ESERCIZI SU ESTREMANTI LOCALI

Determinare e classificare i punti critici delle seguenti funzioni.

(1) $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$;

(2) $f(x,y) = 4y^4 - 16x^2y + x$;

(3) $f(x,y) = 2(x^2 + y^2 + 1) - (x^4 + y^4)$;

(4) $f(x,y) = 2x^2y + 2xy^2 - x^2y^2 - 4xy$;

(5) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4xy$;

(6) $f(x,y) = (x^4 + y^4)e^{\frac{x^2+y^2}{2}}$.

(7) Determinare inf/sup, eventuali massimo/minimo relativo/assoluto e i relativi punti di massimo/minimo della funzione
$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}\, e^{(x^2+y^2)}.$$

(8) Determinare inf/sup, eventuali massimo/minimo relativo/assoluto e i relativi punti di massimo/minimo della funzione
$$f(x,y) = (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)\, e^{-\sqrt{x^2+y^2}}.$$
Determinare inoltre l'insieme di livello $\{f = 0\}$ e rappresentarlo nel piano cartesiano.

(9) Determinare inf/sup, eventuali massimo/minimo relativo/assoluto e i relativi punti di massimo/minimo della funzione
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + 2}{2\sqrt{x^2 + y^2} + 1}.$$
Determinare inoltre l'insieme di livello $\{f = 1\}$ e rappresentarlo nel piano cartesiano.

SOLUZIONI: (1) $(0,0)$ p.to di sella; $(-1/3,-1/3)$ pto di max locale; (2) $(1/8, 1/4)$ p.to di sella; (3) $(0,0)$ p.to di min., $(0,\pm1)$ e $(\pm1,0)$ p.ti di sella, $(1,\pm1)$ e $(-1,\pm1)$ p.ti di max. locale; (4) $(0,0),(2,0),(0,2),(2,2)$ p.ti di sella, $(1,1)$ p.to di min. locale; (5) $(0,0)$ p.to di sella, $(1,-1)$ e $(-1,1)$ p.ti di min. locale; (6) $(0,0)$ p.to di min. assoluto, $(\pm2,0)$ e $(0,\pm2)$ p.ti di max. locale; $(\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{2})$ e $(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})$ p.ti di sella.
(7) $\min f = 0$, $(0,0)$ p.to di min. assoluto, $\sup f = +\infty$;
(8) $\min f = -1$; $(0,0)$ p.to di min. assoluto; $\max f = 1/e^2$, tutti i punti della circonferenza $\{(x,y)\in R^2 : x^2 + y^2 = 4\}$ sono punti di massimo assoluto. L'insieme di livello 0 è dato dato dalla circonferenza $\{(x,y)\in R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.
(9) $\max f = 2$; $(0,0)$ p.to di max. assoluto; $\inf f = 1/2$. L'insieme di livello 1 è dato dato dalla circonferenza $\{(x,y)\in R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.