

ESERCIZI SUL CALCOLO DIFFERENZIALE IN \mathbb{R}^2

Gradiente - Piano tangente - Derivate Direzionali

1. Determinare l'equazione del piano tangente al grafico delle funzioni sotto elencate, nei punti indicati.

- a) $f(x, y) = 3x^2y - 2xy^3 + y^4$, $P = (1, 1)$.
- b) $f(x, y) = \frac{x^2y}{x+y}$, $P = (1, 2)$.
- c) $f(x, y) = x \log(x^2 + y^2)$, $P = (1, 1)$.
- d) $f(x, y) = \sin(2x + y^2)$, $P = (\frac{\pi}{2}, 1)$.

2. Determinare la direzione di massima crescita delle funzioni sotto elencate, nei punti indicati.

- a) $f(x, y) = \sin(x^2y)(2x + 1)$, $P = (1, \pi)$.
- b) $f(x, y) = \frac{3x \log y}{y^2}$, $P = (1, 1)$.
- c) $f(x, y) = e^{2xy}(x^2 + y)$, $P = (2, 0)$.
- d) $f(x, y) = \log(\sin(x + y))$, $P = (\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8})$.

3. Determinare la derivata direzionale delle funzioni sotto elencate, nel punto P e rispetto al vettore \mathbf{v} indicati (usando la definizione e verificare che vale la formula del gradiente) .

- a) $f(x, y) = e^x \cos(x^2 + y^2)$, $P = (0, 0)$, $\mathbf{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.
- b) $f(x, y) = \frac{e^{xy}}{x + y + 1}$, $P = (0, 0)$, $\mathbf{v} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.
- c) $f(x, y) = \frac{\log x}{x^2 + y^2}$, $P = (1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 0)$.
- d) $f(x, y) = x + 4x^2e^y$, $P = (0, 1)$, $\mathbf{v} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

SOLUZIONI:

- (1) a) $z = 4x + y - 3$, b) $10x + y - 9z - 6 = 0$, c) $z = (\log 2 + 1)x + y - 1$, d) $z = -2x + \pi$.
- (2) a) $(-6\pi, -3)$, b) $(0, 3)$, c) $(4, 17)$, d) $(1, 1)$.
- (3) a) $\cos \theta$, b) $-\sqrt{2}$, c) $1/2$, d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.