se tale punto esiste, allora è unico e la conica è detta *a centro*. Si chiama *asse* di $\mathcal{C}$ ogni retta r di simmetria ortogonale per $\mathcal{C}$, cioè tale che $s_r(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ (si veda Definizione 9.21). Si chiama *vertice* di $\mathcal{C}$ ogni punto di intersezione di $\mathcal{C}$ con un suo asse.

Osservazione Ogni parabola ha un solo asse ed un solo vertice. Ogni iperbole ha due assi e due vertici giacenti sullo stesso asse (che è quello contenente i fuochi). Ogni ellisse (che non sia una circonferenza) ha due assi ciascuno contenente due vertici. Infine la circonferenza ha infiniti assi.

Ellisse e iperbole sono coniche a centro mentre la parabola non lo è. Si noti che per le coniche a centro il centro risulta essere il punto di intersezione degli

Proposizione Sia $\mathcal{C}$ una conica non specializzata avente discriminante A rispetto ad un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$. Ogni asse di $\mathcal{C}$ ha equazione rispetto a $\mathcal{R}$

$$(1 \ x \ y) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ l \\ m \end{pmatrix} = 0,$$

dove (l, m) è un autovettore non nullo relativo ad un autovalore non nullo del minore M_{00} di A . Inoltre se $\mathcal{C}$ è a centro, allora il centro C ha coordinate

$$C \equiv_{\mathcal{R}} \left(\frac{A_{01}}{A_{00}}, \frac{A_{02}}{A_{00}} \right).$$

Le proprietà del centro, degli assi e dei vertici, ottenute nel paragrafo precedente, permettono, nei vari tipi di coniche non specializzate, di potere scegliere sempre un riferimento cartesiano rispetto al quale l'equazione della conica risulta particolarmente semplice. Infatti, la proposizione seguente afferma che, fissato opportunamente il riferimento, la matrice associata è o di tipo diagonale (ovvero, i suoi unici elementi non nulli appartengono alla diagonale principale) o di tipo "anti-diagonale" (ovvero, i suoi unici elementi non nulli appartengono alla diagonale secondaria).

■ **Proposizione 12.12.** *Sia C una conica non specializzata di $\mathcal{E}^2$.*

- (i) *Se C è una conica a centro, sia $\bar{\mathcal{R}}$ il riferimento cartesiano avente origine $\bar{O}$ coincidente con il centro di C , ed assi coordinati $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ coincidenti con una coppia di assi, tra loro ortogonali, di C . Allora, la matrice associata a C rispetto ad $\bar{\mathcal{R}}$ risulta di tipo diagonale.*
- (ii) *Se C è una parabola, sia $\bar{\mathcal{R}}$ il riferimento cartesiano avente origine $\bar{O}$ coincidente con il vertice V di C , asse $\mathbf{Y}$ coincidente con l'asse di C ed asse $\mathbf{X}$ coincidente con la tangente in V a C . Allora, la matrice associata a C rispetto ad $\bar{\mathcal{R}}$ risulta di tipo "anti-diagonale".*

con la retta passante per V e ortogonale a $\mathbf{Y}$

La proposizione seguente fornisce il metodo operativo per ottenere, a partire da una qualunque matrice associata alla conica non specializzata C , una matrice di tipo diagonale o anti-diagonale associata a C .

■ **Proposizione 12.13.** *Sia C una conica non specializzata di $\mathcal{E}^2$ e sia A una sua matrice associata, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$.*

- (i) *Se C è una conica a centro, allora una matrice di tipo diagonale associata a C è*

$$D = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

dove $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sono i due autovalori (eventualmente coincidenti) del minore M_{00} di A e $d \in \mathbb{R} - \{0\}$ si ricava imponendo $\det D = \det A$.

- (ii) *Se C è una parabola, allora una matrice di tipo "anti-diagonale" associata a C è*

$$D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d' \\ 0 & \lambda & 0 \\ d' & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$ è l'unico autovalore non nullo del minore M_{00} di A e $d' \in \mathbb{R} - \{0\}$ si ricava imponendo $\det D' = \det A$.

■ **Proposizione 12.15.** *Una conica C di $\mathcal{E}^2$ è una circonferenza se e soltanto se, in una qualunque matrice associata A , si ha*

$$M_{00} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \lambda \cdot \det A < 0.$$

□