$x = \frac{X_1}{X_0}$ $y = \frac{X_2}{X_0}$ $\Gamma: x^2 - 8xy + 4x - 6y + 1 = 0$

$$X_0^2 \left(\left(\frac{X_1}{X_0}\right)^2 - 8\frac{X_1}{X_0}\frac{X_2}{X_0} + 4\frac{X_1}{X_0} - 6\frac{X_2}{X_0} + 1 \right) = 0$$

$$X_1^2 - 8X_1X_2 + 4X_0X_1 - 6X_0X_2 + X_0^2 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Trovare la retta polare di $(1,2)$.

$(1,1,2)$

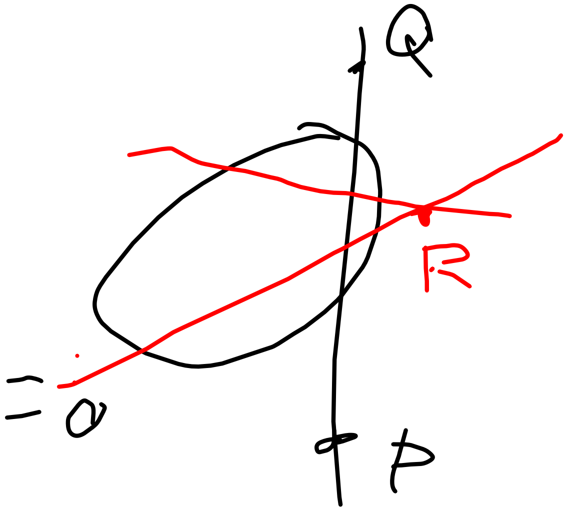
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ x \\ y \end{matrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -5 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad -3X_0 - 5X_1 - 7X_2 = 0$$

$$-3 - 5x - 7y = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Trovare, rispetto a Γ, il polo della retta $r: x - y - 1 = 0$



Cerco due punti su r e ne interseco le polari

$P = (1, 0) \quad (1, 1, 0)$ $\qquad Q = (0, -1) \quad (1, 0, -1)$

$$\tau(P): (1\ 1\ 0) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$3x_0 + 3x_1 - 7x_2 = 0$$

$$\tau(Q): (1\ 0\ -1) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$4x_0 + 6x_1 - 3x_2 = 0$$

$$\begin{cases} 3x_0 + 3x_1 - 7x_2 = 0 \\ 4x_0 + 6x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 3 & -7 \\ 4 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(x_0, x_1, x_2) \sim \left(\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \right) = (33, -19, 6)$$

Polo: $\left(-\frac{19}{33}, \frac{6}{33} \right)$

$Q: x^2 - y^2 + 6xz - 2yz + 2x = 0$

$$X_1^2 - X_2^2 + 6X_1X_3 - 2X_2X_3 + 2X_0X_1 = 0 \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trovare, rispetto a Q, il polo del piano $\pi: x - z = 0$.

Cerco 3 punti non collineari di π:

$P \equiv (1,0,1)$ $\quad Q = (-1,0,-1)$ $\quad R \equiv (0,1,0)$

$(1,1,0,1)$ $\quad (1,-1,0,-1)$ $\quad (1,0,1,0)$

$\tau(P): (1\,1\,0\,1) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_3 \end{pmatrix} = 0$

$\tau(Q): (1\,-1\,0\,-1) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_3 \end{pmatrix} = 0$

$\tau(R): (1\,0\,1\,0) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_3 \end{pmatrix} = 0$

Polo: $\begin{cases} X_0 + 5X_1 - X_2 + 3X_3 = 0 \\ -X_0 - 3X_1 + X_2 - 3X_3 = 0 \\ -X_2 - X_3 = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Polo: $(X_0, X_1, X_2, X_3) \sim \left(\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \right)$

Sia $[f]$ un'iperquadrica non specializzata, sia $Y \equiv (\bar{Y}) \in Im[f]$, sia $\pi = \tau(Y)$ l'iperpiano tangente a $[f]$ in Y (cioè l'iperpiano polare di Y). Allora $Im[f] \cap \pi$ è

o 1) costituita dal solo Y

o 2) un'unione di rette passanti per Y.

In ogni caso tale intersezione è una iperquadrica specializzata di π.

DIM - Se $Im[f] \cap \Pi = \{Y\}$ abbiamo già finito.

Se non è così, c'è almeno un altro punto $P = (\bar{X})$, $P \in Im[f] \cap \Pi$, $P \neq Y$. Interseco $Im[f]$ con la retta PY

$$* \quad \lambda^2 \underbrace{{}^t(\bar{X}) \cdot A \cdot (\bar{X})}_{\substack{=0 \text{ perché} \\ P \in Im[f]}} + 2\lambda\mu \underbrace{{}^t(\bar{X}) \cdot A \cdot (\bar{Y})}_{\substack{=0 \text{ perché} \\ P \in \Pi}} + \mu^2 \underbrace{{}^t(\bar{Y}) \cdot A \cdot (\bar{Y})}_{\substack{=0 \text{ perché} \\ Y \in Im[f]}} = 0$$

Allora $*$ è un'identità, perciò tutta la retta PY è $\subset Im[f] \cap \Pi$.

Classificazione proiett. delle coniche di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

$rk=1$ $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ Im: $X_0^2=0$ una retta (che si dice "contata due volte")

W: $\begin{cases} x_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ la stessa retta

$rk=2$ $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ Im: $X_0^2+X_1^2=0$ unione di due rette

$(X_0+iX_1)(X_0-iX_1)=0$

W: $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ un punto (l'intersezione delle due rette)

$rk=3$ $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ Im: $X_0^2+X_1^2+X_2^2=0$ l'immagine è costituita da ∞ punti e non contiene rette

W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases}$ $\emptyset$

si può dimostrare

Se dovessi studiare come è fatta l'immagine di
$\Gamma : 4X_1^2 + 9X_2^2 + 12X_1X_2 + 4X_0X_1 + 6X_0X_2 + X_0^2 = 0$
potrebbe essere brigoso. Ma guardo il suo discriminante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$ e vedo che ha $rk = 1$

Allora la classificazione della pagina precedente mi dice: l'immagine è costituita da una retta

Classificazione proiettiva delle quadriche di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$:

$\mathrm{rk}=1$ $\begin{pmatrix}1&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix}$

$\mathrm{Im}: X_0^2=0$ — un piano (che si dice "contato 2 volte")

$W: \begin{cases} X_0=0\\ 0=0\\ 0=0\\ 0=0\end{cases}$ — lo stesso piano

---

$\mathrm{rk}=2$ $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&0&\\&&&0\end{pmatrix}$

$\mathrm{Im}: X_0^2+X_1^2=0$

$(X_0+iX_1)(X_0-iX_1)=0$ — unione di 2 piani

$W: \begin{cases} X_0=0\\ X_1=0\\ 0=0\\ 0=0\end{cases}$ — una retta (l'intersezione dei due piani)

$\mathrm{rk}=3$ $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$

$\mathrm{Im}: X_0^2+X_1^2+X_2^2=0$ — unione di ∞ rette generatrici passanti per un punto

si può dimostrare

$W: \begin{cases} X_0=0\\ X_1=0\\ X_2=0\\ 0=0\end{cases}$ — un punto (quello lì)

$rk = 4$

$Im: X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$W: \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \emptyset$$

l'immagine è formata da ∞ punti; non contiene piani; per ogni punto dell'immagine passano due rette generatrici contenute nell'immagine stessa.

si può dimostrare

Classificazione proiettiva delle coniche di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$\sigma = (1,0)$ $(0,1)$

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

Im: $X_0^2 = 0$ una retta ("contata 2 volte")

W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ la stessa retta

---

$\sigma = (2,0)$ $(0,2)$

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

Im: $X_0^2 + X_1^2 = 0$ un punto

W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ lo stesso punto

---

$\sigma = (1,1)$

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

Im: $X_0^2 - X_1^2 = 0$ unione di 2 rette

W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ -X_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ un punto (la loro intersezione)

$\sigma = (3,0) \quad (0,3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$Im: X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$ $\qquad \emptyset$

$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases} \qquad \emptyset$

conica non degenere immaginaria

$\sigma = (2,1) \quad (1,2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$Im: X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$

$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ -X_2 = 0 \end{cases} \qquad \emptyset$

è costituita da ∞ punti; non contiene rette

conica non degenere reale

Classificazione proiettiva delle quadriche di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

$\sigma = (1,0)\ (0,1)$ $\quad$ Im: $X_0^2 = 0$ $\quad$ un piano ("contato 2 volte")

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

la stessa piano

$\sigma = (2,0)\ (0,2)$ $\quad$ Im: $X_0^2 + X_1^2 = 0$ $\quad$ una retta

$$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

la stessa retta

$\sigma = (1,1)$ Im: $X_0^2 - X_1^2 = 0$ unione di 2 piani

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$(X_0 + X_1)(X_0 - X_1) = 0$

$$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ -X_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

una retta: la loro intersezione

$\sigma = (3,0)$ $(0,3)$ Im: $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$ un punto

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

lo stesso punto

cono proiettivo immaginario

$\sigma = (2,1)\ (1,2)$ $\quad$ Im: $X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$ $\quad$ l'immagine è l'unione di ∞ rette generatrici per un punto ma non contiene piani

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ -X_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ un punto (quello)

cono proiettivo reale

$\sigma = (4,0)\ (0,4)$ $\quad$ Im: $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$ $\quad \emptyset$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ X_3 = 0 \end{cases}$ $\emptyset$

quadrica non specializzata immaginaria

$\sigma = (3,1)\ (1,3)$ Im: $X_0^2+X_1^2+X_2^2-X_3^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ -X_3 = 0 \end{cases}$ $\emptyset$

quadrica ellittica

l'immagine non contiene rette ma contiene ∞ punti

si può dimostrare

$\sigma = (2,2)$ Im: $X_0^2+X_1^2-X_2^2-X_3^2=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ -X_2 = 0 \\ -X_3 = 0 \end{cases}$ $\emptyset$

quadrica iperbolica

l'immagine ha ∞ punti, non contiene piani. Per ogni suo punto passano 2 rette generatrici contenute nella immagine stessa

Classificazione delle iperquadriche di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

$\sigma = (1,0)\ (0,1)$ $\quad$ Im : $X_0^2 = 0$ $\quad$ un punto ("contato 2 volte")

$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ W : $\begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ $\quad$ lo stesso punto

---

$\sigma = (2,0)\ (0,2)$ $\quad$ Im : $X_0^2 + X_1^2 = 0$ $\quad$ $\emptyset$

$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ W : $\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \end{cases}$ $\quad$ $\emptyset$

$\sigma = (1,1)$ $\quad$ Im : $X_0^2 - X_1^2 = 0$ $\quad$ 2 punti

$(X_0 + X_1)(X_0 - X_1) = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ $\quad$ W : $\begin{cases} X_0 = 0 \\ -X_1 = 0 \end{cases}$ $\quad$ $\emptyset$

$$A = \begin{pmatrix} a^0_0 & a^0_1 & a^0_2 \\ a^1_0 & \boxed{\begin{matrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{matrix}} \\ a^2_0 & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{a^0_0 X_0^2} + 2\cancel{a^0_1 X_0} X_1 + 2\cancel{a^0_2 X_0} X_2 + \\ + a^1_1 X_1^2 + 2a^1_2 X_1 X_2 + a^2_2 X_2^2 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

$$M^0_0 = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix}$$

discriminante della iperquadrica di π_∞ data dalla intersezione con la conica

$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$ 1 punto cont. 2 v.

$\begin{pmatrix} -1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$

$A^0_0 = |M^0_0| = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ $\emptyset$

$\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

$A^0_0 > 0$

$\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ 2 punti

$A^0_0 < 0$

Classificare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, le coniche affinemente

Γ_α: $\alpha x^2 - 2x + (1-\alpha) y^2 = 0$

$\alpha X_1^2 - 2 X_0 X_1 + (1-\alpha) X_2^2 = 0$

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & (1-\alpha) \end{pmatrix}$$

$$|A_\alpha| = (1-\alpha) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha - 1)$$

Γ_α deg $\Leftrightarrow \alpha = 1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rk = 2$

$$M_\alpha^0 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & (1-\alpha) \end{pmatrix} \qquad A_\alpha^0 = \alpha(1-\alpha)$$

0 1

α	$\lvert A \rvert$	rkA	A_0^0	coniche
$\alpha < 0$	$\neq 0$	3	$-$	iperboli
$\alpha = 0$	$\neq 0$	3	0	parabola
$0 < \alpha < 1$	$\neq 0$	3	$+$	ellissi reali
$\alpha = 1$	$= 0$	2	0	deg $rk = 2$
$\alpha > 1$	$\neq 0$	3	$-$	iperboli