Scritto di Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
Corso di Laurea in Informatica
Martedì 22 luglio 2014

Nome e cognome :

Numero di matricola :

Firma:

Compilare la seguente dichiarazione.

Il/la sottoscritto/a.. (matricola...........................) autorizza/non autorizza (cancellare la voce che non interessa) i docenti del corso a pubblicare sul sito Web il risultato della prova scritta, usando come identificativo il numero di matricola.

Firma

1) Un dado con le facce contrassegnate con i numeri da **1** a **6** viene lanciato tre volte. Siano X, Y e Z i risultati dei tre lanci..

a) Qual è la probabilità che X, Y e Z siano tutti diversi da 5.

b) Qual è la probabilità che X, Y e Z siano tutti pari.

c) Calcolare $\mathbf{P}(\max(X, Y, Z) \leq 5)$.

d) Calcolare $\mathbf{P}(X + Y + Z \leq 6)$.

Brutta copia

2) I numeri aleatori X, Y hanno densità congiunta

$$p(x, y) = \begin{cases} K & \text{per } 0 \leq x, 0 \leq y, x + y \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

dove K è la costante di normalizzazione.

a) Calcolare K.

b) Calcolare $\mathbf{P}(X)$, $\mathbf{P}(Y)$.

c) Calcolare $\sigma^{\mathbf{2}}(X)$, $\sigma^{\mathbf{2}}(Y)$.

d) Calcolare $\mathbf{cov}(X, Y)$.

Brutta copia

3) Gli eventi $E_1, E_2, \ldots$ sono stocasticamente indipendenti subordinatamente alla conoscenza del parametro aleatorio Θ con $\mathbf{P}(E_i|\Theta = \theta) = \theta$. La densità a priori di Θ è data da

$$\pi_0(\theta) = \begin{cases} K\ \theta(1-\theta)^2 & \text{per } 0 \leq \theta \leq 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si osservano i valori dei primi 5 eventi: $E_2 = E_3 = 0$ e $E_1 = E_4 = E_5 = 1$.

a) Calcolare la costante K e la previsione a priori di Θ.

b) Scrivere la densità a posteriori di Θ.

c) Calcolare la previsione e la varianza a posteriori di Θ.

d) Calcolare la probabilità a posteriori di $\widetilde{E_6}\widetilde{E_7}$.

Brutta copia

4) Una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ ha insieme degli stati $S = \{1, 2, 3\}$, matrice di transizione

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\rho_1 = \frac{1}{5}, \qquad \rho_2 = \frac{2}{5}, \qquad \rho_3 = \frac{2}{5}.$$

a) Calcolare $\mathbf{P}(X_2 = 2)$.

b) Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati ed i loro periodi.

c) Dire se esistono e in caso positivo calcolare

$$\lim_{n\to\infty} p_{1,2}^{(n)} \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = 3)$$

Brutta copia