5. Le quadriche dello spazio euclideo

Nel presente paragrafo, estenderemo alla dimensione tre i concetti e i risultati esposti nel § 2 per la dimensione due. Supponiamo dunque che $\mathcal{E}^3$ sia uno spazio euclideo di dimensione tre, in cui è fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$.

♦ **Definizione 12.15.** Considerata una generica equazione algebrica di secondo grado nelle coordinate x, y e z:

$$(*) \qquad a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{01}x+2a_{02}y+2a_{03}z+a_{00} = 0,$$

diremo che tale equazione rappresenta, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, una *quadrica* dello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$.

♦ **Definizione 12.18.** Data una quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathcal{E}^3$ di equazione (*) ~~(o di equazione omogenea (**))~~, si dice *matrice associata* a $\mathcal{Q}$ (o *discriminante* di $\mathcal{Q}$) rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ la matrice simmetrica [7]

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_4(\mathbf{R})$$

~~Si osservi che, con tali notazioni, $\mathcal{I}_\infty(\mathcal{Q})$ coincide con il supporto di $\mathcal{Q}_\infty$ ed il discriminante di $\mathcal{Q}_\infty$ è M_{00} (il minore complementare dell'elemento a_{00} nella matrice A).~~

Tramite la matrice associata a $\mathcal{Q}$, è possibile scrivere in forma matriciale le equazioni (*) ~~e (**)~~ di $\mathcal{Q}$:

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{(o, più sinteticamente,} \quad {}^t(u) \cdot A \cdot (u) = 0\text{)};$$

■ **Proposizione 12.20.** *Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica di $\mathcal{E}^3$ avente, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, matrice associata $A \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R})$. Se $\mathcal{R}'$ è un altro riferimento cartesiano su $\mathcal{E}^3$, ed*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_2^1 & e_3^1 \\ e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 \\ e_1^3 & e_2^3 & e_3^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}, \qquad con \qquad E = \begin{pmatrix} e_1^1 & e_2^1 & e_3^1 \\ e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 \\ e_1^3 & e_2^3 & e_3^3 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}),$$

sono le equazioni del cambiamento di riferimento da $\mathcal{R}$ ad $\mathcal{R}'$, allora la quadrica $\mathcal{Q}$ ha, rispetto ad $\mathcal{R}'$, matrice associata A' tale che

$$A = {}^t\bar{E} \cdot A' \cdot \bar{E}, \qquad con \quad \bar{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b^1 & e_1^1 & e_2^1 & e_3^1 \\ b^2 & e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 \\ b^3 & e_1^3 & e_2^3 & e_3^3 \end{pmatrix}$$

■ **Proposizione 12.21.** *Tutti i discriminanti di una stessa quadrica C hanno lo stesso rango.* □

Per *rango* $\varrho(\mathcal{Q})$ di $\mathcal{Q}$ si intenderà il rango di un suo qualsiasi discriminante.

♦ **Definizione 12.19.** Una quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathcal{E}^3$ si dice *non specializzata* o *non degenere* se $\varrho(\mathcal{Q}) = 4$. In caso contrario, si dice che $\mathcal{Q}$ è una *quadrica specializzata* o *degenere* di $\mathcal{E}^2$.

Quindi, se A è un discriminante di $\mathcal{Q}$, si ha che $\mathcal{Q}$ è degenere se e solo se $\det A = 0$.

■ **Teorema 12.32. (Classificazione delle quadriche non specializzate di $\mathcal{E}^3$**

Sia Q una quadrica non specializzata di $\mathcal{E}^3$. Allora Q appartiene ad una ed una sola *delle seguenti classi:*

(a_1) *paraboloidi ellittici (o non rigati);*

(a_2) *paraboloidi iperbolici (o doppiamente rigati o a sella);*

(b_1) *iperboloidi ellittici (o non rigati o a due falde);*

(b_2) *iperboloidi iperbolici (o doppiamente rigati o ad una falda);*

(c_1) *ellissoidi reali;*

(c_2) *ellissoidi immaginari (o vuoti).*

■ **Proposizione 12.30.** *Sia Q una quadrica non specializzata di $\mathcal{E}^3$ e sia A una sua matrice associata, rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R}$.*

(a_1) *Se Q è un paraboloide e* $\det A < 0$, *allora esiste un riferimento cartesiano su $\mathcal{E}^3$ rispetto al quale Q assume equazione*

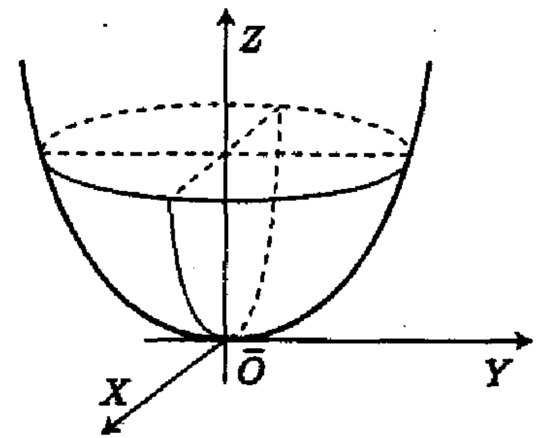
$$Z = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}^+,\ a \geq b;$$

ellittico

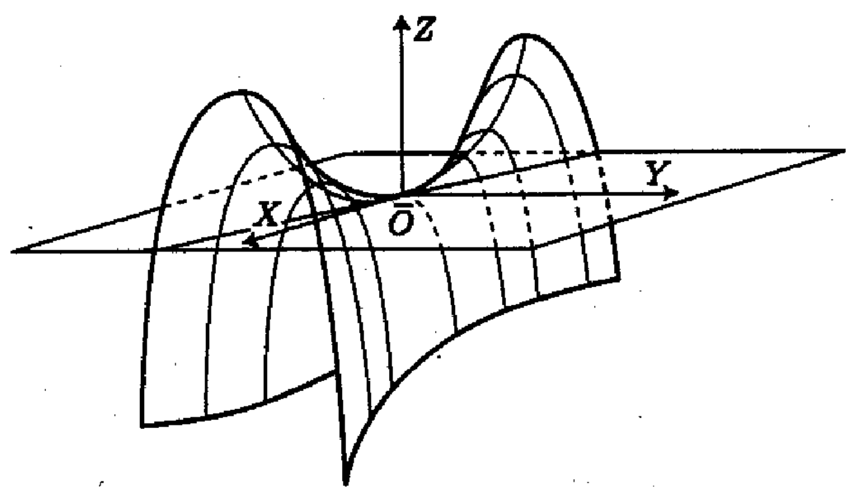
(a_2) *Se Q è un paraboloide e* $\det A > 0$, *allora esiste un riferimento cartesiano su $\mathcal{E}^3$ rispetto al quale Q assume equazione*

$$Z = \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}^+;$$

iperbolico



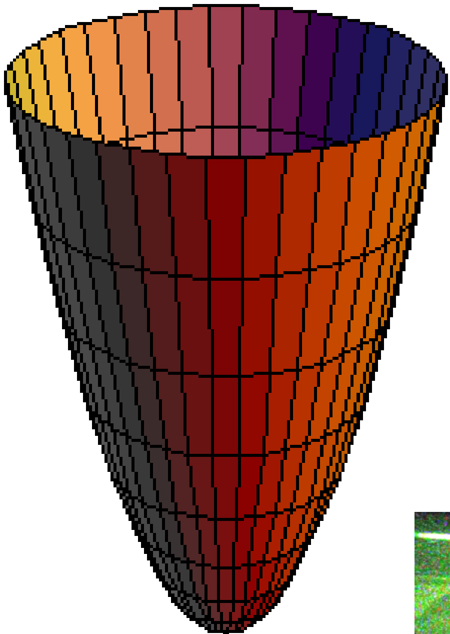
Paraboloide ellittico



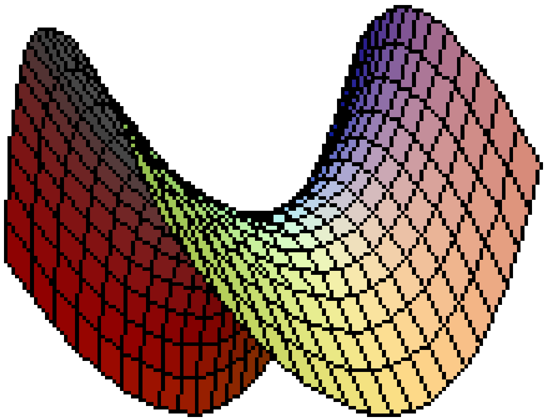
Paraboloide iperbolico

http://mathworld.wolfram.com/Paraboloid.html

Paraboloide ellittico.



$$Z = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}$$



$$Z = \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2}$$

http://mathworld.wolfram.com/HyperbolicParaboloid.html

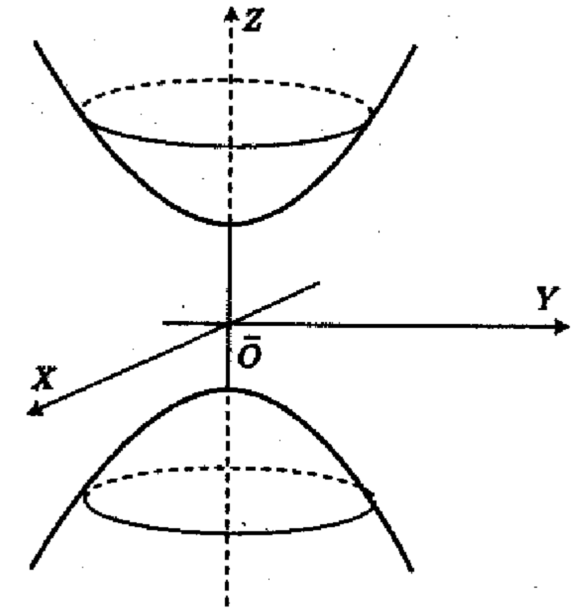
Paraboloide iperbolico.

(b_1) *Se* Q *è un iperboloide e* $\det A < 0$, *allora esiste un riferimento cartesiano su* $\mathcal{E}^3$ *rispetto al quale* Q *assume equazione*

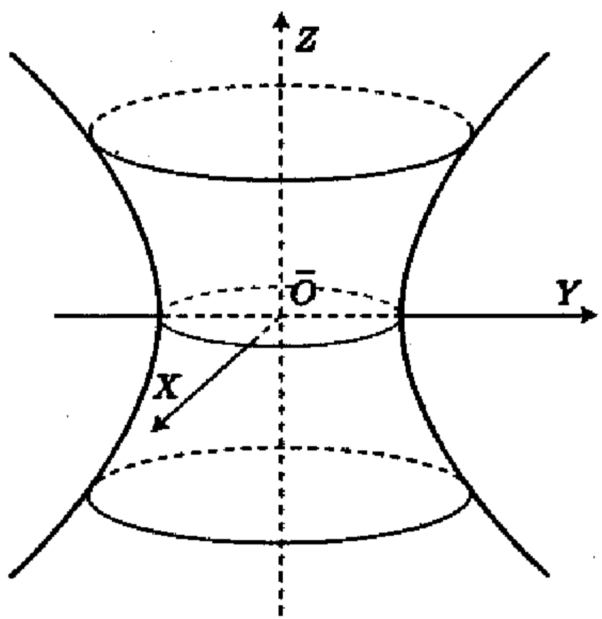
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1 \qquad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}^+, \quad a \geq b; \qquad \textit{ellittico}$$

(b_2) *Se* Q *è un iperboloide e* $\det A > 0$, *allora esiste un riferimento cartesiano su* $\mathcal{E}^3$ *rispetto al quale* Q *assume equazione*

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1 \qquad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}^+, \quad a \geq b; \qquad \textit{iperbolico}$$



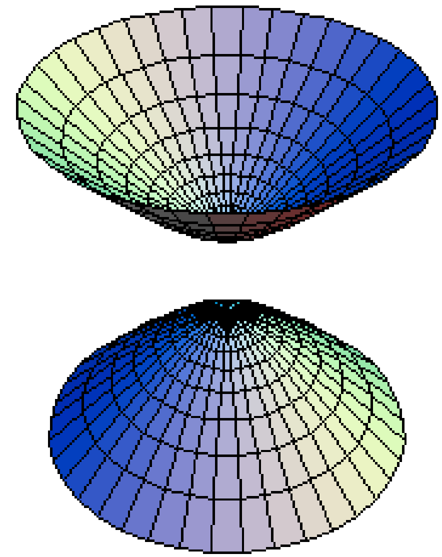
Iperboloide ellittico



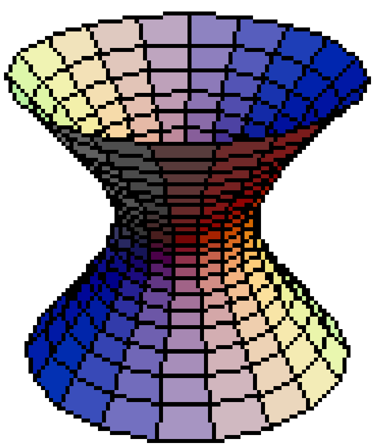
Iperboloide iperbolico

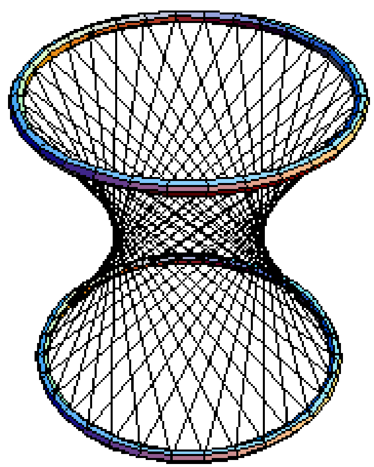
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1$$

Iperboloide ellittico.



http://mathworld.wolfram.com/Hyperboloid.html





Iperboloide iperbolico.

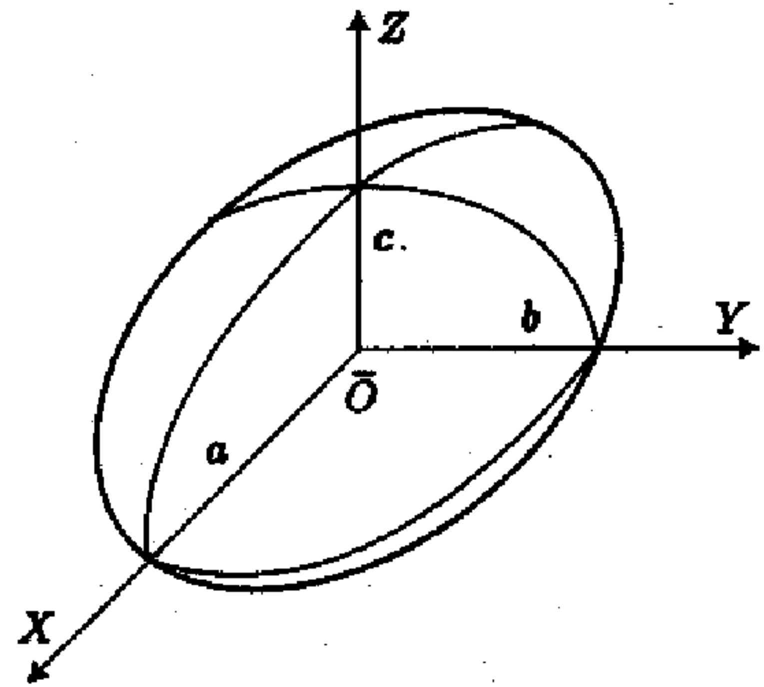
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

(c_1) *Se Q è un ellissoide e* $\det A < 0$, *allora esiste un riferimento cartesiano su $\mathcal{E}^3$ rispetto al quale Q assume equazione*

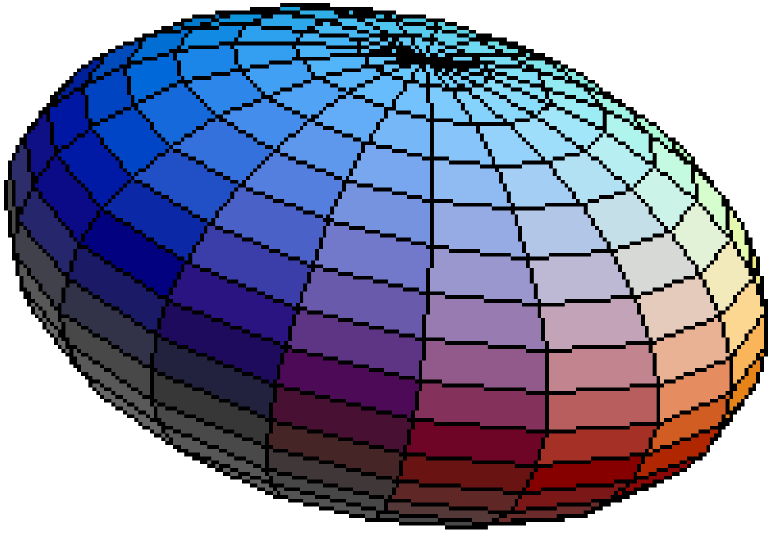
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1 \qquad \text{con} \;\; a, b, c \in \mathbb{R}^+, \quad a \geq b \geq c; \qquad \textit{reale}$$

(c_2) *Se Q è un ellissoide e* $\det A > 0$, *allora esiste un riferimento cartesiano su $\mathcal{E}^3$ rispetto al quale Q assume equazione*

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = -1 \qquad \text{con} \;\; a, b, c \in \mathbb{R}^+, \quad a \geq b \geq c. \quad \textit{immaginario}$$



Ellissoide reale



http://mathworld.wolfram.com/Ellipsoid.html

Ellissoide reale.

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

Ellissoide immaginario.

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = -1$$

Coni e cilindri

Teorema *Sia Q una quadrica specializzata di $\mathcal{E}^3$. Se $\varrho(Q) = 3$ allora Q appartiene ad una ed una sola delle seguenti classi:*

(d_1) *coni reali;*

(d_2) *coni immaginari;*

(e_1) *cilindri ellittici;*

(e_2) *cilindri immaginari (o vuoti);*

(e_3) *cilindri iperbolici;*

(e_4) *cilindri parabolici;.*

Se $\varrho(Q) < 3$ allora la quadrica, se non è vuota, è l'unione di due piani, un solo piano (contato due volte) oppure un punto.

Proposizione *Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica (specializzata) di $\mathcal{E}^3$ tale che $\varrho(\mathcal{Q}) = 3$.*

(d_1) *Se $\mathcal{Q}$ è un cono reale esiste un riferimento cartesiano di $\mathcal{E}^3$ rispetto al quale $\mathcal{Q}$ assume equazione*

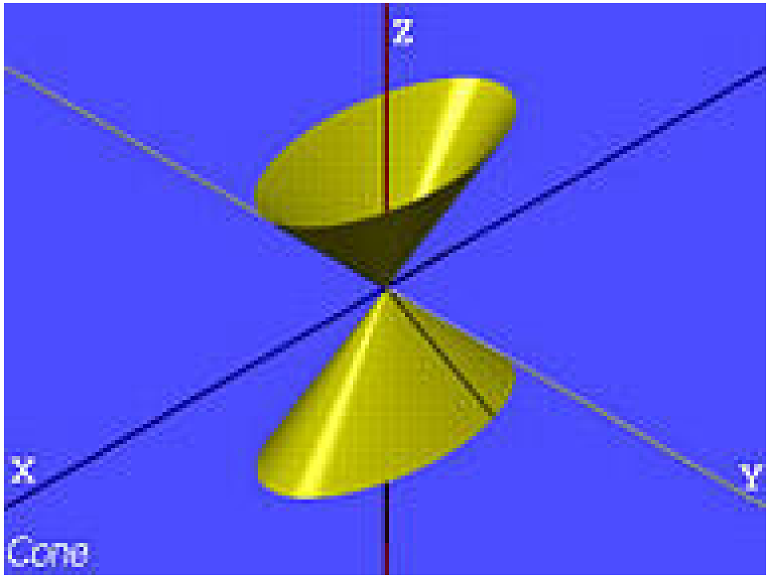
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 0, \qquad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}^+,\ a \geq b;$$

(d_2) *Se $\mathcal{Q}$ è un cono immaginario esiste un riferimento cartesiano di $\mathcal{E}^3$ rispetto al quale $\mathcal{Q}$ assume equazione*

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 0, \qquad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}^+,\ a \geq b \geq c;$$

cono reale

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0$$



http://en.wikipedia.org/wiki/Quadric

cono immaginario

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=0.$$

• $\overline{O}$

(e_1) *Se $\mathcal{Q}$ è un cilindro ellittico esiste un riferimento cartesiano di $\mathcal{E}^3$ rispetto al quale $\mathcal{Q}$ assume equazione*

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1, \qquad \textit{con } a, b \in \mathbb{R}^+,\ a \geq b;$$

(e_2) *Se $\mathcal{Q}$ è un cilindro immaginario esiste un riferimento cartesiano di $\mathcal{E}^3$ rispetto al quale $\mathcal{Q}$ assume equazione*

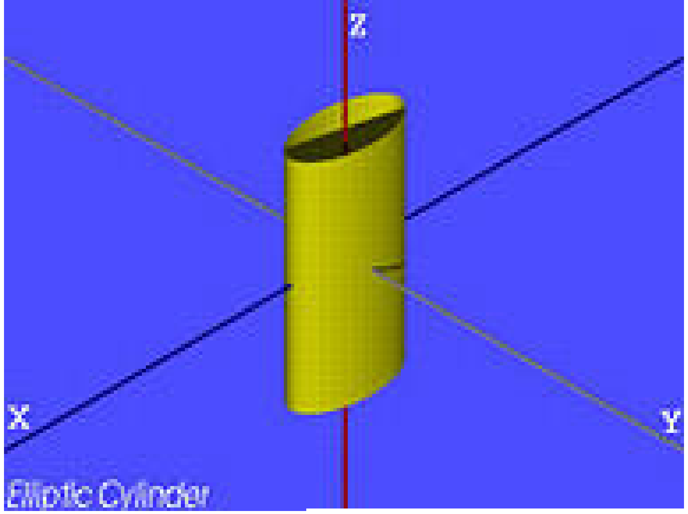
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1, \qquad \textit{con } a, b \in \mathbb{R}^+,\ a \geq b;$$

(e_3) *Se $\mathcal{Q}$ è un cilindro iperbolico esiste un riferimento cartesiano di $\mathcal{E}^3$ rispetto al quale $\mathcal{Q}$ assume equazione*

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1, \qquad \textit{con } a, b \in \mathbb{R}^+,\ a \geq b;$$

(e_4) *Se $\mathcal{Q}$ è un cilindro parabolico esiste un riferimento cartesiano di $\mathcal{E}^3$ rispetto al quale $\mathcal{Q}$ assume equazione*

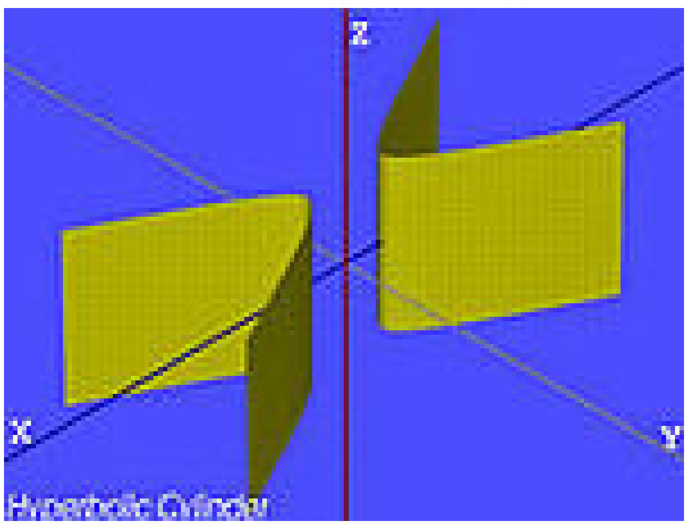
$$Y = \frac{1}{2p} X^2, \qquad \textit{con } p \in \mathbb{R}^*;$$

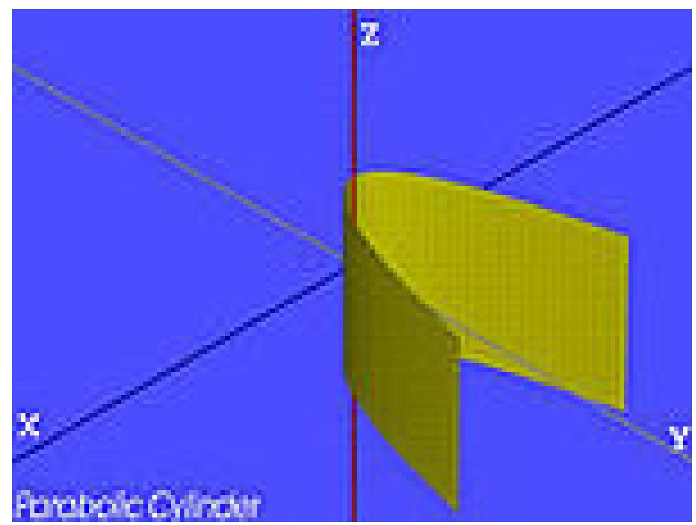


http://en.wikipedia.org/wiki/Quadric

cilindro ellittico $$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$$

cilindro immaginario $$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=-1.$$





cilindro iperbolico $$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$$

cilindro parabolico $$Y=\frac{1}{2p}X^2$$

■ **Proposizione 12.34.** *Una quadrica Q di $\mathcal{E}^3$ è una sfera se e soltanto se, in una qualunque matrice associata A, si ha*

$$\det A < 0 \qquad e \qquad M_{00} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad con \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

□

~~La sfera risulta quindi l'unica quadrica non vuota di rotazione attorno al suo centro.~~

[11]Come noto, si definisce *sfera* di centro C e raggio $r > 0$ l'insieme

$$\mathbb{S}^2 = \{P \in \mathcal{E}^3 \mid d(P, C) = r\}.$$

Se si sceglie in $\mathcal{E}^3$ un riferimento cartesiano avente origine coincidente con C, allora l'equazione di $\mathbb{S}^2$ diventa, ovviamente:

$$\mathbb{S}^2 : \; X^2 + Y^2 + Z^2 = r^2.$$