PROP - $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$ simmetriche

A congruente ad A'

$$\Updownarrow$$

$$\sigma(A) = \sigma(A')$$

$[f]$ iperquadrica di $\mathbb{P}^n$ $\quad A$ sua discriminante

PROP - $W[f] \subseteq \mathrm{Im}[f]$

DIM - $P \equiv (\bar{x}) \in W[f]$

$$\Downarrow$$

$$A \cdot (\bar{x}) = (0) \qquad A \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Downarrow$$

$$t(\bar{x}) \cdot A \cdot (\bar{x}) = {}^t(\bar{x}) \cdot (0) = 0 \qquad (\bar{x}_0 \cdots \bar{x}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} =$$

$$= (\bar{x}_0 \cdots \bar{x}_n) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Downarrow$$

$P \in \mathrm{Im}[f]$

Forma bilineare simmetrica:

$$(x_0 \ldots x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Forma quadratica associata

$$(x_0 \ldots x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$P \equiv \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \vdots \\ \bar{x}_1 \end{pmatrix}$$ Cerco gli eventuali $Q \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ coniugati a P

Sono i Q per cui

$$(\bar{x}_0 \dots \bar{x}_n) \cdot A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Mostro che è uguale a:

$$(x_0 \dots x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\underset{1\times(n+1)}{(\bar{x}_0 \dots \bar{x}_n)} \cdot \underset{(n+1)\times(n+1)}{A} \cdot \underset{(n+1)\times 1}{\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}}_{1\times 1} = {}^t\left((\bar{x}_0 \dots \bar{x}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) =$$

perciò simmetrica

$$= (x_0 \dots x_n) \cdot {}^tA \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = (x_0 \dots x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$$

è simm.

Sono i' Q per cui:

$$(x_0 \cdots x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Caso $P \in W$:

$$A \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

. Allora i Q coniugati a P sono quelli per cui:

$$(x_0 \cdots x_n) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

, cioè TUTTI

Caso $P \notin W$ allora $A \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

I Q coniugati a P saddisfano

$$(x_1 \dots x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = 0$$

cioè $b_1 x_1 + \dots + b_n x_n = 0$

con $(b_1, \dots, b_n) \neq (0, \dots, 0)$, cioè UN IPERPIANO

$$P \equiv \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \qquad Q \equiv \begin{pmatrix} \bar{y}_0 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix}$$

$$P \in \tau(Q) \iff (\bar{x}) \text{ soddisfano } (\bar{y}_0 \cdots \bar{y}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff (\bar{y}_0 \cdots \bar{y}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff (\bar{x}_0 \cdots \bar{x}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \bar{y}_0 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff (\bar{y}) \text{ soddisfano } (\bar{x}_0 \cdots \bar{x}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff Q \in \tau(P)$$

$Q \in W \qquad P \notin W \qquad \tau(P) : {}^t(\bar{X}) \cdot A \cdot (X) = 0$

$Q \cong (\bar{Y}) \qquad P \cong (\bar{X})$

$A \cdot (\bar{Y}) = (0) \Rightarrow {}^t(\bar{X}) \cdot A \cdot (\bar{Y}) = {}^t(\bar{X}) \cdot (0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Q \in \tau(P)$

$P \cong (\bar{X})$

$P \in \tau(P) \Leftrightarrow (\bar{X})$ soddisfano ${}^t(\bar{X}) \cdot A \cdot (X) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow {}^t(\bar{X}) \cdot A \cdot (\bar{X}) = 0 \Leftrightarrow P \in Im$

$Y \equiv (\bar{Y}) \in Im$ $\quad P \equiv (\bar{X}) \neq Y$ $\quad$ Retta PY: $(Z) = \lambda(\bar{X}) + \mu(\bar{Y})$

$$\begin{pmatrix} Z_0 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \bar{X}_0 \\ \vdots \\ \bar{X}_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \bar{Y}_0 \\ \vdots \\ \bar{Y}_n \end{pmatrix}$$

Chiedo scusa: sugli appunti è P che appartiene all'immagine. Assumendo Y nell'immagine, quanto scritto qui è comunque coerente.

Cerco le intersezioni fra PY e Im:

$${}^t(Z) \cdot A \cdot (Z) = 0$$

$${}^t\left[\lambda(\bar{X}) + \mu(\bar{Y})\right] \cdot A \cdot \left(\lambda(\bar{X}) + \mu(\bar{Y})\right) = 0$$

$$\lambda\,{}^t(\bar{X}) \cdot A \cdot \left(\lambda(\bar{X}) + \mu(\bar{Y})\right) + \mu\,{}^t(\bar{Y}) \cdot A \cdot \left(\lambda(\bar{X}) + \mu(\bar{Y})\right) = 0$$

$$\lambda^2\,{}^t(\bar{X}) \cdot A \cdot (\bar{X}) + \lambda\mu\,{}^t(\bar{X}) \cdot A \cdot (\bar{Y}) + \mu\lambda\,{}^t(\bar{Y}) \cdot A \cdot (\bar{X}) + \mu^2\,{}^t(\bar{Y}) \cdot A \cdot (\bar{Y}) = 0$$

$$(*)\quad \lambda^2\,{}^t(\bar{X}) \cdot A \cdot (\bar{X}) + 2\lambda\mu\,{}^t(\bar{X}) \cdot A \cdot (\bar{Y}) + \mu^2\,{}^t(\bar{Y}) \cdot A \cdot (\bar{Y}) = 0$$

$$* \quad \lambda^2\, {}^t(\bar{X})\cdot A\cdot(\bar{X}) + 2\lambda\mu\, {}^t(\bar{X})\cdot A\cdot(\bar{Y}) + \mu^2\, {}^t(\bar{Y})\cdot A\cdot(\bar{Y}) = 0$$

$\simeq 0$

resta

$$\lambda\left(\lambda\, {}^t(\bar{X})\cdot A\cdot(\bar{X}) + 2\mu\, {}^t(\bar{X})\cdot A\cdot(\bar{Y})\right) = 0$$

mi dice che $\lambda=0$ dà una intersezione; ma infatti $\lambda=0$ indica proprio Y

la "altra" intersezione è data da

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{-2\, {}^t(\bar{X})\cdot A\cdot(\bar{Y})}{{}^t(\bar{X})\cdot A\cdot(\bar{X})}$$

nel caso che $P \notin I_m$ quindi $\neq 0$

Tangenza(i): anche questa intersezione è Y:

$$\frac{\lambda}{\mu} = 0 \iff {}^t(\bar{X})\cdot A\cdot(\bar{Y}) = 0$$

Tangenza (ii): Tutta la retta PY è $\subset Im$. Allora $*$ dev'essere un'identità: Tutti i coefficienti $= 0$

$$* \quad \lambda^2 \underbrace{{}^t(\bar{X})\cdot A\cdot(\bar{X})}_{=0} + 2\lambda\mu \underbrace{{}^t(\bar{X})\cdot A\cdot(\bar{Y})}_{=0} + \mu^2 \underbrace{{}^t(\bar{Y})\cdot A\cdot(\bar{Y})}_{=0} = 0$$

In entrambi i casi:

PY tangente

$\Updownarrow$

$${}^t(\bar{X})\cdot A\cdot(\bar{Y}) = 0 \iff P \in \mathcal{Z}(Y)$$