Integrali indefiniti

Abbiamo sinora studiato come ottenere la funzione derivata di una data funzione.

Vogliamo ora chiederci, data una funzione f, come ottenerne una funzione, che derivata dia f.

Esempio

Data la funzione $f(x) = x^4 - 3x + 9$, dobbiamo cercare tre funzioni:la prima funzione deve dare x^4, la seconda $-3x$ e la terza 9.

Per ottenere x^4 dobbiamo considerare x^5 ma dobbiamo anche dividerlo per 5, cioè dobbiamo considerare $\frac{x^5}{5}$; per $3x$ otteniamo $\frac{3x^2}{2}$, mentre per 9, abbiamo $9x$.

Ora, mettendo tutto questo insieme si ottiene la seguente funzione,
$F(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^2}{2} + 9x$.
La funzione F si chiama *primitiva* di f.
Anche le funzioni:
$F_1(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^2}{2} + 9x + 3$ o
$F_2(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^2}{2} + 9x - \frac{100}{7}$
sono primitive di f; quindi, la primitiva di f, se esiste, non è unica.

Infatti, se la funzione F è primitiva di f in un intervallo I, allora tutte le funzioni $G(x) = F(x) + c (c \in \mathbb{R})$ sono primitive di f in I.

Inoltre tutte le primitive hanno questa forma come afferma la seguente:

Proposizione Sia $f : I \to \mathbb{R}$. Se le funzioni F e $G : I \to \mathbb{R}$ sono primitive di f allora esiste una costante $(c \in \mathbb{R})$ tale che
$G(x) = F(x) + c$ per ogni $x \in I$.

Dimostrazione. Sia $H(x) = G(x) - F(x)$ per ogni $x \in I$.

Allora $H'^{(}x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Per un Corollario al Teorema di Lagrange essendo H una funzione continua a derivata nulla nell'intervallo I è costante in I.

Quindi $c = H(x) = G(x) - F(x)$ e $G(x) = F(x) + c$.

Ora siamo in grado di dare la seguente:

Definizione: Data una funzione f, l'insieme delle primitive di f si chiama *integrale indefinito* e si indica,

$$\int f(x) = F(x) + c$$

In questa definizione $\int$ è il simbolo integrante, f èla funzione integranda, x la variabile di integrazione e c la costante di integrazione e F una qualsiasi primitiva di f.

Proprietà dell'integrale indefinito

Dalle proprietà delle derivate di funzioni si ottengono le seguenti proprietà:

- se k è un numero reale $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
- $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x))dx$

  In altre parole, l'integrale di una combinazione lineare di funzioni è la combinazione lieare dei singoli integrali.

Diamo ora la lista degli integrali delle funzioni elementari

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

  Questa formula, non vale quando $n = -1$, infatti in tal caso si avrebbe 0 a denominatore.
- $\int kdx = kx + c$ dove k, c sono costanti
- $\int sinxdx = \cos x + c$
- $\int cosxdx = -\sin x + c$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int(1 + \tan^2 x)dx = \tan x + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c$

Esempi

1. $\int(5t^3 - 10t^{-6} + 4)dt = 5\frac{1}{4}t^4 - 10\frac{1}{-5}t^{-5} + 4t + c = \frac{5}{4}t^4 + 2t^{-5} + 4t + c = \frac{1}{4t^5}\left(5t^9 + 16t^6 + 8\right) + c$
2. $\int(x^8 + x^{-8})dx = \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{7}x^{-7} + c = \frac{1}{63x^7}\left(7x^{16} - 9\right) + c$
3. $\int(3\sqrt[4]{x^3} + \frac{7}{x^5} + \frac{1}{6\sqrt{x}})dx = \int(3x^{\frac{3}{4}} + \frac{7}{x^5} + \frac{1}{6\sqrt{x}})dx = 3\cdot\frac{1}{\frac{7}{4}}x^{\frac{7}{4}} - \frac{7}{4}x^{-4} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{84x^4}\left(28x^{\frac{9}{2}} + 144x^{\frac{23}{4}} - 147\right) + c$
4. $\int dy = y + c$
5. $\int(w + \sqrt[3]{w})(4 - w^2)dw = \int(4w - w^2\sqrt[3]{w} + 4\sqrt[3]{w} - w^3)dw = \int(4w - w^{\frac{7}{3}} + 4w^{\frac{1}{3}} - w^3)dw = 2w^2 - \frac{1}{4}w^4 + 3w^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{10}w^{\frac{10}{3}} + c$
6. $\int\frac{4x^{10} - 2x^4 + 15x^2}{x^3}dx = \int(4x^7 - 2x + \frac{15}{x})dx = \frac{1}{2}x^8 - x^2 + 15\ln|x| + c$
7. $\int(3e^x + 5\cos x - \frac{10}{cos^2 x})dx = 3e^x + 5\sin x - 10\tan x + c$
8. $\int(\frac{23}{y^2+1} + 6\sin y + \frac{9}{y})dy = 23\arctan y - 6\cos y + 9\ln|y| + c$
9. $\int(\frac{7 - 6\cos^2\theta}{\cos^2\theta})d\theta = \int(\frac{7}{\cos^2\theta} - 6)d\theta = 7\tan\theta - 6\theta + c$
10. $\int\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}dt$

Ci sono diversi modi per fare questo integrale e la maggior parte di questi medodi richiedono tecniche che esporremo in seguito. Tuttavia, vi è un modo semplice per calcolare questo integrale.

Dobbiamo solo ricordare la formula di duplicazione del seno: $\sin 2t = 2\sin t\cos t$

Sostituendo t con $\frac{t}{2}$ si ha: $\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$; quindi:
$\int\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}dt = \int\frac{1}{2}\sin t dt = -\frac{1}{2}\cos t + c$
.

Come osservato in precedenza vi è un altro metodo per fare questo integrante. In realtà ci sono due metodi alternativi, come vedremo in seguito, ma la formula di semplificazione nel precedente problema è un bel "trucco" da ricordare.

Essa può essere utilizzata per semplificare notevolmente alcuni problemi.

Consideriamo ora altri problemi:

determinare le funzioni tali che

- (a) $f'(x) = 4x^3 - 9 + 2\sin x + 7e^x; f(0) = 15$
- (b) $f''(x) = 15\sqrt{x} + 5x^3 + 6; f(1) = -\frac{5}{4}.; f'(1) = 2$

Per risolvere il problema (a) dobbiamo trovare una primitiva di f' che valga $\frac{5}{4}$ in 1. Le primitive di f'sono: $\int(4x^3 - 9 + 2\sin x + 7e^x)dx = x^4 - 9x - 2\cos x + 7e^x + c$

Dunque dobbiamo trovare un valore di c per cui:
$15 = f(0) = 0^4 - 9 \cdot 0 - 2\cos 0 + 7e^0 + c$; quindi
$15 = -2 + 7 + c$, che significa $c = 10$
Dunque $f(x) = x^4 - 9x - 2\cos x + 7e^x + 10$

Per risolvere il problema (b) dobbiamo trovare una primitiva di f'' che valga 2 in 1,
$\int(15\sqrt{x} + 5x^3 + 6)dx = 15\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{4}x^4 + 6x + c = \frac{5}{4}x^4 + 10x^{\frac{3}{2}} + 6x + c$
$f'(1) = 10 + \frac{5}{4} + 6 + c = c + \frac{69}{4} = 2$, quindi $c = -\frac{61}{4}$.
Ora dobbiamo trovare una funzione la cui derivata sia $\frac{5}{4}x^4 + 10x^{\frac{3}{2}} + 6x - \frac{61}{4}$ e che valga $-\frac{5}{4}$ in 1.
Quindi
$\int(\frac{5}{4}x^4 + 10x^{\frac{3}{2}} + 6x - \frac{61}{4})dx = \frac{1}{4}x^5 + +4x^{\frac{5}{2}} + 3x^2 - \frac{61}{4}x + d =$
Chiediamo che la funzione in 1 valga $-\frac{5}{4}$.
$f(1) = 3 - \frac{61}{4} + \frac{1}{4} + 4 + d = -\frac{5}{4}$, quindi d= $\frac{27}{4}$
La funzione richiesta è $f(x) = 4x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4}x^5 + 3x^2 - 16x + \frac{27}{4}$

La retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa 1 ha equazione:
$y + \frac{5}{4} = 2(x - 1)$

Integrali per sostituzione

Sinora abbiamo calcolato integali elementari: cioè integrali che si possono ottenere dal formulario o applicando la formula della derivata della somma e dalla moltiplicazione una costante; non siamo però in grado di calcolare integrali del tipo:

$$\int 18x^2 \sqrt[4]{6x^3+5}dx; \qquad \text{oppure} \qquad \int (1-\tfrac{1}{w}) \cos(w-\ln w)dx$$

Per risolvere questi integrali abbiamo bisogno della regola di sostituzione, cioè dobbiamo usare la regola di derivazioni di funzioni composte.

In entrambe i casi proposti la funzione integranda è del tipo: $f(g(x)) \cdot g'(x)$ o $f(g(w)) \cdot g'(w)$.

Allora basterà trovare una primitiva di f , poniamo F e avremo

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = F(g(x)) + c$$

In pratica porremo $u = g(x)$ essendo $du = g'(x)dx$, si potrà scrivere:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int f(u)du = F(u) + c \quad \text{dove} \quad u = g(x)$$

Risolvere un integrale per sostituzione significa eliminare ogni x che esiste nella funzione da integrare e scrivere l'integrale completamente in termini della nuova incognita utilizzando sia la definizione della nuova incognita sia il suo differenziale.

Calcoliamo $\int 18x^2 \sqrt[4]{6x^3+5}dx$

ponendo $u = 6x^3+5$, sotto questa condizione $du = 18x^2dx$ e

$\int 18x^2 \sqrt[4]{6x^3+5}dx = \int u^{\frac{1}{4}}du = \frac{4}{5}u^{\frac{5}{4}} + c = \frac{4}{5}(6x^3+5)^{\frac{5}{4}} + c$

Calcoliamo $\int (1-\frac{1}{w}) \cos(w-\ln w)dx$

ponendo $u = w - \ln w$, $du = (1 - \frac{1}{w})dw$ abbiamo

$$\int (1 - \frac{1}{w}) \cos(w - \ln w)dx = \int \cos(u)du = \sin u + c = \sin(w - \ln w) + c$$

Come al solito siamo in grado di controllare i nostri risultati derivando le soluzioni trovate.

Attenzione: quando si usa la regola di sostituzione, non dimenticare di "tornare a sostituire" la variabile iniziale e ottenere l 'integrante con la variabile originale.

Esempi

1. $$\int 3(8y-1)e^{4y^2-y}dy$$

   Ponendo $u = 4y^2 - y$ si ha $du = (8y-1)dy$ e

   $$\int 3(8y-1)e^{4y^2-y}dy = \int 3e^u du = 3e^u + c = 3e^{4y^2-y} + c$$

2. $$\int x^2(3-10x^3)^4 dx$$

   Ponendo $u = 3 - 10x^3$ si ha $du = -30x^2dx$ $(x^2dx = -\frac{du}{30})$

   $$\int x^2(3-10x^3)^4 dx = \int u^4 \frac{du}{-30} = \frac{1}{5}.(-\frac{1}{30})u^5 + c = -\frac{1}{150}(3-10x^3)^5 + c$$

3. $$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$$

   Ponendo $u = 1 - 4x^2$ si ha $du = -8xdx$ $(xdx = \frac{du}{-8})$

   $$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int u^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{-8} = -\frac{1}{4}.u^{\frac{1}{2}} + c = -\frac{1}{4}(1-4x^2)^{\frac{1}{2}} + c$$

4. $$\int \cos(3z)\sin^{10}(3z)dz$$

   Ponendo $u = \sin(3z)$ si ha $du = 3\cos(3z)dz$ e

   $$\int \cos(3z)\sin^{10}(3z)dz = \int u^{10}\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\frac{1}{11}.u^{11} + c = \frac{1}{33}\sin^{11}(3z) + c$$

5. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

Ponendo $u = x^{\frac{1}{2}}$ si ha $du = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$ e $2du = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ quindi

$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2\int \cos(u)du = 2.\sin(u) + c = 2\sin(\sqrt{x}) + c$

6. $\int \sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2})dt$

Ponendo $u = \sin(\frac{t}{2})$ si ha $du = \frac{1}{2}\cos(\frac{t}{2})dt$ e

$\int \sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2})dt = \int 2udu = u^2 + c = \sin^2(\frac{t}{2}) + c = \sin^2\frac{t}{2} + c = \frac{1-\cos t}{2} + c = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(t) + c = -\frac{1}{2}\cos(t) + c'$

Integrali per parti

Mentre la formula di integrazione per sostituzione è conseguenza dal teorema di derivazione di funzioni composte, la formula d'integrazione per parti segue dalla formula della derivata del prodotto di due funzioni,

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$, cioè:

$$f \cdot g' = (f \cdot g)' - (f' \cdot g)$$

Quindi, dovendo cercare le primitive di un prodotto di due funzioni di cui una sia derivalbile (fattor finito) e dell'altra si conosca una primitiva (fattor differenziale), possiamo trasformare la ricerca di queste primitive in una ricerca diversa, a volte più semplice:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \; dx$$

Esempi

1. $\int xlnxdx$

   Si tratta di un prodotto di funzioni: della funzione logaritmo si conosce la derivata $(1/x)$, ma non una primitiva e quindi si sceglierà come fattor finito, della funzione x si conoscono le primitive e quindi sarà scelto come fattor differenziale. Quindi ponendo

   $f(x) = logx$(fattor finito); $g(x) = x$ (fattor differenziale), si ha :

   $\int xlnxdx = (lnx)\frac{x^2}{2} - \int (\frac{x^2}{2})\frac{1}{x}dx = (lnx)\frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{2}dx = (lnx)\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + c$

2. $\int xe^x dx$

   Conviene scegliere $f(x) = e^x$ come fattore differenziale e $g(x) = x$ come fattore finito. Dunque si ha:

   $\int xe^x dx = xe^x - \int 1e^x dx = xe^x - e^x + c$

3. $\int ln(x)dx$

Scriviamo $\int ln(x)dx = \int 1 \cdot \ln(x)dx$

Scegliamo $f(x) = 1$ come fattore differenziale e $g(x) = ln(x)$ come fattore finito. Dunque si ha:

$\int ln(x)dx = xln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = xln(x) - x + c$

4. $\int x \sin x dx$

Scegliendo $f(x) = \sin x$ come fattore differenziale e $g(x) = x$ come fattore finito, si ha:

$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int 1(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + c$

5. $\int x^2 \cos(2x)dx$

Scegliendo $f(x) = \cos(2x)$ come fattore differenziale e $g(x) = x^2$ come fattore finito, si ha:

$\int x^2 \cos(2x)dx = x^2\frac{\sin(2x)}{2} - \int 2x\frac{\sin(2x)}{2}dx = x^2\frac{\sin(2x)}{2} - \int x\sin(2x)dx$

Integrando ancora per parti si ha:

$\int x^2 \cos(2x)dx = x^2\frac{\sin(2x)}{2} - (x(-\frac{\cos(2x)}{2}) - \int 1 \cdot \frac{\cos(2x)}{2}dx) = x^2\frac{\sin(2x)}{2} + x\frac{\cos(2x)}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$

6. $\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - (e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x)dx) = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$

In conclusione $2\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x + c$ e

$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + c = e^x\frac{\sin x + \cos x}{2} + c$

7. $\int \sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2})dt = 2\sin^2\frac{t}{2} - \int \cos\frac{1}{2}t \sin\frac{1}{2}t\, dt$

Quindi $2\int \sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2})dt = 2\sin^2\frac{t}{2} + c$ e $\int \sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2})dt = \sin^2\frac{t}{2} + c$