

ESERCIZI VARI SUL CALCOLO DIFFERENZIALE IN \mathbb{R}^2

1. Determinare il dominio delle funzioni sotto elencate e rappresentarlo sul piano cartesiano.

- a) $f(x, y) = \sqrt{x^4 - y^2}$.
- b) $f(x, y) = \log \frac{x^2 - 1}{1 - y^2}$.
- c) $f(x, y) = \frac{\log(x^2 + y^2 - 4)}{x}$.

2. Determinare l'equazione del piano tangente al grafico delle seguenti funzioni nel punto indicato.

- a) $f(x, y) = \sqrt{1 - 2x^2 - 4y^2}$, $P = (0, 0)$.
- b) $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $P = (1, 2)$.
- c) $f(x, y) = \sqrt{1 + x^3 y^2}$, $P = (2, 1)$.

3. Determinare la derivata direzionale delle funzioni sotto elencate, nel punto P e rispetto al vettore \mathbf{v} indicati (usando la definizione e verificare che vale la formula del gradiente) .

- a) $f(x, y) = (x + y)^2 \sin(x)$, $P = (0, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 0)$.
- b) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\log(1 + y^2)}$, $P = (0, 1)$, $\mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- c) $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$, $P = (1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 0)$.

3. Determinare i punti critici della seguente funzione e classificarli.

$$f(x, y) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right).$$