ESERCIZIO 1 (solo una delle due versioni)

$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$ (definita per $x \geq 0$)

$f'(x) \cdot (x^2+1)^2 = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+1) - \sqrt{x} \cdot 2x =$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+1-4x^2) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(1-3x^2)$

f è crescente $\iff f'(x) \geq 0 \iff f'(x)(x^2+1)^2 \geq 0$

$\iff 1-3x^2 \geq 0$ ($\sqrt{x} > 0 \ \forall x \geq 0$)

$\Updownarrow$

$\begin{cases} x^2 \leq \frac{1}{3} \\ x \geq 0 \text{ (dominio della funzione)} \end{cases} \iff 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

L'altra variante è analoga $\left(f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+3} \right)$

e si trova $1-x^2 \geq 0$ invece di $1-3x^2 \geq 0$

Dunque $0 \leq x \leq 1$ (intervallo in cui f è crescente)

ESERCIZIO 2

$$\int_1^2 \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_1^2 (1+\sqrt{x})^3 \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{= D(\sqrt{x})}\,dx = 2\left[\frac{(1+\sqrt{x})^4}{4}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^4 - 2^4\right)$$

$$\int_0^1 (x-1)\sin(\pi x)\,dx \underset{\text{int. per parti}}{=} \left[-(x-1)\frac{\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{\pi}\,dx$$

$$= -\frac{\cos(0)}{\pi} + \left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{\pi}$$

$$\int_3^2 (x^2+1)\ln x\,dx = (\text{per parti})$$

$$= \left[\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x\right]_3^2 - \int_3^2 \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \left(\frac{8}{3}+2\right)\ln 2 - \left(\frac{27}{3}+3\right)\ln 3 - \left[\frac{x^3}{9}+x\right]_3^2$$

$$= \frac{14}{3}\ln 2 - 12\ln 3 - \left(\frac{8}{9}+2\right) + \frac{27}{9} + 3$$

$$= \frac{14}{3}\ln 2 - 12\ln 3 + \frac{28}{9}$$

ESERCIZIO 3

③ $f(x) = x \ln(x+1)$. Scrivere pol. di Taylor in $x_0 = 1$

$$f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} = \ln(x+1) + 1 - \frac{1}{x+1}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$. Dunque, $f(1) = \ln 2$

$f'(1) = \ln 2 + \frac{1}{2}$, $f''(1) = \frac{3}{4}$. Quindi il pol di Taylor T ha la forma

$$T(x) = \ln 2 + \left(\frac{1}{2} + \ln 2\right)(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2$$

Nella variante $f(x) = x \ln(x-1)$ con $x_0 = 3$, trovo

$$f'(x) = \ln(x-1) + \frac{x}{x-1} = \ln(x-1) + 1 + \frac{1}{x-1}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}$$. Quindi $f(3) = 3\ln 2$

$f'(3) = \frac{3}{2} + \ln 2$, $f''(3) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Pertanto il polinomio con punto iniziale $x_0 = 3$ è

$$T(x) = 3\ln 2 + \left(\frac{3}{2} + \ln 2\right)(x-3) + \frac{1}{8}(x-3)^2$$

ESERCIZIO 4 (prima variante)

$y'' - 16y = 0$, $y(0) = 1$ & $y'(0) = 8$

Eq. caratteristica $z^2 - 16 = 0 \implies z = \pm 4$.

Soluzione generale $y(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-4t}$

$y'(t) = 4c_1 e^{4t} - 4c_2 e^{-4t}$. Le condizioni iniziali diventano

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 4c_1 - 4c_2 = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = 2 \end{cases}$$ Sommando

$2c_1 + 0c_2 = 3 \implies c_1 = \frac{3}{2}$ e dunque $c_2 = -\frac{1}{2}$

pertanto $y(t) = \frac{3}{2} e^{4t} - \frac{1}{2} e^{-4t}$ è la soluzione

$$\begin{cases} y' = 3\sqrt{t}\, y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Eq. a variabili separabili $y' = a(y)\, b(t)$ con $a(y) = y^2$ & $b(t) = 3\sqrt{t}$

Allora (poiché $a(1) \neq 0$)

$$\int_1^{y(t)} \frac{du}{u^2} = \int_0^t 3\sqrt{s}\, ds = 2t^{3/2}$$

$$= -\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{1^2} = 2t^{3/2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y(t)} = 1 - 2t^{3/2} \quad \Leftrightarrow \quad y(t) = \frac{1}{1 - 2t^{3/2}}$$

ESERCIZIO 4 (seconda variante)

È praticamente identico (a parte qualche numero)

$y'' - 9y = 0$, $y(0) = 1$ & $y'(0) = 9$.

Soluz. generale: $y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t}$

Lavorando come nell'esercizio gemello, si trova

$$y(t) = 2e^{3t} - 3e^{-3t}$$

$$\begin{cases} y' = 3\sqrt{t}\, y^2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Come sopra: $\displaystyle\int_2^{y(t)} \frac{du}{u^2} = \int_0^t 3\sqrt{s}\, ds$

$$\ldots \quad y(t) = \frac{2}{1 - 4t^{3/2}}$$

ESERCIZIO 5

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1-x)+e^x}{e^x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1-x)}{-2} = \frac{+\infty}{-2} = -\infty$$

perché $e^x \to 0$ per $x \to -\infty$, mentre $\ln(1-x) \to +\infty$

Analogamente

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}-\ln(1-x)}{e^x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\ln(1-x)}{-2} = \frac{-\infty}{-2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2+} \frac{\sin(\pi x^2)}{(x-2)\arctan(x^2-4)} = \frac{0}{0} \overset{Hopital}{=}$$

$$= \lim_{x\to 2+} \frac{2\pi x\cos(\pi x^2)}{\arctan(x^2-4)+(x-2)\left(\frac{2x}{1+(x^2-4)^2}\right)} = \frac{4\pi}{(0+)+(0+)\cdot 4}$$

$$= \frac{4\pi}{0+} = +\infty$$

(Usato $x-2 \to 0+$
$\iff x \to 2+ \implies x^2-4 \to 0+$

$$\lim_{x\to 1+} \frac{\sin(2\pi x^2)}{(1-x)\arctan(x^2-1)} \overset{Hop.}{=} \left(\text{forma } \frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{H}{=} \lim_{x\to 1+} \frac{4\pi x \cos(2\pi x^2)}{-\arctan(x^2-1)+(1-x)\frac{2x}{1+(x^2-1)^2}}$$

$$= \frac{4\pi}{-\arctan(0+)+(0-)\cdot 2} = \frac{4\pi}{0-} = -\infty$$

USATO $\arctan(0+) = 0+$
$\arctan(0-) = 0-$,

$x \to 1+ \iff x-1 \to 0+$
$\iff 1-x \to 0-$
$\implies x^2-1 \to 0+$