$$
\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, "\Phi_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, "\Phi_{\mathcal{B}'}"] & \\
\mathbb{R}^n \arrow[rr, "E\cdot"] & & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & v \arrow[dl, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \\
(x_1, \dots, x_n) \arrow[rr, mapsto] & & (x'_1, \dots, x'_n)
\end{tikzcd}
$$

Cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$

$$
\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = E \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "id_V"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"'] & V \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}'}"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "E\cdot"] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}
$$

PROP- La matrice E del camb. di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ ha come colonne le componenti dei vettori di $\mathcal{B}$ rispetto a $\mathcal{B}'$.

PROP- La matrice del camb. di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è E^{-1}

$$
\begin{tikzcd}
 & V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}'}"] \arrow[ddl, "\Phi_{\mathcal{B}}"'] & V \arrow[ddl, "\Phi_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, "\Phi_{\mathcal{B}'}"] & \\
 & \mathbb{R}^n \arrow[rr, "A'"] & & \mathbb{R}^n \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] \arrow[ur, "E"] & \mathbb{R}^n \arrow[urr, "E"] & &
\end{tikzcd}
$$

lin.

$A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)$ $\quad v \equiv_{\mathcal{B}} (x)$ $\quad T(v) \equiv_{\mathcal{B}} (y)$

$(y) = A \cdot (x)$

$A' = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(T)$ $\quad v \equiv_{\mathcal{B}'} (x')$ $\quad T(v) \equiv_{\mathcal{B}'} (y')$

$(y') = A' \cdot (x')$

DEF - $A \in M_n(\mathbb{K})$ si dice <u>simile</u> ad A' se $\exists\, E \in GL_n(\mathbb{K})$ (cioè $|E| \neq 0$) tale che $A = E^{-1} \cdot A' \cdot E$

PROP - A risulta simile ad A' $\iff$ $\exists$ uno sp. vett. V, sue basi ordinate $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, un endomorfismo $T : V \to V$, tali che $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)$, $A' = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(T)$

$A = M_{B,B}(T)$ $\quad v \equiv_B (x)$ $\quad T(v) \equiv_B (y)$

$(y) = A \cdot (x)$

$(x') = E \cdot (x)$

$(y') = E \cdot (y)$

$A' = M_{B',B'}(T)$ $\quad v \equiv_{B'} (x')$ $\quad T(v) \equiv_{B'} (y')$

$(y') = A' \cdot (x')$

~~A' - A matrici simili~~

$$\underbrace{E^{-1} \cdot E}_{I_n} \cdot (y) = E^{-1} A' \cdot E(x)$$

$$(y) = E^{-1} \cdot A' \cdot E \cdot (x)$$

$q : V \longrightarrow \mathbb{K}$ forma quadratica

M matrice di Gram di q rispetto a una base $\mathcal{B}$

$= G_{\mathcal{B}}(q)$

A cosa serve? Se $v \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x)$ allora

$$q(v) = {}^t(x) \cdot M \cdot (x) = (x_1 \dots x_n) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Se φ è la forma bilineare polare di q, con

$v \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x)$, $w \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (y)$, allora

$$\varphi(v, w) = {}^t(x) \cdot M \cdot (y) = (x_1 \dots x_n) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

DEF – $A \in M_n(\mathbb{K})$ simmetrica si dice congruente ad A' " " se $\exists\, E \in GL_n(\mathbb{K})$ tale che $A = {}^tE \cdot A' \cdot E$

PROP A risulta congruente ad A' $\iff$ $\iff$ $\exists$ uno sp. vett. V, basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, una forma quadratica q tali che

$$A = G_{\mathcal{B}}(q), \quad A' = G_{\mathcal{B}'}(q)$$

$q: V \to \mathbb{K}$ $\quad A = G_{\mathcal{B}}(q)$ $\quad A' = G_{\mathcal{B}'}(q)$ $\quad v \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x)$

$v \equiv_{\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = (x')$

$$q(v) = {}^t(x) \cdot A \cdot (x) = (x_1 \dots x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$(x) = E \cdot (x')$

$$= {}^t\big(E \cdot (x')\big) \cdot A \cdot \big(E \cdot (x')\big) =$$

$$= {}^t(x') \, {}^tE \cdot A \cdot E \cdot (x') = (x'_1 \dots x'_n) \cdot {}^tE \cdot A \cdot E \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

$$q(v) = {}^t(x') \cdot A' \cdot (x')$$

DEF - $A \in M_n(\mathbb{K})$ si dice <u>diagonalizzabile per similitudine</u> se $\exists$ matrice $D \in M_n(\mathbb{K})$ diagonale, simile ad A.

DEF - $A \in M_n(\mathbb{K})$ simmetrica si dice <u>diagonalizzabile per congruenza</u> se $\exists$ matrice $D \in M_n(\mathbb{K})$ diagonale, congruente ad A.

Dato un endomorfismo $T: V \to V$, una base di V è detta spettrale per T se è formata da autovettori di T.

TEOR (spettrale) – $T: V \to V$ lineare; $A = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(T)$

A è diagonalizzabile per similitudine

$\Updownarrow$

$\exists$ una base di V spettrale per T

$\Updownarrow$

la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di A (e di T) è $= \dim V$.

TEOR: Ogni $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica

è diagonalizzabile per similitudine

Inoltre la diagonalizzazione può essere effettuata mediante una matrice di camb. di base E ortogonale, per cui

$$D = E^{-1} \cdot A \cdot E = {}^tE \cdot A \cdot E \qquad \Big| \qquad A = F^{-1} \cdot D \cdot F = {}^tF \cdot D \cdot F$$

che è anche una diagonalizzazione per congruenza

OSS - La matrice D presenta, sulla diagonale principale gli autovalori di A, ognuno ripetuto tante volte quant'è la sua mg (che è uguale alla sua ma).

TEOR - Ogni $A \in M_n(\mathbb{C})$ simmetrica è diagonalizzabile per congruenza; la matrice diagonale ad essa congruente è formata nello stesso modo.

Quando è che due matrici simmetriche (su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) sono congruenti?

$A \in M_n(\mathbb{C})$ simmetrica. Allora $\exists\, E \in GL_n(\mathbb{C})$ t.c.

$$
{}^tE \cdot A \cdot E = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}
$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sono gli autovalori di $A \neq 0$

Costruisco la matrice $F = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$

Si noti che ${}^tF = F$

Calcolo congruente ad A

$${}^tF \cdot {}^tE \cdot A \cdot E \cdot F = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\alpha_r}} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\alpha_r}} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad r = \operatorname{rk} A$$

← viene detta forma canonica per congruenza di A

TEOR - $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ simmetriche

A è congruente a $B \iff \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$

Funziona anche con $\mathbb{R}$???

Sì, ma col trucco.

$A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica. Allora $\exists E \in GL_n(\mathbb{R})$

t.c. $^tE \cdot A \cdot E = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & & & \\ & & & \mu_1 & & & & \\ & 0 & & & \ddots & & & \\ & & & & & \mu_s & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_r > 0$ autovalori $\mu_1, \dots, \mu_s < 0$ $\neq 0$ di A

Costruisco

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\mu_1}} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & 0 & & & & \frac{1}{\sqrt{-\mu_s}} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Allora

$${}^tF\,{}^tE \cdot A \cdot E \cdot F = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\mu_1}} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\mu_s}} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & \\ & & & \mu_1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \mu_s & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\mu_1}} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\mu_s}} & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

<u>forma canonica per congruenza di A</u>

Data $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica chiamo segnatura di A (e di ogni forma quadratica associata) la coppia

$$\sigma = (\sigma_+, \sigma_-) \quad \text{dove}$$

σ_+ (indice di positività) è la somma delle molteplicità (alg = geom) degli autovalori > 0 di A

σ_- (indice di negatività) è la somma delle molt. (alg = geom) degli autovalori < 0 di A

$p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ $\qquad a_n \neq 0 \qquad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$a_{\cancel{n}}$

Formo la successione finita

$(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$ $\quad$ Se ci sono zeri, associa arbitrariamente segni + o −

Per $i = 1, \dots, n$ chiamo la coppia (a_{i-1}, a_i) una

<u>permanenza</u> se a_{i-1} ed a_i hanno lo stesso segno

<u>variazione</u> se i segni sono opposti.

TEOR (di Harriot - Cartesio semplificato) - Sia $f(t)$ un polinomio a coeffi reali $a_0, \dots, a_n$ con $a_0, a_n \neq 0$ e tale che non abbia (in $\mathbb{C}$) radici con parte immaginaria non nulla.
Allora la somma delle molteplicità delle radici >0 è $=$ al numero di variazioni
la somma delle molteplicità delle radici <0 è $=$ al numero di permanenze.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

pol. car.: $\lambda^3 - 4\lambda^2 - 2\lambda + 1$ $\qquad (1 \ -2 \ -4 \ 1)$

Forma canonica per congr.: in $\mathbb{C}$: $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

in $\mathbb{R}$: $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$

$\sigma = (2, 1)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 & -1 \\ -2 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -5 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

pol. car:

$$\lambda^5 - \lambda^4 - 70\lambda^3 - 26\lambda^2 + 454\lambda - 340$$

Forma can. per cong.:

in $\mathbb{C}$: $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

in $\mathbb{R}$: $\sigma = (3,2)$ $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$

Ricordo: $q: V \to \mathbb{R}$ quadratica

q si dice <u>definita positiva</u> se $\forall v \neq \bar{0}_V$ $q(v) > 0$

<u>definita negativa</u> " " " < 0

TEOR - q quadratica, $M = G_{\mathcal{B}}(q)$

q risulta definita positiva $\iff$ tutti gli autovalori sono > 0 $\iff$ $\sigma = (n, 0)$ $\iff$ il pol. car. ha tutte variazioni

negativa $\iff$ tutti gli autovalori sono < 0 $\iff$ $\sigma = (0, n)$ $\iff$ il pol. car. ha solo permanenze

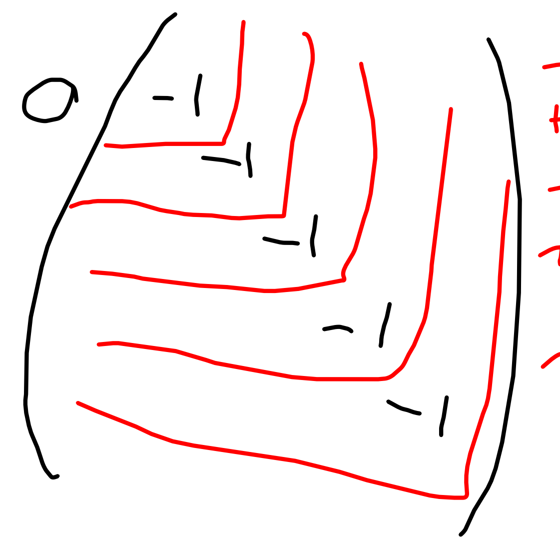
Per scoprire se q è def. pos. o def. neg. ho anche un altro criterio.

Data $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica chiamo minore principale ogni minore (cioè sottomatrice quadrata) che sia intersezione di righe e colonne di A aventi gli stessi indici.

Data $A \in M_n(\mathbb{R})$ simm., sia $M_1, M_2, \dots, M_n$ una successione di n minori principali di A, ognuno contenuta nel successivo

TEOR (Criterio di Sylvester). A risulta

def. positiva $\iff \forall\, i = 1, \dots, n \quad |M_i| > 0$



def. negativa $\iff \forall\, i = 1, \dots, n \quad (-1)^i \cdot |M_i| > 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$|M_1| = 1 > 0$ $+$

$|M_2| = 7 > 0$ $+$

$|M_3| = 7 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 7 > 0$ $+$

def. pos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$|M_1| = 1$ $+$

$|M_2| = 7$ $+$

$|M_3| = 7 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -28 < 0$ $-$

indef

$|M_1| = 1$ $+$

$|M_2| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -4$ $-$

$|M_3| = -28$ $-$

indef.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$|M_1| = -1$ $\quad -$

$|M_2| = 7$ $\quad +$

$|M_3| = -7 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -7$ $\quad -$

def. neg.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 0 \\ -3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$|M_1| = -1$ $\quad -$

$|M_2| = 7$ $\quad +$

$|M_3| = -7 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = 28$ $\quad +$

indef.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

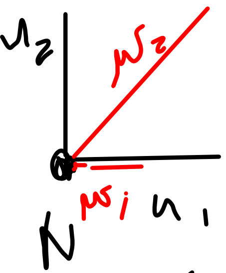
sicuramente indefinita

(rivelato da elementi di segno discorde sulla diagonale principale)

V = spazio dei segmenti con un estremo in N

$$T: V \longrightarrow V$$

$v \longmapsto$ proiezione ortog. di v sull'asse orizzontale



$B = (u_1, u_2)$

$B' = (w_1, w_2)$ $\quad w_1 = \frac{1}{2} u_1 + 0 u_2$

$w_2 = 1 u_1 + 1 u_2$

Camb. di base da B' a B:

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |E^{-1}| = \frac{1}{2}$$

da B a B':

$$E = (E^{-1})^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Scrivo $A' = M_{B',B'}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$T(w_1) = 1 w_1 + 0 w_2$

$T(w_2) = 2 w_1 + 0 w_2$

Chi è $A = M_{B,B}(T)$?

$$A = E^{-1} \cdot A' \cdot E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

proprio come mi aspettavo!